

TÀI LIỆU THAM KHẢO NĂNG CAO

VẬT LÝ 10 CHO GÀ CHỌI

Dành cho học sinh thi học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp quốc gia và Olympic quốc tế

Olympiad Physics for Grade 10 — a bilingual guide

Động học · Động lực học · Tĩnh học · Năng lượng · Động lượng · Vật rắn · Chất lưu

Định luật có dẫn giải · Ví dụ có phân tích và lời giải · Thực nghiệm

Bài tự luyện ba mức (tỉnh, quốc gia, quốc tế) có lời giải đầy đủ

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 — Tháng 10 năm 2026

<https://globalmarket.vin>

M U C L U C

C O N T E N T S

Chương 1. Thứ nguyên, ước lượng và sai số — Chapter 1. Dimensions, estimation and uncertainty	6
1.1. Đại lượng, đơn vị và thứ nguyên — <i>Quantities, units and dimensions</i>	6
1.2. Phân tích thứ nguyên: tìm dạng của định luật — <i>Dimensional analysis: finding the form of a law</i>	9
1.3. Ước lượng bậc độ lớn — <i>Order-of-magnitude estimation.....</i>	12
1.4. Phép đo, chữ số có nghĩa và sai số — <i>Measurement, significant figures and uncertainty.....</i>	14
1.5. Truyền sai số — <i>Propagation of uncertainty.....</i>	16
1.6. Đồ thị tuyến tính hóa và bình phương tối thiểu — <i>Linearised graphs and least squares</i>	21
1.7. Thiết kế phương án thí nghiệm — <i>Designing an experiment</i>	27
1.8. Tổ hợp không thứ nguyên và đồng dạng — <i>Dimensionless groups and similarity</i>	30
1.9. Bảng chiến lược: từ dấu hiệu trong đề đến công cụ — <i>Strategy table: from the sign in the problem to the tool</i>	34
1.10. Bài tự luyện — <i>Practice problems.....</i>	37
1.11. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	39
 Chương 2. Động học chất điểm chuyển động thẳng — Chapter 2. One-dimensional kinematics	 46
2.1. Hệ quy chiếu, độ dịch chuyển và quãng đường — <i>Reference frame, displacement and distance.....</i>	46
2.2. Vận tốc, tốc độ và gia tốc — <i>Velocity, speed and acceleration.....</i>	47
2.3. Đồ thị chuyển động thẳng — <i>Graphs of rectilinear motion</i>	51
2.4. Chuyển động thẳng biến đổi đều — <i>Uniformly accelerated motion.....</i>	54
2.5. Rơi tự do và ném thẳng đứng — <i>Free fall and vertical throws</i>	59
2.6. Hai vật gặp nhau và chuyển động nhiều giai đoạn — <i>Meeting problems and multi-stage motion</i>	62
2.7. Gia tốc thay đổi theo bậc thang — <i>Step-wise acceleration.....</i>	68
2.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and terminology</i>	72
2.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems.....</i>	74
2.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	76
 Chương 3. Chuyển động trong mặt phẳng và tính tương đối — Chapter 3. Motion in a plane and relative motion	 83
3.1. Vector vị trí, vận tốc, gia tốc trong mặt phẳng — <i>Position, velocity and acceleration vectors in a plane</i>	83
3.2. Chuyển động ném ngang — <i>Horizontal projectile motion</i>	85
3.3. Chuyển động ném xiên — <i>Oblique projectile motion</i>	88

3.4. Parabol an toàn, ném từ độ cao và ném lên mặt nghiêng — <i>Safety parabola, elevated throws and throws onto a slope</i>	92
3.5. Cộng vận tốc: qua sông, gió, mưa — <i>Adding velocities: river crossings, wind and rain</i>	99
3.6. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai vật chuyển động — <i>Closest approach of two moving bodies</i>	104
3.7. Liên kết động học: thanh cứng, dây không dẫn, ròng rọc — <i>Kinematic constraints: rigid rods, inextensible strings, pulleys</i>	107
3.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and glossary</i>	111
3.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	113
3.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	116

Chương 4. Động học chuyển động tròn và vật rắn — Chapter 4. Kinematics of circular motion and rigid bodies

4.1. Góc quay, tốc độ góc, chu kỳ — <i>Angle, angular speed, period</i>	122
4.2. Gia tốc hướng tâm, gia tốc tiếp tuyến và gia tốc toàn phần — <i>Centripetal, tangential and total acceleration</i>	124
4.3. Bán kính cong của quỹ đạo — <i>Radius of curvature of a path</i>	128
4.4. Chuyển động của vật rắn: tịnh tiến, quay, công thức cộng vận tốc — <i>Rigid-body motion: translation, rotation, velocity addition</i>	132
4.5. Tâm quay tức thời — <i>The instantaneous centre of rotation</i>	134
4.6. Lăn không trượt và đường cycloid — <i>Rolling without slipping and the cycloid</i>	139
4.7. Truyền động bánh răng và dây curoa — <i>Gear and belt drives</i>	146
4.8. Nhiều vật quay đều: thời điểm gặp nhau, kim đồng hồ — <i>Several uniform rotations: meeting times and clock hands</i>	148
4.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	153
4.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	155

Chương 5. Các định luật Newton và các lực cơ học — Chapter 5. Newton's laws and mechanical forces.....

5.1. Ba định luật Newton, hệ quy chiếu quán tính và khối lượng — <i>Newton's three laws, inertial frames and mass</i>	163
5.2. Tổng hợp và phân tích lực — <i>Composition and resolution of forces</i>	165
5.3. Trọng lực, phản lực pháp tuyến và lực căng dây — <i>Weight, normal force and string tension</i>	168
5.4. Lực đàn hồi của lò xo — <i>Elastic force of a spring</i>	171
5.5. Ma sát nghỉ, ma sát trượt, ma sát lăn và góc ma sát — <i>Static, kinetic and rolling friction; the friction angle</i>	174
5.6. Lực cản của chất lưu và lực nâng — <i>Fluid drag and lift</i>	180
5.7. Phương pháp giải; hệ vật nối, máy Atwood và ròng rọc động — <i>Method; connected bodies, the Atwood machine and movable pulleys</i>	182
5.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and glossary</i>	190
5.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	193
5.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	195

Chương 6. Động lực học nâng cao: hệ quy chiếu phi quán tính, chuyển động tròn, hấp dẫn — Chapter 6. Advanced dynamics: non-inertial frames, circular motion, gravitation	201
6.1. Hệ quy chiếu phi quán tính và lực quán tính — <i>Non-inertial frames and inertial forces</i>	201
6.2. Trọng lượng biểu kiến, thang máy và dây treo trong xe — <i>Apparent weight, lifts and a string hanging in a vehicle</i>	203
6.3. Nêm di động và vật trên nêm — <i>A movable wedge and a block on it</i>	207
6.4. Động lực học chuyển động tròn — <i>Dynamics of circular motion</i>	212
6.5. Hệ quy chiếu quay và lực li tâm — <i>Rotating frames and the centrifugal force</i>	220
6.6. Định luật vạn vật hấp dẫn, g theo độ cao và theo vĩ độ — <i>The law of gravitation, g with altitude and with latitude</i>	225
6.7. Vệ tinh, tốc độ vũ trụ cấp I và định luật Kepler III — <i>Satellites, the first cosmic speed and Kepler's third law</i>	228
6.8. Bảng chiến lược giải bài — <i>Problem-solving strategy table</i>	233
6.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	236
6.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	239
Chương 7. Tĩnh học vật rắn — Chapter 7. Statics of rigid bodies	247
7.1. Moment lực và ngẫu lực — <i>Moment of a force and couples</i>	247
7.2. Điều kiện cân bằng của vật rắn và quy tắc ba lực — <i>Equilibrium of a rigid body and the three-force rule</i>	250
7.3. Trọng tâm và khối tâm — <i>Centre of gravity and centre of mass</i>	253
7.4. Cân bằng có ma sát — <i>Equilibrium with friction</i>	258
7.5. Các dạng cân bằng và mặt chân đế — <i>Kinds of equilibrium and the base of support</i>	263
7.6. Nguyên lý công ảo ở mức sơ cấp — <i>The principle of virtual work at an elementary level</i>	266
7.7. Hệ thanh nối bản lề và giàn phẳng — <i>Hinged rod systems and plane trusses</i>	268
7.8. Chiến lược giải bài tĩnh học — <i>A strategy for statics problems</i>	272
7.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	276
7.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	278
Chương 8. Công, năng lượng và công suất — Chapter 8. Work, energy and power ...	287
8.1. Công của lực — <i>Work done by a force</i>	287
8.2. Công suất và hiệu suất — <i>Power and efficiency</i>	291
8.3. Động năng và định lý động năng — <i>Kinetic energy and the work-energy theorem</i>	292
8.4. Lực thế, thế năng và cơ năng — <i>Conservative forces, potential energy and mechanical energy</i>	294
8.5. Bốn bài toán điển hình — <i>Four standard problems</i>	299
8.6. Đường thế năng — <i>Potential-energy curves</i>	307
8.7. Chọn công cụ và những điều phải thuộc — <i>Choosing the tool and what to memorise</i>	309
8.8. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	312
8.9. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	314

Chương 9. Động lượng, khối tâm và va chạm — Chapter 9. Momentum, centre of mass and collisions	322
9.1. Động lượng và xung lượng — <i>Momentum and impulse</i>	322
9.2. Bảo toàn động lượng — <i>Conservation of momentum</i>	326
9.3. Khối tâm và chuyển động của khối tâm — <i>Centre of mass and its motion</i>	329
9.4. Hệ quy chiếu khối tâm và định lý König — <i>The centre-of-mass frame and König's theorem.....</i>	337
9.5. Va chạm một chiều và hệ số phục hồi — <i>One-dimensional collisions and the coefficient of restitution.....</i>	339
9.6. Va chạm hai chiều và vật nảy nhiều lần — <i>Two-dimensional collisions and repeated bouncing</i>	344
9.7. Chuyển động bằng phản lực — <i>Jet propulsion.....</i>	350
9.8. Chiến lược giải bài động lượng — <i>Problem-solving strategy for momentum</i>	353
9.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems.....</i>	357
9.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	360
Chương 10. Động lực học vật rắn — Chapter 10. Rigid-body dynamics.....	368
10.1. Moment quán tính — <i>Moment of inertia.....</i>	368
10.2. Định lý trục song song — <i>The parallel-axis theorem</i>	371
10.3. Phương trình quay quanh trục cố định — <i>The rotation equation about a fixed axis</i>	373
10.4. Động năng quay và vật lăn — <i>Rotational kinetic energy and rolling.....</i>	377
10.5. Yo-yo và cuộn chỉ — <i>The yo-yo and the cotton reel</i>	383
10.6. Moment động lượng — <i>Angular momentum</i>	386
10.7. Từ trượt sang lăn — <i>From slipping to rolling.....</i>	391
10.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — <i>Strategy table and terminology</i>	394
10.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems.....</i>	397
10.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	399
Chương 11. Biến dạng, áp suất và cơ học chất lưu — Chapter 11. Deformation, pressure and fluid mechanics	406
11.1. Biến dạng kéo – nén và suất Young — <i>Tension, compression and Young's modulus</i>	406
11.2. Khối lượng riêng, áp suất và áp suất chất lỏng — <i>Density, pressure and hydrostatic pressure</i>	411
11.3. Áp lực lên thành bình và đập nước — <i>Force on a vessel wall and on a dam.....</i>	417
11.4. Lực đẩy Archimedes và điều kiện nổi — <i>Archimedes' principle and floating</i>	420
11.5. Tâm nổi và ổn định của vật nổi — <i>Centre of buoyancy and stability of floating bodies</i>	423
11.6. Chất lưu chuyển động: phương trình liên tục và Bernoulli — <i>Moving fluids: continuity and Bernoulli's equation</i>	427
11.7. Torricelli, tia nước, ống Venturi và xi-phông — <i>Torricelli, jets, the Venturi tube and the siphon</i>	429
11.8. Nhận dạng đề và chọn công cụ — <i>Recognising the problem and choosing the tool</i>	435

11.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	437
11.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	440
Chương 12. Thực nghiệm và bài toán tổng hợp — Chapter 12. Experimental physics and synthesis problems	446
12.1. Cấu trúc đề thực hành và quy ước ký hiệu — <i>Structure of a practical paper and notation</i>	446
12.2. Tuyến tính hóa và bình phương tối thiểu — <i>Linearisation and least squares</i>	448
12.3. Truyền sai số và sai số hệ thống — <i>Propagation of uncertainty and systematic error</i>	450
12.4. Phương án đo gia tốc rơi tự do g — <i>Methods for measuring the free-fall acceleration g</i>	451
12.5. Ma sát, độ cứng lò xo và khối lượng riêng — <i>Friction, spring stiffness and density</i>	458
12.6. Đo moment quán tính và vận tốc viên đạn — <i>Measuring moment of inertia and bullet speed</i>	465
12.7. Bài toán tổng hợp nhiều chương — <i>Synthesis problems that chain several chapters</i>	469
12.8. Trình bày bài thực hành được chấm đủ điểm — <i>Writing a practical script that earns full marks</i>	475
12.9. Bài tự luyện — <i>Practice problems</i>	480
12.10. Lời giải bài tự luyện — <i>Solutions to practice problems</i>	482
Phụ lục A. Ba đề luyện thi — Appendix A. Three practice papers	490
A.1. Đề số 1: mức học sinh giỏi cấp tỉnh — <i>A.1. Paper 1: provincial level</i>	490
A.2. Đề số 2: mức học sinh giỏi quốc gia — <i>A.2. Paper 2: national level</i>	503
A.3. Đề số 3: mức Olympic quốc tế — <i>A.3. Paper 3: international Olympiad level</i>	517
Phụ lục B. Tra cứu định luật và kết quả có tên — Appendix B. Index of named laws and results	535
B.1. Bảng tra theo chương — <i>B.1. Index by chapter</i>	535
Phụ lục C. Thuật ngữ Việt – Anh — Appendix C. Vietnamese – English glossary	548
C.1. Bảng tra từ A đến Z — <i>C.1. A to Z index</i>	548
Phụ lục D. Tài liệu đọc thêm — Appendix D. Further reading	557
D.1. Sách tiếng Anh và sách giáo khoa — <i>D.1. Books in English and textbooks</i>	557

Chương 1. Thứ nguyên, ước lượng và sai số — Chapter 1.

Dimensions, estimation and uncertainty

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Dùng thứ nguyên để kiểm tra một công thức và để tìm dạng của một định luật, kể cả khi chưa biết cơ chế.
Use dimensions to test a formula and to find the form of a law before the mechanism is known.
- Ước lượng bậc độ lớn của một đại lượng từ vài số liệu quen thuộc, biết sai ở đâu thì kết quả lệch nhiều nhất.
Estimate the order of magnitude of a quantity from a few familiar numbers, and know which input moves the result most.
- Viết kết quả đo với đúng chữ số có nghĩa, tính sai số của đại lượng gián tiếp qua tổng, tích, lũy thừa.
Write a measured result with the right significant figures and find the uncertainty of an indirect quantity through sums, products and powers.
- Đưa quan hệ lũy thừa về đường thẳng, xác định hệ số góc, hệ số chặn và sai số của chúng.
Turn a power relation into a straight line and find the slope, the intercept and their uncertainties.
- Viết phương án thí nghiệm theo cấu trúc của đề thi học sinh giỏi: cơ sở, dụng cụ, các bước, xử lý số liệu, sai số.
Write an experimental plan in the structure used in olympiad papers: principle, apparatus, steps, data treatment, uncertainty.

1.1. Đại lượng, đơn vị và thứ nguyên — Quantities, units and dimensions

Quy ước ký hiệu dùng suốt sách: Δx là sai số tuyệt đối của x , $\varepsilon_x = \Delta x/|x|$ là sai số tương đối, $\bar{x}$ là giá trị trung bình. Chỉ số của các lực và năng lượng viết theo tiếng của từng ngôn ngữ: F_{ms} (tiếng Việt) và F_{fr} (tiếng Anh) cho lực ma sát, W_d và K cho động năng, W_t và U cho thế năng. Gia tốc rơi tự do lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ nếu đề không cho khác.

Notation used throughout the book: Δx is the absolute uncertainty of x , $\varepsilon_x = \Delta x/|x|$ is the relative uncertainty, $\bar{x}$ is the mean value. Subscripts on forces and energies follow each language: F_{ms} in Vietnamese and F_{fr} in English for friction, W_d and K for kinetic energy, W_t and U for potential energy. The free-fall acceleration is taken as $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ unless the problem says otherwise.

ĐỊNH NGHĨA 1.1 (Đại lượng và đơn vị SI) / DEFINITION 1.1 (Quantity and SI unit) —

Đại lượng vật lí là tính chất của một hiện tượng hay một vật mà ta đo được, kết quả đo viết bằng một số nhân với một đơn vị. Đơn vị SI cơ bản dùng trong cơ học là mét (m), kilôgam (kg), giây (s). Mọi đơn vị cơ học khác là tích hay thương của ba đơn vị này: newton $N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, joule $J = N \cdot \text{m}$, watt $W = J/s$, pascal $\text{Pa} = N/\text{m}^2$.

A physical quantity is a property of a phenomenon or a body that can be measured; a result is written as a number times a unit. The SI base units used in mechanics are the metre (m), the kilogram (kg)

and the second (s). Every other mechanical unit is a product or quotient of these three: newton $N = \text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$, joule $J = N\cdot\text{m}$, watt $W = J/\text{s}$, pascal $\text{Pa} = N/\text{m}^2$.

ĐỊNH NGHĨA 1.2 (Thứ nguyên) / DEFINITION 1.2 (Dimension) — Thứ nguyên của một đại lượng x , ký hiệu $[x]$, là tích các lũy thừa của khối lượng M , chiều dài L , thời gian T cho biết x được tạo từ ba đại lượng cơ bản nào. Chẳng hạn $[v] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$, $[F] = MLT^{-2}$, $[E] = ML^2T^{-2}$. Đại lượng có $[x] = 1$ (mọi lũy thừa bằng 0) gọi là không thứ nguyên: góc, tỉ số hai độ dài, hệ số ma sát μ .

The dimension of a quantity x , written $[x]$, is the product of powers of mass M , length L and time T that shows how x is built from the three base quantities. For example $[v] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$, $[F] = MLT^{-2}$, $[E] = ML^2T^{-2}$. A quantity with $[x] = 1$ (all powers zero) is dimensionless: an angle, a ratio of two lengths, the friction coefficient μ .

TÍNH CHẤT 1.3 / PROPERTY 1.3 — Nguyên tắc đồng nhất thứ nguyên. Hai vế của một đẳng thức vật lí có cùng thứ nguyên. Chỉ cộng, trừ, so sánh các đại lượng cùng thứ nguyên. Đối số của $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\lg$, $\ln$, e^x là số không thứ nguyên.

Principle of dimensional homogeneity. Both sides of a physical equation have the same dimension. Only quantities of the same dimension are added, subtracted or compared. The argument of $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\lg$, $\ln$ or e^x is a dimensionless number.

Nguyên tắc này đúng vì đơn vị đo có thể chọn tùy ý: nếu đổi mét thành centimét mà một đẳng thức bị sai thì đẳng thức ấy không mô tả quy luật của tự nhiên. Thứ nguyên chỉ ra công thức sai, không chứng nhận công thức đúng: hệ số số học (2, 1/2, π) và sự khác nhau giữa $\sin$ và $\cos$ không nằm trong thứ nguyên.

The principle holds because the choice of unit is arbitrary: if an equation fails when metres are replaced by centimetres, it cannot describe a law of nature. Dimensions expose a wrong formula but do not certify a right one: numerical factors (2, 1/2, π) and the difference between $\sin$ and $\cos$ are invisible to them.

Đại lượng <i>Quantity</i>	Thứ nguyên <i>Dimension</i>	Đơn vị SI <i>SI unit</i>
Vận tốc, tốc độ <i>Velocity, speed</i>	LT^{-1}	m/s
Gia tốc <i>Acceleration</i>	LT^{-2}	m/s^2
Lực, trọng lượng <i>Force, weight</i>	MLT^{-2}	$N = \text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$
Công, năng lượng, moment lực <i>Work, energy, torque</i>	ML^2T^{-2}	$J = N\cdot\text{m}$
Công suất <i>Power</i>	ML^2T^{-3}	$W = J/\text{s}$
Áp suất, ứng suất <i>Pressure, stress</i>	$ML^{-1}T^{-2}$	$\text{Pa} = N/\text{m}^2$
Khối lượng riêng <i>Density</i>	ML^{-3}	kg/m^3

Đại lượng <i>Quantity</i>	Thứ nguyên <i>Dimension</i>	Đơn vị SI <i>SI unit</i>
Động lượng, xung lượng <i>Momentum, impulse</i>	MLT^{-1}	$kg \cdot m/s$
Tần số, tốc độ góc <i>Frequency, angular speed</i>	T^{-1}	$Hz = s^{-1}, rad/s$
Hằng số hấp dẫn G <i>Gravitational constant G</i>	$M^{-1}L^3T^{-2}$	$N \cdot m^2/kg^2$
Hệ số căng bề mặt σ <i>Surface tension σ</i>	MT^{-2}	N/m
Độ nhớt η <i>Dynamic viscosity η</i>	$ML^{-1}T^{-1}$	$Pa \cdot s$

Tiền tố hay dùng khi đổi đơn vị: nano (n) 10^{-9} , micro (μ) 10^{-6} , milli (m) 10^{-3} , kilo (k) 10^3 , mega (M) 10^6 , giga (G) 10^9 . Khi đổi đơn vị của đại lượng có lũy thừa, lũy thừa áp cho cả hệ số đổi: $1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$.

Prefixes met most often: nano (n) 10^{-9} , micro (μ) 10^{-6} , milli (m) 10^{-3} , kilo (k) 10^3 , mega (M) 10^6 , giga (G) 10^9 . When a quantity carries a power, the power applies to the conversion factor too: $1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Công thức cho sẵn dạng chữ: viết thứ nguyên của từng số hạng, thay ngay vào bảng trên, rồi so hai vế. Số hạng nào lệch lũy thừa của L hay T là số hạng sai hoặc thiếu một đại lượng.

A formula given in letters: write the dimension of each term from the table above and compare both sides. A term whose power of L or T differs is wrong or is missing a quantity.

VÍ DỤ 1.1 (Loại công thức sai bằng thứ nguyên) / EXAMPLE 1.1 (Rejecting a wrong formula by dimensions) — Thời gian t để một vật bắt đầu từ nghỉ trượt hết đoạn dốc dài s , nghiêng góc α , hệ số ma sát trượt μ , được một học sinh nhớ theo ba cách: (a) $t = \sqrt{2s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))}$; (b) $t = 2s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))$; (c) $t = \sqrt{2sg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$. Cách nào có thể đúng về thứ nguyên? Có thể kết luận cách đó đúng không?

The time t for a body starting from rest to slide down a slope of length s , inclined at angle α , with sliding friction coefficient μ , is remembered by a student in three ways: (a) $t = \sqrt{2s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))}$; (b) $t = 2s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))$; (c) $t = \sqrt{2sg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$. Which can be right dimensionally? Does that make it right?

Lời giải. / Solution.

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, μ không thứ nguyên, nên thừa số $g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ có thứ nguyên của g , tức LT^{-2} . Cần $[t] = T$.

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$ and μ are dimensionless, so $g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ has the dimension of g , LT^{-2} . We need $[t] = T$.

1. Cách (a): $[s/g] = L/(LT^{-2}) = T^2$, lấy căn được T . Đúng thứ nguyên.

Form (a): $[s/g] = L/(LT^{-2}) = T^2$, its root is T . Dimensionally correct.

2. Cách (b): $[s/g] = T^2$, không có căn nên cho T^2 . Sai.

Form (b): $[s/g] = T^2$ with no root, giving T^2 . Wrong.

3. Cách (c): $[sg] = L \cdot LT^{-2} = L^2T^{-2}$, căn là LT^{-1} (một vận tốc). Sai.

Form (c): $[sg] = L \cdot LT^{-2} = L^2T^{-2}$, its root is LT^{-1} (a speed). Wrong.

Vậy chỉ (a) qua được phép kiểm. Thử nguyên không phân biệt (a) với $t = \sqrt{s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))}$ hay với $t = \sqrt{2s/(g(\cos \alpha - \mu \sin \alpha))}$, nên (a) còn phải kiểm bằng cách khác: với $\mu = 0$, $\alpha = 90^\circ$ nó cho $t = \sqrt{2s/g}$, đúng công thức rơi tự do.

Hence only (a) passes. Dimensions cannot tell (a) from $t = \sqrt{s/(g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha))}$ or from $t = \sqrt{2s/(g(\cos \alpha - \mu \sin \alpha))}$, so (a) needs another test: for $\mu = 0$, $\alpha = 90^\circ$ it gives $t = \sqrt{2s/g}$, the free-fall formula. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thấy hai vế cùng thứ nguyên rồi kết luận công thức đúng. Thứ nguyên chỉ loại được công thức sai: thiếu hệ số 2 hay nhầm sin với cos vẫn qua.

Seeing equal dimensions on both sides and declaring the formula right. Dimensions can only reject a wrong formula: a missing factor 2 or sin mistaken for cos still passes.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đổi đơn vị mà quên bình phương: 1 cm^2 bằng 10^{-4} m^2 , không phải 10^{-2} m^2 . 36 km/h bằng 10 m/s , không phải 36 m/s hay $3,6 \text{ m/s}$.

Converting units without squaring: 1 cm^2 is 10^{-4} m^2 , not 10^{-2} m^2 . 36 km/h is 10 m/s , not 36 m/s or 3.6 m/s .

1.2. Phân tích thứ nguyên: tìm dạng của định luật — Dimensional analysis: finding the form of a law

Khi biết đại lượng cần tìm phụ thuộc vào những đại lượng nào, thứ nguyên thường đủ để suy ra dạng công thức. Phương pháp gồm bốn bước: liệt kê các đại lượng ảnh hưởng, viết $y = C \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$ với C không thứ nguyên, cân bằng lũy thừa của M, L, T hai vế, giải hệ.

When the quantities that a result depends on are known, dimensions are often enough to fix the form of the formula. The method has four steps: list the relevant quantities, write $y = C \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$ with C dimensionless, equate the powers of M, L, T on both sides, solve the system.

TÍNH CHẤT 1.4 (Phân tích thứ nguyên) / PROPERTY 1.4 (Dimensional analysis) —

Nếu đại lượng y chỉ phụ thuộc vào x_1, x_2, x_3 và quan hệ có dạng tích lũy thừa $y = C \cdot x_1^p x_2^q x_3^r$, thì các lũy thừa p, q, r được xác định bởi ba phương trình (một cho mỗi M, L, T), còn C là hằng số không thứ nguyên mà thứ nguyên không cho biết. Khi có nhiều hơn ba đại lượng độc lập, hệ thiếu phương trình: phải ghép các đại lượng thành tổ hợp không thứ nguyên, và y phụ thuộc vào các tổ hợp đó qua một hàm chưa biết.

If a quantity y depends only on x_1, x_2, x_3 and the relation is a product of powers $y = C \cdot x_1^p x_2^q x_3^r$, then the powers p, q, r are fixed by three equations (one each for M, L, T), while C is a dimensionless constant that dimensions cannot supply. With more than three independent quantities the system is short of equations: the quantities must be grouped into dimensionless combinations, and y depends on them through an unknown function.

Việc chọn đúng danh sách đại lượng là phần vật lí của bài toán. Thiếu một đại lượng thì công thức sai; thừa một đại lượng thì lũy thừa của nó tự ra bằng 0 hoặc hệ vô nghiệm, đó cũng là cách phát hiện đại lượng thừa.

Choosing the list of quantities is the physics of the problem. Omit one and the formula is wrong; include an extra one and its power comes out zero or the system has no solution, which is also how a superfluous quantity is detected.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Con lắc đơn: chu kỳ có thể phụ thuộc chiều dài dây ℓ , khối lượng quả nặng m , gia tốc rơi tự do g , biên độ góc θ_0 . Biên độ góc không thứ nguyên, nên nó chỉ vào hệ số C , không vào lũy thừa. Chỉ m có chứa M : nếu m có mặt thì phương trình của M buộc lũy thừa của m bằng 0.

Simple pendulum: the period may depend on the string length ℓ , the bob mass m , the free-fall acceleration g and the angular amplitude θ_0 . The amplitude is dimensionless, so it enters the constant C , not a power. Only m contains M : if m is present, the M equation forces its power to be zero.

VÍ DỤ 1.2 (Phân tích thứ nguyên cơ bản) / EXAMPLE 1.2 (Basic dimensional analysis)

— Tìm dạng công thức chu kỳ T của con lắc đơn có dây dài ℓ , quả nặng khối lượng m , tại nơi có gia tốc rơi tự do g , dao động với biên độ nhỏ.

Find the form of the period T of a simple pendulum with string length ℓ and bob mass m , where the free-fall acceleration is g , oscillating with small amplitude.

Lời giải. / Solution.

Đặt $T = C \cdot \ell^p \cdot m^q \cdot g^r$. Thứ nguyên: $T = L^p \cdot M^q \cdot (LT^{-2})^r$.

Set $T = C \cdot \ell^p \cdot m^q \cdot g^r$. Dimensions: $T = L^p \cdot M^q \cdot (LT^{-2})^r$.

1. Lũy thừa của M : $0 = q$, nên $q = 0$. Khối lượng không có mặt.

Power of M : $0 = q$, so $q = 0$. The mass drops out.

2. Lũy thừa của T : $1 = -2r$, nên $r = -1/2$.

Power of T : $1 = -2r$, so $r = -1/2$.

3. Lũy thừa của L : $0 = p + r$, nên $p = 1/2$.

Power of L : $0 = p + r$, so $p = 1/2$.

$$T = C\sqrt{\ell/g} \quad (1.1)$$

Vậy chu kỳ tỉ lệ với căn bậc hai của chiều dài, không phụ thuộc khối lượng; hằng số C không thứ nguyên và thứ nguyên không xác định được nó (ở biên độ nhỏ $C = 2\pi$, chương Thực nghiệm và bài toán tổng hợp chỉ phát biểu).

Hence the period is proportional to the square root of the length and independent of the mass; C is dimensionless and dimensions cannot fix it (for small amplitude $C = 2\pi$, which the chapter on experiments and synthesis problems only quotes). ■

NHẬN XÉT / REMARK — Hằng số C có thể tìm bằng một lần đo: đo T tại một ℓ , tính $C = T\sqrt{g/\ell}$, rồi dùng cho mọi ℓ khác. Đây là cách dùng phân tích thứ nguyên để chuyển một thí nghiệm thành một dự đoán, như ở ví dụ 1.14.

The constant C can be found from one measurement: measure T at one ℓ , compute $C = T\sqrt{g/\ell}$, then

use it for every other ℓ . This is how dimensional analysis turns one experiment into a prediction, as in example 1.14.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Lực cản của không khí lên vật chuyển động nhanh phụ thuộc mật độ không khí ρ , diện tích mặt cắt ngang S , tốc độ v . Lực có M mà chỉ ρ mang M , nên lũy thừa của ρ phải là 1. Sau đó chỉ còn L và T để định S và v .

The air drag on a fast body depends on the air density ρ , the cross-sectional area S and the speed v . Force contains M and only ρ carries M , so the power of ρ must be 1. Only L and T then remain to fix S and v .

VÍ DỤ 1.3 (Hằng số không thứ nguyên cho trước) / EXAMPLE 1.3 (A given dimensionless constant)

— Lực cản F của không khí lên vật chuyển động nhanh phụ thuộc vào khối lượng riêng ρ của không khí, diện tích mặt cắt ngang S của vật và tốc độ v . Tìm dạng của F . Từ đó ước lượng tốc độ rơi ổn định của một giọt mưa bán kính 1,0 mm, biết hằng số không thứ nguyên của công thức là 0,25 và $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$.

The drag F of air on a fast body depends on the air density ρ , the body's cross-sectional area S and its speed v . Find the form of F . Then estimate the steady fall speed of a raindrop of radius 1.0 mm, given that the dimensionless constant of the formula is 0.25 and $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

Lời giải. / Solution.

Đặt $F = C \cdot \rho^a \cdot S^b \cdot v^c$; $[F] = \text{MLT}^{-2}$, $[\rho] = \text{ML}^{-3}$, $[S] = \text{L}^2$, $[v] = \text{LT}^{-1}$.

Set $F = C \cdot \rho^a \cdot S^b \cdot v^c$; $[F] = \text{MLT}^{-2}$, $[\rho] = \text{ML}^{-3}$, $[S] = \text{L}^2$, $[v] = \text{LT}^{-1}$.

1. M : $1 = a$. T : $-2 = -c$, nên $c = 2$. L : $1 = -3a + 2b + c = -3 + 2b + 2$, nên $b = 1$.

M : $1 = a$. T : $-2 = -c$, so $c = 2$. L : $1 = -3a + 2b + c = -3 + 2b + 2$, so $b = 1$.

$$F = C\rho S v^2 \quad (1.2)$$

Giọt mưa ổn định khi lực cản cân bằng trọng lực: $C\rho S v^2 = mg$. Khối lượng $m = (4/3)\pi r^3 \rho_n$ với $\rho_n = 1000 \text{ kg/m}^3$, diện tích $S = \pi r^2$. Với $r = 1,0 \text{ mm}$: $m \approx 4,19 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$, $S \approx 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

The drop is steady when drag balances weight: $C\rho S v^2 = mg$. The mass is $m = (4/3)\pi r^3 \rho_w$ with $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ and $S = \pi r^2$. For $r = 1.0 \text{ mm}$: $m \approx 4.19 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$, $S \approx 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

$$v = \sqrt{(mg/(C\rho S))}$$

Vậy $v \approx 6,6 \text{ m/s}$. Gấp đôi bán kính thì m tăng 8 lần, S tăng 4 lần, v tăng $\sqrt{2}$ lần, tức khoảng 9,3 m/s.

Hence $v \approx 6.6 \text{ m/s}$. Doubling the radius multiplies m by 8 and S by 4, so v grows by $\sqrt{2}$, to about 9.3 m/s. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho đại lượng thừa vào danh sách (ví dụ khối lượng quả nặng trong chu kỳ con lắc) rồi cố giữ lũy thừa khác 0. Hệ phương trình sẽ tự buộc nó bằng 0; nếu hệ vô nghiệm thì danh sách đại lượng đã sai.

Putting a superfluous quantity in the list (the bob mass in the pendulum period) and trying to keep its power nonzero. The system forces it to zero; if the system has no solution, the list of quantities is wrong.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên rằng hằng số C của phân tích thứ nguyên không do thứ nguyên quyết định: kết quả $T = C\sqrt{\ell/g}$ không cho biết T bằng bao nhiêu giây nếu chưa có một phép đo hay một lí thuyết cho C .

Forgetting that the constant C is not fixed by dimensions: $T = C\sqrt{\ell/g}$ does not give T in seconds until a measurement or a theory supplies C .

1.3. Ước lượng bậc độ lớn — Order-of-magnitude estimation

ĐỊNH NGHĨA 1.5 (Bậc độ lớn) / DEFINITION 1.5 (Order of magnitude) — Bậc độ lớn của số dương x là số mũ nguyên n sao cho 10^n gần x nhất theo thang lôgarit, tức n là số nguyên gần nhất với $\lg x$. Hai đại lượng cùng bậc độ lớn khi tỉ số của chúng nằm trong khoảng từ $1/3$ đến 3 (xấp xỉ $\sqrt{10}$). Ước lượng Fermi là tính một đại lượng chưa biết từ vài số liệu quen thuộc, mỗi số làm tròn đến bậc độ lớn hay một chữ số có nghĩa.

The order of magnitude of a positive number x is the integer n such that 10^n is nearest to x on a logarithmic scale, that is, the integer nearest to $\lg x$. Two quantities have the same order of magnitude when their ratio lies between $1/3$ and 3 (about $\sqrt{10}$). A Fermi estimate computes an unknown quantity from a few familiar numbers, each rounded to an order of magnitude or to one significant figure.

Một ước lượng Fermi là tích và thương của nhiều thừa số, nên sai số tương đối của kết quả là tổng các sai số tương đối của từng thừa số (mục 1.5). Sai lệch hai lần ở thừa số này thường bù một phần cho sai lệch ở thừa số khác, nên kết quả cuối thường đúng trong khoảng ba lần. Thừa số có lũy thừa cao (bán kính, vận tốc bình phương) cần ước lượng cẩn thận nhất.

A Fermi estimate is a product and quotient of several factors, so the relative uncertainty of the result is the sum of the relative uncertainties of the factors (section 1.5). A factor-of-two miss in one factor often partly cancels a miss in another, so the final result is usually right within a factor of three. Factors with high powers (a radius, a squared speed) deserve the most care.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Tim đập đều, tuổi thọ vài chục năm: đổi mọi thời gian ra giây hay ra phút theo cùng một đơn vị, nhân từng thừa số, giữ lại lũy thừa của 10 riêng khỏi phần thập phân để dễ kiểm.

A steady heartbeat over a lifetime of several decades: convert all times to the same unit, multiply factor by factor, and keep the power of ten apart from the decimal part so that the result is easy to check.

VÍ DỤ 1.4 (Chuỗi thừa số trong ước lượng Fermi) / EXAMPLE 1.4 (A chain of factors in a Fermi estimate) — Ước lượng số lần tim đập trong đời một người sống 75 năm, nhịp tim lúc nghỉ 70 lần/phút. Mỗi lần tim bơm khoảng 70 mL máu: tổng thể tích máu bơm trong đời bằng bao nhiêu lần thể tích một bể bơi $50\text{ m} \times 25\text{ m} \times 2\text{ m}$?

Estimate the number of heartbeats in the life of a person who lives 75 years with a resting rate of 70 beats per minute. Each beat pumps about 70 mL of blood: how many times the volume of a $50\text{ m} \times 25\text{ m} \times 2\text{ m}$ swimming pool is pumped in a lifetime?

Lời giải. / Solution.

Số phút trong một năm: $60 \cdot 24 \cdot 365 = 525\,600 \approx 5,3 \cdot 10^5$.

Minutes in a year: $60 \cdot 24 \cdot 365 = 525,600 \approx 5.3 \cdot 10^5$.

$$N = 70 \cdot 525600 \cdot 75 \approx 28 \cdot 10^8$$

Bậc độ lớn là 10^9 ($\lg N \approx 9,44$). Lượng máu: $2,8 \cdot 10^9 \cdot 70 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 1,93 \cdot 10^5 \text{ m}^3$.

The order of magnitude is 10^9 ($\lg N \approx 9.44$). The blood volume is $2.8 \cdot 10^9 \cdot 70 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 1.93 \cdot 10^5 \text{ m}^3$.

Bể bơi chứa $50 \cdot 25 \cdot 2 = 2500 \text{ m}^3$, nên tỉ số khoảng 77.

The pool holds $50 \cdot 25 \cdot 2 = 2500 \text{ m}^3$, so the ratio is about 77.

Vậy tim đập cỡ $3 \cdot 10^9$ lần, và lượng máu bơm trong đời cỡ 80 bể bơi. Nhịp 60 hay 80 lần/phút chỉ thay kết quả dưới 20%, nhỏ hơn mức bất định của số năm sống.

Hence the heart beats about $3 \cdot 10^9$ times, and the blood pumped in a lifetime is about 80 pools. A rate of 60 or 80 beats per minute changes the result by under 20%, less than the uncertainty in the lifespan. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Tính ngược cũng là một kiểm tra: tim bơm 70 mL mỗi lần và 70 lần mỗi phút cho 4,9 L/phút, đúng cỡ lưu lượng máu thật khi nghỉ. Một ước lượng có số liệu đầu vào sai thường lộ ra khi đối chiếu với một đại lượng khác mà ta biết.

Working backwards is also a check: 70 mL per beat at 70 beats per minute is 4.9 L/min, the right scale for resting blood flow. An estimate with a wrong input often shows itself when compared with another quantity one already knows.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Làm tròn sớm từng bước rồi nhân: làm tròn 1,4 lên 2 ở ba thừa số liên tiếp sai tới 2,9 lần. Giữ hai chữ số đến bước cuối, làm tròn một lần.

Rounding at every step before multiplying: rounding 1.4 up to 2 in three successive factors is off by 2.9 times. Keep two figures until the last step and round once.

Đại lượng <i>Quantity</i>	Giá trị thường dùng <i>Typical value</i>
Bán kính nguyên tử <i>Atomic radius</i>	10^{-10} m
Bước chân người lớn <i>Adult step length</i>	0,7 m <i>0.7 m</i>
Khối lượng riêng nước, không khí <i>Density of water, air</i>	10^3 kg/m^3 , $1,2 \text{ kg/m}^3$ <i>10^3 kg/m^3, 1.2 kg/m^3</i>
Áp suất khí quyển <i>Atmospheric pressure</i>	$1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ <i>$1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$</i>
Bán kính Trái Đất <i>Radius of the Earth</i>	$6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ <i>$6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$</i>
Khoảng cách Trái Đất đến Mặt Trăng <i>Earth to Moon distance</i>	$3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$ <i>$3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$</i>
Một năm <i>One year</i>	$3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$ <i>$3.2 \cdot 10^7 \text{ s}$</i>

Đại lượng <i>Quantity</i>	Giá trị thường dùng <i>Typical value</i>
Công suất làm việc của người <i>Sustained power of a person</i>	100 W

1.4. Phép đo, chữ số có nghĩa và sai số — *Measurement, significant figures and uncertainty*

ĐỊNH NGHĨA 1.6 (Chữ số có nghĩa) / DEFINITION 1.6 (Significant figures) — Chữ số có nghĩa của một kết quả đo là các chữ số đáng tin, kể từ chữ số khác 0 đầu tiên bên trái đến chữ số bất định cuối cùng. Số 0 đứng đầu không tính (0,0250 có 3 chữ số có nghĩa); số 0 ở cuối sau dấu phẩy tính (2,50 có 3). Khi nhân, chia: kết quả giữ số chữ số có nghĩa bằng thừa số có ít chữ số nhất. Khi cộng, trừ: kết quả giữ số chữ số thập phân bằng số hạng có ít chữ số thập phân nhất.

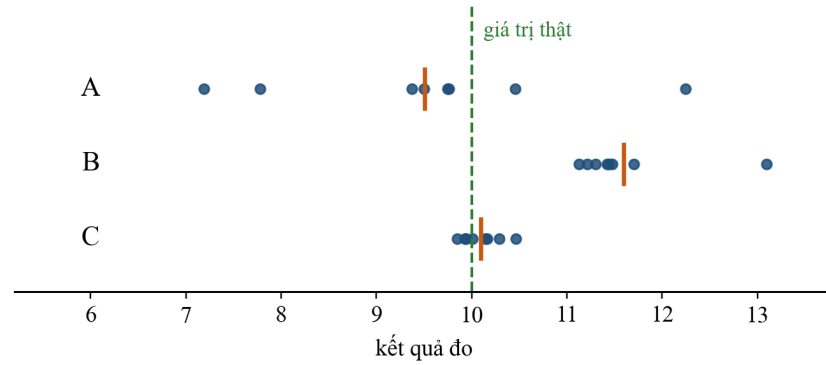
The significant figures of a measured result are the trustworthy digits, from the first nonzero digit on the left to the last uncertain digit. Leading zeros do not count (0.0250 has 3 significant figures); trailing zeros after the decimal point do (2.50 has 3). In multiplication and division the result keeps as many significant figures as the factor with the fewest. In addition and subtraction it keeps as many decimal places as the term with the fewest.

ĐỊNH NGHĨA 1.7 (Sai số tuyệt đối và tương đối) / DEFINITION 1.7 (Absolute and relative uncertainty) — Nếu đại lượng x đo được giá trị trung bình $\bar{x}$ và sai số tuyệt đối Δx thì kết quả viết $x = \bar{x} \pm \Delta x$, nghĩa là giá trị thật nằm trong khoảng từ $\bar{x} - \Delta x$ đến $\bar{x} + \Delta x$. Sai số tương đối $\epsilon_x = \Delta x / |\bar{x}|$, thường viết bằng phần trăm. Quy ước ghi: Δx làm tròn đến một chữ số có nghĩa (hai chữ số nếu chữ số đầu là 1), $\bar{x}$ làm tròn đến cùng hàng thập phân với Δx .

If the quantity x has mean $\bar{x}$ and absolute uncertainty Δx , the result is written $x = \bar{x} \pm \Delta x$, meaning the true value lies between $\bar{x} - \Delta x$ and $\bar{x} + \Delta x$. The relative uncertainty is $\epsilon_x = \Delta x / |\bar{x}|$, often given as a percentage. Convention: round Δx to one significant figure (two if the first digit is 1) and round $\bar{x}$ to the same decimal place as Δx .

ĐỊNH NGHĨA 1.8 (Sai số ngẫu nhiên, hệ thống, dụng cụ) / DEFINITION 1.8 (Random, systematic and instrument errors) — Sai số ngẫu nhiên làm các lần đo lặp lại rải quanh một giá trị, lệch về hai phía, và giảm khi lấy trung bình nhiều lần (phản ứng bấm đồng hồ, dao động của kim). Sai số hệ thống làm mọi lần đo lệch cùng một phía với cùng một độ lớn (thước giãn, đồng hồ chạy nhanh, bỏ sót bán kính quả cầu khi đo chiều dài con lắc); lấy trung bình không loại được nó. Sai số dụng cụ lấy bằng nửa độ chia nhỏ nhất của dụng cụ, hoặc bằng độ chính xác ghi trên dụng cụ.

A random error scatters repeated readings about a value, on both sides, and shrinks when many readings are averaged (reaction in timing, a flickering needle). A systematic error shifts every reading the same way by the same amount (a stretched ruler, a fast clock, forgetting the bob radius when measuring a pendulum length); averaging does not remove it. The instrument error is taken as half the smallest division, or the accuracy printed on the instrument.



Hình 1.1. Tám lần đo của một đại lượng có giá trị thật 10 (đường nét đứt); vạch cam là trung bình. A: ngẫu nhiên lớn, hệ thống nhỏ. B: ngẫu nhiên nhỏ, lệch hệ thống. C: cả hai đều nhỏ.

Figure 1.1. Eight measurements of a quantity whose true value is 10 (dashed line); the orange tick is the mean. A: large random, small systematic error. B: small random error, systematic shift. C: both small.

ĐỊNH NGHĨA 1.9 (Trung bình và độ lệch) / DEFINITION 1.9 (Mean and deviation) —

Với n lần đo $x_1, \dots, x_n$: giá trị trung bình $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$. Độ lệch trung bình $\Delta x_{ng} = (|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|)/n$. Độ lệch chuẩn mẫu $s = \sqrt{(\sum (x_i - \bar{x})^2)/(n - 1)}$; sai số chuẩn của trung bình $s/\sqrt{n}$. Sai số tuyệt đối toàn phần theo quy ước thi học sinh giỏi: $\Delta x = \Delta x_{ng} + \Delta x_{dc}$, với Δx_{dc} là sai số dụng cụ.

For n readings $x_1, \dots, x_n$: the mean is $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$. The mean deviation is $\Delta x_r = (|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|)/n$. The sample standard deviation is $s = \sqrt{(\sum (x_i - \bar{x})^2)/(n - 1)}$; the standard error of the mean is $s/\sqrt{n}$. The total absolute uncertainty in the usual olympiad convention is $\Delta x = \Delta x_r + \Delta x_{in}$, where Δx_{in} is the instrument error.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Năm số đọc đồng hồ bấm giây có độ chia 0,01 s. Tính trung bình trước, lấy từng độ lệch, rồi cộng sai số dụng cụ. Kết quả cuối viết đúng quy ước làm tròn.

Five stopwatch readings with a 0.01 s division. Compute the mean first, take each deviation, then add the instrument error. Write the final result in the rounding convention.

VÍ DỤ 1.5 (Viết kết quả đo đúng quy ước) / EXAMPLE 1.5 (Writing a measured result correctly) —

Năm lần đo thời gian một chuyển động, đồng hồ bấm giây có độ chia nhỏ nhất 0,01 s, cho: 2,31; 2,28; 2,35; 2,30; 2,33 (s). Viết kết quả $t = \bar{t} \pm \Delta t$ và nêu độ lệch chuẩn mẫu cùng sai số chuẩn của trung bình.

Five timings of a motion with a stopwatch of smallest division 0.01 s give: 2.31, 2.28, 2.35, 2.30, 2.33 (s). Write the result $t = \bar{t} \pm \Delta t$ and give the sample standard deviation and the standard error of the mean.

Lời giải. / Solution.

Trung bình $\bar{t} = 2,314$ s. Các độ lệch tuyệt đối: 0,004; 0,034; 0,036; 0,014; 0,016 (s), trung bình 0,021 s.

The mean is $\bar{t} = 2.314$ s. The absolute deviations are 0.004, 0.034, 0.036, 0.014, 0.016 (s), averaging 0.021 s.

Sai số dụng cụ lấy bằng độ chia nhỏ nhất, 0,01 s. Tổng: $\Delta t = 0,021 + 0,01 = 0,031$ s, làm tròn thành 0,03 s.

The instrument error is the smallest division, 0.01 s. Total: $\Delta t = 0.021 + 0.01 = 0.031$ s, rounded to 0.03 s.

Độ lệch chuẩn mẫu $s = 0,027$ s; sai số chuẩn $s/\sqrt{5} = 0,012$ s.

The sample standard deviation is $s = 0.027$ s; the standard error is $s/\sqrt{5} = 0.012$ s.

Vậy $t = 2,31 \pm 0,03$ s ($\epsilon \approx 1,3\%$). Viết $2,314 \pm 0,03$ là sai quy ước vì chữ số thứ ba sau dấu phẩy nằm sau chữ số bất định.

Hence $t = 2.31 \pm 0.03$ s ($\epsilon \approx 1.3\%$). Writing 2.314 ± 0.03 breaks the convention because the third decimal lies beyond the uncertain digit. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Sai số dụng cụ và độ lệch ngẫu nhiên cộng với nhau. Nếu năm lần đo trùng nhau hết (độ lệch 0), sai số vẫn bằng sai số dụng cụ, không bằng 0.

The instrument error and the random deviation add together. If five readings coincide (deviation 0), the uncertainty is still the instrument error, not 0.

NHẬN XÉT / REMARK — Độ lệch chuẩn s mô tả độ rải của từng lần đo và không giảm khi đo thêm; sai số chuẩn $s/\sqrt{n}$ mô tả độ tin cậy của trung bình và giảm theo $\sqrt{n}$. Đo thêm 4 lần để giảm một nửa sai số ngẫu nhiên của trung bình, nhưng không đụng tới sai số hệ thống.

The standard deviation s describes the scatter of single readings and does not shrink with more readings; the standard error $s/\sqrt{n}$ describes the reliability of the mean and shrinks as $\sqrt{n}$. Four times as many readings halve the random error of the mean but leave the systematic error untouched.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Ghi kết quả thừa chữ số: $t = 2,3140 \pm 0,03$ s. Chữ số cuối của giá trị phải cùng hàng thập phân với chữ số cuối của sai số.

Quoting surplus digits: $t = 2.3140 \pm 0.03$ s. The last digit of the value must sit in the same decimal place as the last digit of the uncertainty.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tưởng đo nhiều lần thì loại được mọi sai số. Một thước bị lệch vạch 0 cho cùng một độ lệch ở mọi lần đo: trung bình của chúng vẫn lệch.

Believing that many readings remove every error. A ruler with a shifted zero gives the same offset in every reading: their mean is still offset.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Cộng, trừ: sai số tuyệt đối cộng lại. Nhân, chia: sai số tương đối cộng lại. Lũy thừa n : sai số tương đối nhân với $|n|$.

Sum, difference: absolute uncertainties add. Product, quotient: relative uncertainties add. Power n : the relative uncertainty is multiplied by $|n|$.

1.5. Truyền sai số — Propagation of uncertainty

Đại lượng gián tiếp y tính từ các đại lượng đo trực tiếp $x_1, x_2, \dots$. Sai số của y lấy theo trường hợp xấu nhất: mọi sai số cùng đẩy y về một phía. Cách này cho sai số lớn hơn mức thống kê nhưng đơn giản và an toàn, là cách được dùng trong đề thi.

An indirect quantity y is computed from directly measured quantities $x_1, x_2, \dots$. The uncertainty of y is taken for the worst case: every error pushes y the same way. This gives a larger uncertainty than the statistical one but is simple and safe, and is the method used in olympiad papers.

ĐỊNH LÝ 1.10 (Truyền sai số) / THEOREM 1.10 (Propagation of uncertainty) — Với $a \pm \Delta a$ và $b \pm \Delta b$: (1) $y = a \pm b$ có $\Delta y = \Delta a + \Delta b$. (2) $y = ab$ hoặc $y = a/b$ có $\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. (3) $y = a^n$ có $\varepsilon_y = |n| \cdot \varepsilon_a$, với ε_a nhỏ.
For $a \pm \Delta a$ and $b \pm \Delta b$: (1) $y = a \pm b$ has $\Delta y = \Delta a + \Delta b$. (2) $y = ab$ or $y = a/b$ has $\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. (3) $y = a^n$ has $\varepsilon_y = |n| \cdot \varepsilon_a$ for small ε_a .

Chứng minh. / Proof.

(1) Giá trị lớn nhất của $a + b$ là $(a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b)$; giá trị nhỏ nhất là $(a + b) - (\Delta a + \Delta b)$. Với $a - b$: lớn nhất là $(a + \Delta a) - (b - \Delta b) = (a - b) + (\Delta a + \Delta b)$. Vậy trong cả hai trường hợp $\Delta y = \Delta a + \Delta b$.

(1) The largest value of $a + b$ is $(a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b)$, the smallest is $(a + b) - (\Delta a + \Delta b)$. For $a - b$ the largest is $(a + \Delta a) - (b - \Delta b) = (a - b) + (\Delta a + \Delta b)$. So in both cases $\Delta y = \Delta a + \Delta b$.

(2) $(a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b) = ab(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_b)$. Tích $\varepsilon_a \varepsilon_b$ nhỏ hơn nhiều so với $\varepsilon_a + \varepsilon_b$ nên bỏ đi: $\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. Với thương: a/b lớn nhất là $a(1 + \varepsilon_a)/(b(1 - \varepsilon_b)) \approx (a/b)(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b)$, vì $1/(1 - \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon$ khi ε nhỏ.

(2) $(a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab(1 + \varepsilon_a)(1 + \varepsilon_b) = ab(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_b)$. The product $\varepsilon_a \varepsilon_b$ is far smaller than $\varepsilon_a + \varepsilon_b$ and is dropped: $\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b$. For the quotient the largest a/b is $a(1 + \varepsilon_a)/(b(1 - \varepsilon_b)) \approx (a/b)(1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b)$, since $1/(1 - \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon$ for small ε .

(3) Với n nguyên dương, a^n là tích của n thừa số a , mỗi thừa số có sai số tương đối ε_a , nên $\varepsilon_y = n\varepsilon_a$ theo (2). Với n âm, $1/a^{|n|}$ là thương nên $\varepsilon_y = |n|\varepsilon_a$. Với n không nguyên (như $1/2$ cho căn bậc hai), dùng $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ khi ε nhỏ (phát biểu, không chứng minh ở lớp 10).

(3) For positive integer n , a^n is a product of n factors a , each with relative uncertainty ε_a , so $\varepsilon_y = n\varepsilon_a$ by (2). For negative n , $1/a^{|n|}$ is a quotient so $\varepsilon_y = |n|\varepsilon_a$. For non-integer n (such as $1/2$ for a square root) use $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ for small ε (quoted, not proved at grade 10). ■

HỆ QUẢ 1.11 / COROLLARY 1.11 — Nếu $y = C \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$ thì $\varepsilon_y = |p|\varepsilon_1 + |q|\varepsilon_2 + |r|\varepsilon_3$, với ε_i là sai số tương đối của x_i . Hằng số chính xác C không đóng góp.
If $y = Cx_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$ then $\varepsilon_y = |p|\varepsilon_1 + |q|\varepsilon_2 + |r|\varepsilon_3$, where ε_i is the relative uncertainty of x_i . An exact constant C contributes nothing.

Chứng minh. / Proof.

Áp dụng liên tiếp (2) cho tích và (3) cho từng lũy thừa. Hằng số chính xác có sai số bằng 0.

Apply (2) to the product and (3) to each power in turn. An exact constant has zero uncertainty. ■

Khi các sai số độc lập và ngẫu nhiên, xác suất để tất cả cùng đẩy y về một phía nhỏ; sai số thống kê khi đó là căn của tổng bình phương: với $y = ab$, $\varepsilon_y = \sqrt{(\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2)}$ (phát biểu, không chứng minh). Con số này nhỏ hơn tổng ở trên; sách này và đề thi dùng tổng, trừ khi đề yêu cầu khác.

When the errors are independent and random, the chance that all push y the same way is small; the statistical uncertainty is then the root of the sum of squares: for $y = ab$, $\epsilon_y = \sqrt{(\epsilon_a^2 + \epsilon_b^2)}$ (quoted, not proved). It is smaller than the sum above; this book and olympiad papers use the sum unless told otherwise.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Khối lượng riêng của hình trụ $\rho = 4m/(\pi d^2 h)$: d xuất hiện bình phương. Trước khi tính, ước lượng sai số tương đối của m , d , h ; đại lượng có $|\text{lũy thừa}| \times$ sai số tương đối lớn nhất chi phối kết quả và là chỗ đáng cải thiện dụng cụ.
The density of a cylinder is $\rho = 4m/(\pi d^2 h)$ with d squared. Before computing, estimate the relative uncertainty of m , d , h ; the quantity with the largest $|\text{power}| \times \text{relative uncertainty}$ dominates the result and is where a better instrument pays off.

VÍ DỤ 1.6 (Đại lượng chi phối sai số) / EXAMPLE 1.6 (The dominant source of uncertainty) — Một hình trụ đồng chất: $m = 25,80 \text{ g} \pm 0,05 \text{ g}$, đường kính $d = 10,02 \text{ mm} \pm 0,02 \text{ mm}$, chiều cao $h = 38,50 \text{ mm} \pm 0,02 \text{ mm}$. Tính khối lượng riêng ρ và sai số. Đại lượng nào cần đo chính xác hơn?
A uniform cylinder: $m = 25.80 \text{ g} \pm 0.05 \text{ g}$, diameter $d = 10.02 \text{ mm} \pm 0.02 \text{ mm}$, height $h = 38.50 \text{ mm} \pm 0.02 \text{ mm}$. Find the density ρ and its uncertainty. Which quantity most needs a better measurement?

Lời giải. / Solution.

$$\rho = 4m/(\pi d^2 h) \quad (1.3)$$

Đổi $d = 1,002 \text{ cm}$, $h = 3,850 \text{ cm}$: $\rho = 4 \cdot 25,80/(\pi \cdot 1,002^2 \cdot 3,850) \approx 8,50 \text{ g/cm}^3$.

With $d = 1.002 \text{ cm}$ and $h = 3.850 \text{ cm}$: $\rho = 4 \cdot 25.80/(\pi \cdot 1.002^2 \cdot 3.850) \approx 8.50 \text{ g/cm}^3$.

1. Sai số tương đối: $\epsilon_m = 0,05/25,80 \approx 0,19\%$; $\epsilon_d = 0,02/10,02 \approx 0,20\%$, nhân lũy thừa 2 cho $0,40\%$; $\epsilon_h = 0,02/38,50 \approx 0,05\%$.

Relative uncertainties: $\epsilon_m = 0.05/25.80 \approx 0.19\%$; $\epsilon_d = 0.02/10.02 \approx 0.20\%$, times the power 2 gives 0.40% ; $\epsilon_h = 0.02/38.50 \approx 0.05\%$.

2. Cộng: $\epsilon_\rho = 0,19 + 0,40 + 0,05 \approx 0,64\%$, nên $\Delta\rho = 0,64\% \cdot 8,50 \approx 0,05 \text{ g/cm}^3$.

Add: $\epsilon_\rho = 0.19 + 0.40 + 0.05 \approx 0.64\%$, so $\Delta\rho = 0.64\% \cdot 8.50 \approx 0.05 \text{ g/cm}^3$.

Vậy $\rho = 8,50 \pm 0,05 \text{ g/cm}^3$. Đường kính chiếm khoảng 62% sai số toàn phần; thay thước kẹp bằng panme (độ chính xác 0,01 mm) giảm phần này một nửa. Nếu tính theo căn của tổng bình phương, $\epsilon_\rho \approx 0,45\%$.

Hence $\rho = 8.50 \pm 0.05 \text{ g/cm}^3$. The diameter supplies about 62% of the total uncertainty; a micrometer (accuracy 0.01 mm) in place of the calipers halves that share. With the root of the sum of squares, $\epsilon_\rho \approx 0.45\%$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Con lắc đơn đo g qua $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, tức $g = 4\pi^2\ell/T^2$. T nằm bình phương, nên sai số của T tính gấp đôi. Thời gian đo bằng đồng hồ bấm tay có sai số cố định cỡ 0,2 s bất kể số dao động: đo nhiều dao động làm sai số tương đối của T giảm.
A pendulum gives g through $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, that is $g = 4\pi^2\ell/T^2$. T is squared, so its uncertainty counts twice. A hand-held stopwatch has a fixed error of about 0.2 s whatever the number of swings: timing more swings reduces the relative uncertainty of T .

VÍ DỤ 1.7 (Chọn số dao động theo sai số yêu cầu) / EXAMPLE 1.7 (Choosing the number of oscillations from the required accuracy) — Đo con lắc đơn: $\ell = 0,850 \text{ m} \pm 0,001 \text{ m}$; thời gian 20 dao động toàn phần $t = 37,00 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s}$. (a) Tính g và sai số. (b) Cần ít nhất bao nhiêu dao động để $\varepsilon_g \leq 0,8\%$ nếu ℓ và sai số của t giữ nguyên? (c) Biên độ góc 5° gây sai lệch hệ thống bao nhiêu?

A simple pendulum: $\ell = 0.850 \text{ m} \pm 0.001 \text{ m}$; the time for 20 complete oscillations is $t = 37.00 \text{ s} \pm 0.2 \text{ s}$. (a) Find g and its uncertainty. (b) How many oscillations are needed at least for $\varepsilon_g \leq 0.8\%$ if ℓ and the error of t stay the same? (c) How large is the systematic effect of a 5° amplitude?

Lời giải. / Solution.

(a) $T = t/20 = 1,850 \text{ s}$. Từ $g = 4\pi^2\ell/T^2$:

(a) $T = t/20 = 1.850 \text{ s}$. From $g = 4\pi^2\ell/T^2$:

$$\varepsilon_g = \varepsilon_\ell + 2\varepsilon_T$$

$\varepsilon_\ell = 0,001/0,850 \approx 0,12\%$; $\varepsilon_T = \varepsilon_t = 0,2/37,00 \approx 0,54\%$ (chia cho 20 không đổi sai số tương đối). Do đó $\varepsilon_g \approx 1,20\%$, $g \approx 9,80 \text{ m/s}^2$, $\Delta g \approx 0,12 \text{ m/s}^2$.

$\varepsilon_\ell = 0.001/0.850 \approx 0.12\%$; $\varepsilon_T = \varepsilon_t = 0.2/37.00 \approx 0.54\%$ (dividing by 20 leaves the relative uncertainty unchanged). So $\varepsilon_g \approx 1.20\%$, $g \approx 9.80 \text{ m/s}^2$, $\Delta g \approx 0.12 \text{ m/s}^2$.

(b) Cần $2\varepsilon_t \leq 0,8\% - 0,12\%$, tức $\varepsilon_t \leq 0,34\%$. Vì Δt cố định $0,2 \text{ s}$ nên $t \geq 0,2/0,0034 \approx 58,6 \text{ s}$, tức $N \geq 58,6/1,850$, lấy $N = 32$ dao động.

(b) We need $2\varepsilon_t \leq 0.8\% - 0.12\%$, i.e. $\varepsilon_t \leq 0.34\%$. Since Δt is fixed at 0.2 s , $t \geq 0.2/0.0034 \approx 58.6 \text{ s}$, so $N \geq 58.6/1.850$, giving $N = 32$ oscillations.

(c) Với biên độ θ_0 , chu kỳ thật lớn hơn chu kỳ biên độ nhỏ khoảng $\theta_0^2/16$ (θ_0 tính bằng rad, phát biểu). Với $5^\circ = 0,0873 \text{ rad}$, độ lớn này bằng $0,048\%$, nhỏ hơn nhiều so với ε_T ở trên, nên bỏ qua được.

(c) For amplitude θ_0 the true period exceeds the small-amplitude period by about $\theta_0^2/16$ (θ_0 in rad, quoted). For $5^\circ = 0.0873 \text{ rad}$ this is 0.048% , far below the ε_T above, so it can be neglected.

Vậy $g = 9,80 \pm 0,12 \text{ m/s}^2$; cần ít nhất 32 dao động. Dùng $N = 50$ dao động thì $t \approx 92,5 \text{ s}$, $\varepsilon_t \approx 0,22\%$ và $\varepsilon_g \approx 0,55\%$.

Hence $g = 9.80 \pm 0.12 \text{ m/s}^2$, and at least 32 oscillations are needed. With $N = 50$ oscillations $t \approx 92.5 \text{ s}$, $\varepsilon_t \approx 0.22\%$ and $\varepsilon_g \approx 0.55\%$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Sai số cố định của người bấm đồng hồ (phản ứng lúc bắt đầu và lúc dừng) không đổi theo số dao động, còn thời gian đo tăng tỉ lệ với số dao động, nên sai số tương đối giảm theo $1/N$. Cũng vì thế, giới hạn thực tế là tắt dần: đo quá lâu thì biên độ không còn nhỏ.

The fixed error of the person timing (reaction at the start and at the stop) does not change with the number of swings, while the time grows in proportion to it, so the relative uncertainty falls as $1/N$. The practical limit is damping: time for too long and the amplitude is no longer small.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai số đo gần nhau trừ cho nhau: sai số tuyệt đối cộng lại, còn hiệu thì nhỏ, nên sai số tương đối của hiệu bị phóng to.

Two close readings subtracted: the absolute uncertainties add while the difference is small, so the relative uncertainty of the difference is magnified.

VÍ DỤ 1.8 (Hiệu của hai số gần nhau) / EXAMPLE 1.8 (Difference of two nearly equal readings) — Một dây thép dài treo vật nặng. Dùng thước có sai số mỗi lần đọc 0,05 cm, chiều dài dây trước khi treo là 85,42 cm, sau khi treo là 85,61 cm. Tính độ giãn $\Delta \ell$ và sai số. Nêu cách đo để sai số tương đối dưới 1%.

A long steel wire carries a load. With a ruler whose reading error is 0.05 cm, the length is 85.42 cm before loading and 85.61 cm after. Find the extension $\Delta \ell$ and its uncertainty. Suggest a way to measure it so that the relative uncertainty is below 1%.

Lời giải. / Solution.

Mỗi chiều dài có sai số tương đối chỉ 0,06%, rất tốt. Nhưng độ giãn là hiệu của hai chiều dài.

Each length has a relative uncertainty of only 0.06%. The extension, however, is the difference of two lengths.

$$\Delta \ell = \ell_2 - \ell_1, \Delta(\Delta \ell) = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2$$

$\Delta \ell = 85,61 - 85,42 = 0,19$ cm và sai số tuyệt đối $0,05 + 0,05 = 0,10$ cm, nên $\varepsilon \approx 53\%$.

$\Delta \ell = 85.61 - 85.42 = 0.19$ cm with absolute uncertainty $0.05 + 0.05 = 0.10$ cm, so $\varepsilon \approx 53\%$.

Kết quả $\Delta \ell = 0,19 \pm 0,10$ cm gần như vô nghĩa. Muốn dưới 1% khi $\Delta \ell \approx 0,19$ cm cần sai số tuyệt đối dưới $0,0019$ cm = $0,019$ mm. Đo trực tiếp độ giãn: gắn đồng hồ so (độ chính xác 0,01 mm, đặt kim về 0 trước khi treo) vào dây hoặc dùng đòn bẩy quang học làm phóng đại độ giãn lên hàng chục lần trước khi đọc.

The result $\Delta \ell = 0.19 \pm 0.10$ cm is almost meaningless. To get below 1% for $\Delta \ell \approx 0.19$ cm the absolute uncertainty must be below 0.0019 cm = 0.019 mm. Measure the extension directly: fix a dial gauge (accuracy 0.01 mm) to the wire, or use an optical lever that magnifies the extension tens of times before it is read.

Vậy $\Delta \ell = 0,19 \pm 0,10$ cm bằng thước; đo trực tiếp bằng đồng hồ so cho sai số tương đối khoảng 0,5%.

Hence $\Delta \ell = 0.19 \pm 0.10$ cm with the ruler; direct measurement with a dial gauge gives a relative uncertainty of about 0.5%. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính sai số của hiệu bằng cách lấy hiệu hai sai số tương đối. Với $y = a - b$, sai số TUYỆT ĐỐI cộng lại; sai số tương đối của y là $(\Delta a + \Delta b)/|a - b|$.

Finding the uncertainty of a difference by subtracting relative uncertainties. For $y = a - b$ the ABSOLUTE uncertainties add; the relative uncertainty of y is $(\Delta a + \Delta b)/|a - b|$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy ε của căn bậc hai bằng ε của đại lượng, hay ε của bình phương bằng ε của đại lượng. Lũy thừa n nhân sai số tương đối với $|n|$: bình phương gấp đôi, căn một nửa.

Taking the uncertainty of a square root, or of a square, equal to that of the quantity. A power n multiplies the relative uncertainty by $|n|$: squaring doubles it, the root halves it.

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b; \varepsilon(ab) = \varepsilon_a + \varepsilon_b; \varepsilon(a^n) = |n|\varepsilon_a \quad (1.4)$$

1.6. Đồ thị tuyến tính hóa và bình phương tối thiểu — *Linearised graphs and least squares*

Mắt đánh giá đường thẳng chính xác hơn đường cong, và hệ số góc, hệ số chặn đọc được trực tiếp. Vì thế mọi quan hệ lũy thừa được đưa về đường thẳng bằng cách chọn trục thích hợp. Hệ số chặn còn có ích thứ hai: nó hấp thụ sai số hệ thống không đổi (độ trễ bấm giờ, bán kính quả cầu bị bỏ sót khi đo chiều dài).

The eye judges a straight line more accurately than a curve, and its slope and intercept can be read off directly. So every power relation is brought to a line by choosing the axes suitably. The intercept has a second use: it absorbs a constant systematic error (a timing delay, a bob radius omitted from a length).

TÍNH CHẤT 1.12 / PROPERTY 1.12 — Tuyến tính hóa. Quan hệ giữa hai đại lượng được vẽ thành đường thẳng $Y = aX + b$ bằng cách đặt Y và X là các hàm của đại lượng đo, sao cho hệ số góc a và hệ số chặn b chứa các hằng số cần tìm (xem bảng dưới). Với $y = Cx^n$, vẽ $\lg y$ theo $\lg x$: hệ số góc là n , hệ số chặn là $\lg C$.

Linearisation. A relation between two quantities is drawn as a straight line $Y = aX + b$ by letting Y and X be functions of the measured quantities, so that the slope a and the intercept b contain the constants wanted (see the table). For $y = Cx^n$, plot $\lg y$ against $\lg x$: the slope is n and the intercept is $\lg C$.

Quan hệ <i>Relation</i>	Vẽ Y theo X <i>Plot Y against X</i>	Hệ số góc <i>Slope</i>	Hệ số chặn <i>Intercept</i>
$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$	T^2 theo ℓ <i>T^2 against ℓ</i>	$4\pi^2/g$	0 ($b > 0$ nếu ℓ thiếu bán kính <i>$b > 0$ if ℓ omits the radius</i>)
$s = s_0 + at^2/2$	s theo t^2 <i>s against t^2</i>	$a/2$	s_0
$v^2 = v_0^2 + 2as$	v^2 theo s <i>v^2 against s</i>	$2a$	v_0^2
$s = v(t - \tau)$	s theo t <i>s against t</i>	v	$-v\tau$
$s = \frac{1}{2}g(t - \tau)^2$	$\sqrt{s}$ theo t <i>$\sqrt{s}$ against t</i>	$\sqrt{g/2}$	$-\tau\sqrt{g/2}$
$F = Cv^n$	$\lg F$ theo $\lg v$ <i>$\lg F$ against $\lg v$</i>	n	$\lg C$
$y = Ae^{kx}$	$\ln y$ theo x <i>$\ln y$ against x</i>	k	$\ln A$

ĐỊNH LÝ 1.13 (Bình phương tối thiểu) / THEOREM 1.13 (Least squares) — Với n điểm (x_i, y_i) , đường thẳng $y = ax + b$ làm tổng bình phương độ lệch dọc $\Sigma(y_i - ax_i - b)^2$ nhỏ nhất có $a = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \Sigma(x_i - \bar{x})^2$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Nếu đường thẳng buộc đi qua gốc ($y = ax$) thì $a = \Sigma x_i y_i / \Sigma x_i^2$. Sai số chuẩn của hệ số góc (phát biểu, không chứng minh): $s_a = \sqrt{(\Sigma(y_i - ax_i - b)^2 / (n - 2)) / \Sigma(x_i - \bar{x})^2}$.

For n points (x_i, y_i) , the line $y = ax + b$ that minimises the sum of squared vertical deviations $\Sigma(y_i - ax_i - b)^2$ has $a = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \Sigma(x_i - \bar{x})^2$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$. If the line is forced through the origin ($y = ax$) then $a = \Sigma x_i y_i / \Sigma x_i^2$. The standard error of the slope (quoted, not proved) is $s_a = \sqrt{(\Sigma(y_i - ax_i - b)^2 / (n - 2)) / \Sigma(x_i - \bar{x})^2}$.

Chứng minh. / Proof.

Đặt $u_i = x_i - \bar{x}$, $w_i = y_i - \bar{y}$; khi đó $\Sigma u_i = 0$ và $\Sigma w_i = 0$. Viết đường thẳng dạng $w = au + c$ (với $c = b + a\bar{x} - \bar{y}$). Tổng bình phương độ lệch:

Put $u_i = x_i - \bar{x}$ and $w_i = y_i - \bar{y}$; then $\Sigma u_i = 0$ and $\Sigma w_i = 0$. Write the line as $w = au + c$ (with $c = b + a\bar{x} - \bar{y}$). The sum of squared deviations is:

$$\Sigma(w_i - au_i - c)^2 = \Sigma(w_i - au_i)^2 - 2c\Sigma(w_i - au_i) + nc^2$$

Số hạng giữa bằng 0 vì $\Sigma w_i = \Sigma u_i = 0$. Còn lại $\Sigma(w - au)^2 + nc^2$: nhỏ nhất khi $c = 0$, nghĩa là đường đi qua điểm $(\bar{x}, \bar{y})$, tức $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

The middle term is zero because $\Sigma w_i = \Sigma u_i = 0$. What remains is $\Sigma(w - au)^2 + nc^2$, smallest when $c = 0$, that is the line passes through $(\bar{x}, \bar{y})$, so $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

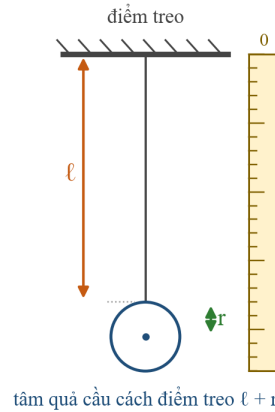
$$\Sigma(w - au)^2 = a^2 \Sigma u^2 - 2a \Sigma uw + \Sigma w^2$$

Đây là tam thức bậc hai của a với hệ số bậc hai $\Sigma u^2 > 0$, nhỏ nhất tại đỉnh $a = \Sigma uw / \Sigma u^2$. Trường hợp qua gốc làm y hết với x , y thay cho u , w và không có số hạng c .

This is a quadratic in a with leading coefficient $\Sigma u^2 > 0$, smallest at the vertex $a = \Sigma uw / \Sigma u^2$. The case through the origin is the same with x, y in place of u, w and no term c . ■

ĐỊNH LÝ 1.14 (Hai đường biên) / THEOREM 1.14 (Extreme-lines method) — Sai số của hệ số góc theo đồ thị tay. Vẽ các thanh sai số, rồi vẽ hai đường thẳng cực biên đi qua mọi thanh sai số: một đường dốc nhất, một đường thoải nhất. Hệ số góc là hệ số góc của đường tốt nhất, sai số $\Delta a = (a_{\max} - a_{\min})/2$. Phương pháp này cho sai số lớn hơn s_a và an toàn hơn.

Uncertainty of the slope from a hand graph. Draw the error bars, then draw two extreme lines that pass through all of them: a steepest one and a shallowest one. The slope is that of the best line and $\Delta a = (a_{\max} - a_{\min})/2$. The method gives a larger uncertainty than s_a and is safer.



Hình 1.2. Sơ đồ đo con lắc: thước đặt dọc dây, vạch 0 ở điểm treo. Chiều dài ℓ đọc đến mép trên quả cầu cách tâm một khoảng r , nên chiều dài hiệu dụng là $\ell + r$.

Figure 1.2. Pendulum set-up: a ruler beside the string with its zero at the suspension point. The length ℓ is read to the top of the bob, a distance r from its centre, so the effective length is $\ell + r$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho tám điểm (ℓ, T) đo từ mép trên quả cầu. Biết $T^2 = (4\pi^2/g)(\ell + r)$: vẽ T^2 theo ℓ được đường thẳng có hệ số chặn dương. Hệ số góc cho g ; tỉ số hệ số chặn/hệ số góc cho r . Tính g riêng từng điểm thì mang theo sai số hệ thống.
The problem gives eight points (ℓ, T) measured to the top of the bob. Since $T^2 = (4\pi^2/g)(\ell + r)$, plotting T^2 against ℓ gives a line with a positive intercept. The slope gives g ; intercept over slope gives r . Computing g point by point carries the systematic error along.

VÍ DỤ 1.9 / EXAMPLE 1.9 — Một học sinh đo chu kỳ con lắc đơn với tám chiều dài, mỗi lần bấm giờ 20 dao động (sai số 0,2 s), chiều dài đo từ điểm treo đến mép trên quả cầu (hình 1.2). Số liệu trong bảng dưới. Tính g bằng đồ thị T^2 theo ℓ , ước lượng sai số bằng hai đường biên, tìm bán kính quả cầu r , và so với g tính riêng từng điểm.

A student measures the period of a simple pendulum at eight lengths, timing 20 oscillations each time (error 0.2 s), with each length measured from the suspension point to the top of the bob (figure 1.2). The data are in the table below. Find g from the graph of T^2 against ℓ , estimate its uncertainty with two extreme lines, find the bob radius r , and compare with g computed point by point.

ℓ (m)	t_{20} (s)	$T = t_{20}/20$ (s)	T^2 (s ²)	$g = 4\pi^2\ell/T^2$ (m/s ²)
0,30 0.30	22,57 22.57	1,129 1.129	1,274 1.274	9,30 9.30
0,40 0.40	25,96 25.96	1,298 1.298	1,685 1.685	9,37 9.37
0,50 0.50	28,85 28.85	1,443 1.443	2,081 2.081	9,49 9.49
0,60 0.60	31,32 31.32	1,566 1.566	2,452 2.452	9,66 9.66
0,70 0.70	34,05 34.05	1,702 1.702	2,899 2.899	9,53 9.53

ℓ (m)	t_{20} (s)	$T = t_{20}/20$ (s)	T^2 (s ²)	$g = 4\pi^2\ell/T^2$ (m/s ²)
0,80 <i>0.80</i>	36,29 <i>36.29</i>	1,815 <i>1.815</i>	3,292 <i>3.292</i>	9,59 <i>9.59</i>
0,90 <i>0.90</i>	38,33 <i>38.33</i>	1,916 <i>1.916</i>	3,673 <i>3.673</i>	9,67 <i>9.67</i>
1,00 <i>1.00</i>	40,51 <i>40.51</i>	2,026 <i>2.026</i>	4,103 <i>4.103</i>	9,62 <i>9.62</i>

Lời giải. / Solution.

Sai số của T là $0,2/20 = 0,01$ s, nên thanh sai số của T^2 là $\pm 2T\Delta T$ (rộng $0,02T$), dài ra khi T lớn (hình 1.3).

The error of T is $0.2/20 = 0.01$ s, so the error bar of T^2 is $\pm 2T\Delta T$ (width $0.02T$), growing with T (figure 1.3).

1. Bình phương tối thiểu cho hệ số góc $a = 4,027$ s²/m ($s_a = 0,025$) và hệ số chặn $b = 0,065$ s².

Least squares gives the slope $a = 4.027$ s²/m ($s_a = 0.025$) and the intercept $b = 0.065$ s².

2. Từ $a = 4\pi^2/g$: $g = 4\pi^2/a \approx 9,80$ m/s², độ lệch theo s_a là $0,06$ m/s².

From $a = 4\pi^2/g$: $g = 4\pi^2/a \approx 9.80$ m/s², with deviation 0.06 m/s² from s_a .

3. Hai đường biên có hệ số góc $4,132$ và $3,952$, nên $\Delta a = 0,090$ và $\Delta g = 4\pi^2\Delta a/a^2 \approx 0,22$ m/s².

The two extreme lines have slopes 4.132 and 3.952 , so $\Delta a = 0.090$ and $\Delta g = 4\pi^2\Delta a/a^2 \approx 0.22$ m/s².

4. Hệ số chặn: $b = a \cdot r$, nên $r = b/a \approx 1,6$ cm, hợp lí cho quả cầu đường kính khoảng 3 cm.

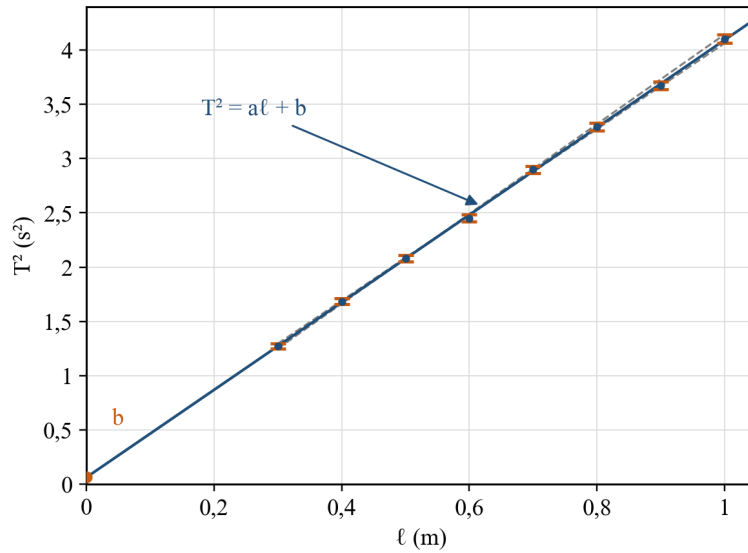
The intercept gives $b = a \cdot r$, so $r = b/a \approx 1.6$ cm, reasonable for a bob about 3 cm in diameter.

5. Tính riêng từng điểm cho g từ $9,30$ đến $9,67$ m/s², trung bình $9,53$ m/s², luôn thấp vì ℓ thiếu r ; sai lệch lớn nhất ở ℓ nhỏ, nơi r/ℓ lớn.

Point-by-point values run from 9.30 to 9.67 m/s², mean 9.53 m/s², always low because ℓ omits r ; the deviation is largest at small ℓ , where r/ℓ is large.

Vậy $g = 9,80 \pm 0,22$ m/s² (đồ thị, hai đường biên); phương pháp đồ thị loại sai số hệ thống của ℓ , còn trung bình các giá trị riêng lệch thấp tới $9,53$ m/s².

Hence $g = 9.80 \pm 0.22$ m/s² (graph, extreme lines); the graph removes the systematic error of ℓ , while the mean of the single values is low at 9.53 m/s². ■



Hình 1.3. Đồ thị T^2 theo l : tám điểm với thanh sai số, đường thẳng bình phương tối thiểu (liền) và hai đường biên (nét đứt). Hệ số chặn b dương.

Figure 1.3. Graph of T^2 against l : eight points with error bars, the least-squares line (solid) and the two extreme lines (dashed). The intercept b is positive.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Lực cản F theo tốc độ v trên khoảng v từ 2 đến 10 m/s: nếu $F = Cv^n$ thì chỉ cần vẽ $\lg F$ theo $\lg v$. Tỷ lệ 2:10 chưa tới một bậc 10, nên dùng $\lg$ thay cho đồ thị F theo v , ở đó mắt khó phân biệt $n = 1,8$ với $n = 2$.

Drag F against speed v over v from 2 to 10 m/s: if $F = Cv^n$ just plot $\lg F$ against $\lg v$. The ratio 2:10 spans less than a decade, so use logs rather than a graph of F against v , on which the eye can hardly tell $n = 1.8$ from $n = 2$.

VÍ DỤ 1.10 / EXAMPLE 1.10 — Một tấm bìa phẳng chuyển động trong luồng gió, lực cản F đo bằng lực kế ở bảy tốc độ v (bảng). Xác định số mũ n trong $F = Cv^n$, sai số của n , và nêu cách kết luận $n = 2$.

A flat card is held in an air stream and the drag F is measured at seven speeds v (table). Find the exponent n in $F = Cv^n$, its uncertainty, and say how to conclude $n = 2$.

v (m/s)	F (N)	$\lg v$	$\lg F$
2,0 2.0	0,060 0.060	0,301 0.301	−1,222 −1.222
3,0 3.0	0,137 0.137	0,477 0.477	−0,863 −0.863
4,0 4.0	0,237 0.237	0,602 0.602	−0,625 −0.625
5,0 5.0	0,358 0.358	0,699 0.699	−0,446 −0.446
6,0 6.0	0,528 0.528	0,778 0.778	−0,277 −0.277

v (m/s)	F (N)	lg v	lg F
8,0 8.0	0,912 0.912	0,903 0.903	-0,040 -0.040
10,0 10.0	1,505 1.505	1,000 1.000	0,178 0.178

Lời giải. / Solution.

Vẽ lg F theo lg v (hình 1.4). Bình phương tối thiểu trên các điểm này cho $n = 1,98$ và $s_n = 0,02$.

Plot lg F against lg v (figure 1.4). Least squares on these points gives $n = 1.98$ and $s_n = 0.02$.

Hệ số chặn được $C = 10^{\lg C} \approx 0,0152 \text{ N} \cdot \text{s}^n / \text{m}^n$.

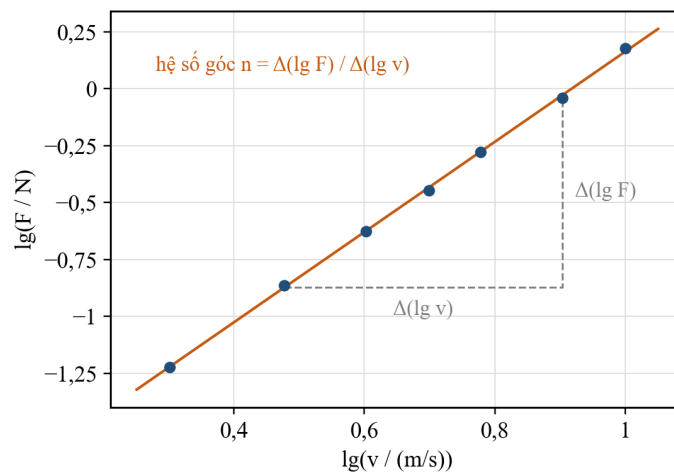
The intercept gives $C = 10^{\lg C} \approx 0.0152 \text{ N} \cdot \text{s}^n / \text{m}^n$.

Giá trị 2 cách n đúng một sai số chuẩn ($1,98 + 0,02$), nên dữ liệu không bác bỏ $n = 2$. Khẳng định $n = 2$ xong thì làm lại bằng cách vẽ F theo v^2 qua gốc; đường thẳng qua gốc cho hệ số góc $0,0148 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$.

The value 2 is exactly one standard error from n ($1.98 + 0.02$), so the data do not rule out $n = 2$. Having accepted $n = 2$, redo the fit by plotting F against v^2 through the origin; the line through the origin has slope $0.0148 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$.

Vậy $n = 1,98 \pm 0,02$, phù hợp với lực cản bậc hai $F = Cv^2$ với $C \approx 0,0148 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$.

Hence $n = 1.98 \pm 0.02$, consistent with quadratic drag $F = Cv^2$ with $C \approx 0.0148 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$. ■



Hình 1.4. Đồ thị lg F theo lg v của bảy điểm đo; hệ số góc của đường thẳng là số mũ $n \approx 2$.

Figure 1.4. Graph of lg F against lg v for seven measurements; the slope of the line is the exponent $n \approx 2$.

NHẬN XÉT / REMARK — Hệ số góc trên đồ thị lg–lg không phụ thuộc đơn vị của v và F; đổi đơn vị chỉ dịch hệ số chặn. Đó là lý do đồ thị lg–lg dùng được để so sánh hai thí nghiệm đo bằng đơn vị khác nhau.

The slope on a log–log graph does not depend on the units of v and F; changing units only shifts the intercept. That is why log–log graphs let two experiments in different units be compared.

NHẬN XÉT / REMARK — Điểm đầu và điểm cuối ảnh hưởng hệ số góc nhiều nhất. Với tám điểm đều nhau theo ℓ , bỏ điểm cuối làm hệ số góc đổi ít; nếu thêm một điểm ở xa các điểm kia, nó kéo đường thẳng mạnh hơn mọi điểm khác. Điểm nằm xa phải đo kĩ nhất.
The first and last points influence the slope most. With eight points evenly spaced in ℓ , dropping the last one changes the slope little; a point added far from the rest pulls the line harder than any other. The outlying point must be measured most carefully.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Vẽ đường thẳng qua hai điểm đầu và cuối thay vì đường tốt nhất, hoặc ép đường qua gốc khi hệ số chặn khác 0. Ví dụ T^2 theo ℓ khi ℓ thiếu bán kính quả cầu: ép qua gốc làm g sai hệ thống.

Drawing the line through the first and last points instead of the best line, or forcing it through the origin when the intercept is not zero. For T^2 against ℓ with ℓ missing the bob radius, forcing through the origin biases g .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính hệ số góc bằng hai điểm đọc trên trục đã đổi (lg) mà quên rằng thang đã đổi: $\Delta(\lg F)/\Delta(\lg v)$ phải lấy hiệu của lg, không phải lg của hiệu.

Computing the slope from two points read on a transformed axis (lg) and forgetting the transformation: use $\Delta(\lg F)/\Delta(\lg v)$, the difference of logs, not the log of a difference.

1.7. Thiết kế phương án thí nghiệm — *Designing an experiment*

Đề dạng “đề xuất phương án” cho vài dụng cụ và một đại lượng cần đo, rồi chấm theo từng khâu. Bài đạt điểm tối đa có đủ sáu khâu trong bảng dưới và nêu rõ khâu nào đã được thiết kế để loại sai số hệ thống hay giảm sai số ngẫu nhiên.

A “propose a method” problem supplies a few instruments and a quantity to measure, and is marked stage by stage. A full-marks answer has all six stages in the table below and says which stage was designed to remove a systematic error or reduce a random one.

Khâu <i>Stage</i>	Nội dung phải có <i>What must be there</i>	Lỗi mất điểm <i>Where marks are lost</i>
1. Cơ sở lí thuyết <i>1. Principle</i>	Công thức nối đại lượng cần đo với đại lượng đo được, điều kiện áp dụng <i>The formula linking the wanted quantity to measurable ones, and when it applies</i>	Không nêu điều kiện (góc nhỏ, chuyển động đều) <i>No conditions stated (small angle, uniform motion)</i>
2. Dụng cụ <i>2. Apparatus</i>	Chỉ dùng dụng cụ đề cho; ghi độ chia nhỏ nhất <i>Only instruments given; smallest divisions stated</i>	Thêm dụng cụ ngoài danh sách <i>Instruments not on the list</i>
3. Bố trí <i>3. Set-up</i>	Sơ đồ có ghi các đại lượng đo <i>A sketch labelling the measured quantities</i>	Sơ đồ không ghi đại lượng <i>Sketch without labels</i>
4. Các bước <i>4. Procedure</i>	Thứ tự thao tác, số lần lặp, khoảng giá trị của biến <i>Order of operations, repeats, range of the variable</i>	Chỉ một giá trị biến, không lặp <i>A single value of the variable, no repeats</i>

Khâu <i>Stage</i>	Nội dung phải có <i>What must be there</i>	Lỗi mất điểm <i>Where marks are lost</i>
5. Xử lý số liệu <i>5. Data treatment</i>	Bảng, đồ thị tuyến tính hóa, đọc hệ số góc <i>Table, linearised graph, slope</i>	Tính riêng từng điểm rồi lấy trung bình <i>Single values then a mean</i>
6. Sai số <i>6. Uncertainty</i>	Nguồn sai số chính, cách giảm, sai số của kết quả <i>Main sources, how to reduce them, the uncertainty of the result</i>	Không phân biệt hệ thống và ngẫu nhiên <i>No distinction between systematic and random</i>

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Có xe đồ chơi chạy đều, đường ray dài 3 m, thước chia mm, đồng hồ bấm tay. Bấm tay luôn trễ khi bắt đầu và khi dừng, nên thời gian đo là $t + \tau$ với τ gần cố định. Nếu đo ở nhiều vạch rồi vẽ s theo t , τ chỉ làm đường thẳng dịch theo trục t , hệ số góc không đổi.

A toy car runs uniformly on a 3 m track; there is a ruler in mm and a hand-held stopwatch. Hand timing is always late at the start and the stop, so the measured time is $t + \tau$ with τ roughly constant. If the time is taken at several marks and s is plotted against t , τ only shifts the line along the t axis and the slope is unchanged.

VÍ DỤ 1.11 (Loại độ trễ bấm giờ bằng đồ thị) / EXAMPLE 1.11 (Removing the timing delay with a graph) — Đề xuất phương án đo tốc độ v của xe đồ chơi chạy đều trên đường ray thẳng dài 3 m, chỉ dùng thước chia mm và đồng hồ bấm tay độ chia 0,01 s (người bấm trễ cỡ 0,2 s). Nêu cách loại sai số do bấm trễ. Với số liệu thu được (bảng, mỗi thời gian là trung bình của ba lần bấm) hãy tính v và sai số.

Propose a method to measure the speed v of a toy car running uniformly on a straight 3 m track, using only a ruler in mm and a hand-held stopwatch of division 0.01 s (the timer is late by about 0.2 s). Explain how to remove the error from the late timing. With the data obtained (table, each time the mean of three timings) find v and its uncertainty.

Lời giải. / Solution.

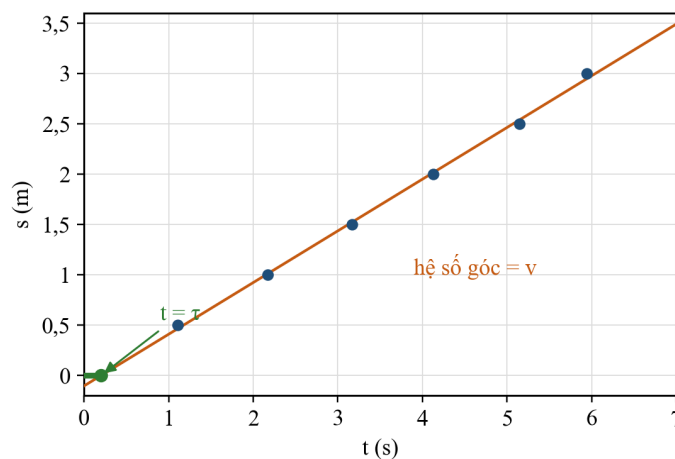
- Cơ sở: xe chạy đều nên $s = v(t - \tau)$, với t là thời gian đo và τ là độ trễ bấm. Đồ thị s theo t là đường thẳng hệ số góc v , cắt trục t tại $t = \tau$ (hình 1.5).
Principle: the car runs uniformly so $s = v(t - \tau)$, with t the measured time and τ the timing delay. The graph of s against t is a line of slope v meeting the t axis at $t = \tau$ (figure 1.5).
- Bố trí: dán sáu vạch cách điểm xuất phát 0,50; 1,00; ...; 3,00 m. Cho xe chạy từ trước vạch xuất phát để đã đạt tốc độ ổn định.
Set-up: stick six marks 0.50, 1.00, ..., 3.00 m from the start. Let the car run in from before the start mark so that it already has a steady speed.
- Thực hiện: với mỗi vạch, bấm giờ từ lúc xe qua vạch xuất phát đến lúc qua vạch s , lặp ba lần, lấy trung bình. Giá trị s đo bằng thước, sai số 0,001 m, nhỏ hơn rất nhiều so với sai số của t .
Procedure: for each mark, time from the start mark to mark s , three times, and average. The distance s is read with the ruler to 0.001 m, far smaller than the error in t .

4. Xử lý: bình phương tối thiểu s theo t cho $v = 0,513 \text{ m/s}$, $s_a = 0,010 \text{ m/s}$ và $\tau = 0,20 \text{ s}$.
Treatment: least squares of s against t gives $v = 0.513 \text{ m/s}$, $s_a = 0.010 \text{ m/s}$ and $\tau = 0.20 \text{ s}$.
5. Đối chiếu: tính riêng $v_i = s_i/t_i$ cho $0,450 \text{ m/s}$ ở vạch $0,50 \text{ m}$ và $0,505 \text{ m/s}$ ở vạch $3,00 \text{ m}$. Giá trị chạy theo s vì τ chiếm tỉ lệ lớn ở thời gian ngắn, nên trung bình các v_i lệch hệ thống.
Comparison: single values $v_i = s_i/t_i$ give 0.450 m/s at the 0.50 m mark and 0.505 m/s at the 3.00 m mark. They drift with s because τ is a larger share of a short time, so the mean of the v_i is biased.

Vậy $v = 0,513 \pm 0,010 \text{ m/s}$ (sai số chuẩn của hệ số góc, $\varepsilon \approx 2\%$). Độ trễ bấm giờ nằm trong hệ số chặn nên không ảnh hưởng v .

Hence $v = 0.513 \pm 0.010 \text{ m/s}$ (standard error of the slope, $\varepsilon \approx 2\%$). The timing delay sits in the intercept and does not affect v . ■

s (m)	t (s)	v = s/t (m/s)
0,50 0.50	1,11 1.11	0,450 0.450
1,00 1.00	2,17 2.17	0,461 0.461
1,50 1.50	3,17 3.17	0,473 0.473
2,00 2.00	4,13 4.13	0,484 0.484
2,50 2.50	5,15 5.15	0,485 0.485
3,00 3.00	5,94 5.94	0,505 0.505



Hình 1.5. Đồ thị s theo t của xe đồ chơi: sáu điểm, đường thẳng bình phương tối thiểu. Đoạn xanh trên trục t là độ trễ bấm giờ τ , không ảnh hưởng hệ số góc.

Figure 1.5. Graph of s against t for the toy car: six points and the least-squares line. The green segment on the t axis is the timing delay τ , which does not affect the slope.

NHẬN XÉT / REMARK — Tách sai số thành phần cố định và phần ngẫu nhiên là ý chính của khâu 6. Phần cố định (τ) cần một cách thiết kế loại bỏ: dùng hệ số chặn của đồ thị, hoặc lấy hiệu hai lần đo. Phần ngẫu nhiên giảm bằng lặp lại và bằng nhiều điểm.

Splitting the error into a fixed and a random part is the core of stage 6. The fixed part (τ) needs a design that removes it: the graph intercept, or the difference of two readings. The random part is reduced by repeats and by many points.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đề cho đồng hồ bấm tay mà chỉ đo một khoảng s rồi tính $v = s/t$: sai số bấm trễ nằm nguyên vẹn trong kết quả. Phải đo nhiều s và vẽ đồ thị, hoặc đo hiệu hai thời gian.

Using a hand-held stopwatch for a single distance s and computing $v = s/t$: the timing delay stays whole in the result. Measure several s and draw the graph, or take the difference of two times.

1.8. Tổ hợp không thứ nguyên và đồng dạng — Dimensionless groups and similarity

Khi số đại lượng độc lập nhiều hơn ba, phân tích thứ nguyên không cho một công thức mà cho một hàm của các tổ hợp không thứ nguyên. Hàm ấy vẫn có ích: hai hệ có cùng giá trị các tổ hợp diễn ra giống hệt nhau khi vẽ trong các biến không thứ nguyên.

With more than three independent quantities, dimensional analysis gives not a formula but a function of dimensionless groups. That function is still useful: two systems with the same values of the groups behave identically when drawn in dimensionless variables.

ĐỊNH LÝ 1.15 (Nguyên lý đồng dạng) / THEOREM 1.15 (Principle of similarity) —

Nguyên lý đồng dạng. Nếu đại lượng y có thứ nguyên $[y]$ và phụ thuộc vào các đại lượng $x_1, \dots, x_k$ thì có thể viết $y = y_0 \cdot f(\Pi_1, \Pi_2, \dots)$, trong đó y_0 ghép từ ba đại lượng cơ bản đủ để có thứ nguyên $[y]$, các Π là tổ hợp không thứ nguyên của x_i , và f là một hàm chưa biết. Hai hệ có các Π bằng nhau thì có y/y_0 bằng nhau.

Principle of similarity. If a quantity y of dimension $[y]$ depends on the quantities $x_1, \dots, x_k$, it can be written $y = y_0 f(\Pi_1, \Pi_2, \dots)$, where y_0 is built from enough of the base quantities to have dimension $[y]$, the Π are dimensionless combinations of the x_i , and f is an unknown function. Two systems with equal Π have equal y/y_0 .

Phát biểu trên là dạng sơ cấp của một định lý tổng quát (định lý Π của Buckingham); sách không chứng minh nó. Số tổ hợp Π bằng số đại lượng trừ số đơn vị cơ bản độc lập.

The statement above is the elementary form of a general result (Buckingham's Π theorem); the book does not prove it. The number of groups Π equals the number of quantities minus the number of independent base units.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vật rơi từ độ cao h , chịu lực cản tuyến tính $-bv$ (b tính bằng kg/s). Các đại lượng: t, h, g, m, b : năm đại lượng, ba đơn vị, nên hai tổ hợp. Một là gt^2/h ; tổ hợp còn lại phải chứa b : thử $b^2h/(m^2g)$, vì b/m có thứ nguyên T^{-1} .

A body falls from height h with a linear drag $-bv$ (b in kg/s). The quantities are t, h, g, m, b : five quantities, three units, so two groups. One is gt^2/h ; the other must contain b : try $b^2h/(m^2g)$, since b/m has dimension T^{-1} .

VÍ DỤ 1.12 (Hai thí nghiệm đồng dạng) / EXAMPLE 1.12 (Two similar experiments) —

Vật khối lượng $m = 0,050 \text{ kg}$ thả từ nghỉ ở độ cao $h = 2,0 \text{ m}$, lực cản $-bv$ với $b = 0,20 \text{ kg/s}$; thí nghiệm đo được thời gian rơi $t_1 = 1,063 \text{ s}$. Hỏi thả cùng vật từ nghỉ ở độ cao $8,0 \text{ m}$ trong môi trường có $b = 0,10 \text{ kg/s}$ thì thời gian rơi bằng bao nhiêu? Nêu giới hạn của kết luận.

A body of mass $m = 0.050 \text{ kg}$ is released from rest at height $h = 2.0 \text{ m}$ with drag $-bv$, $b = 0.20 \text{ kg/s}$; an experiment finds the fall time $t_1 = 1.063 \text{ s}$. What is the fall time of the same body released from rest at 8.0 m in a medium with $b = 0.10 \text{ kg/s}$? State the limit of the conclusion.

Lời giải. / Solution.

Năm đại lượng t, h, g, m, b với ba đơn vị cho hai tổ hợp không thứ nguyên: $\Pi_1 = gt^2/h$ và $\Pi_2 = b^2h/(m^2g)$. Thật vậy $[b/m] = T^{-1}$, nên $[b^2h/(m^2g)] = T^{-2} \cdot L/(LT^{-2}) = 1$.

The five quantities t, h, g, m, b with three units give two dimensionless groups: $\Pi_1 = gt^2/h$ and $\Pi_2 = b^2h/(m^2g)$. Indeed $[b/m] = T^{-1}$, so $[b^2h/(m^2g)] = T^{-2} \cdot L/(LT^{-2}) = 1$.

$$t = \sqrt{(h/g)} \cdot f(\Pi_2) \quad (1.5)$$

Thí nghiệm 1: $\Pi_2 = (0,20/0,050)^2 \cdot 2,0/9,8 \approx 3,27$. Thí nghiệm 2: $b/m = 0,10/0,050 = 2 \text{ s}^{-1}$ (một nửa), $h = 8,0 \text{ m}$ (gấp 4), nên Π_2 có cùng giá trị: $2^2 \cdot 8,0/9,8 \approx 3,27$.

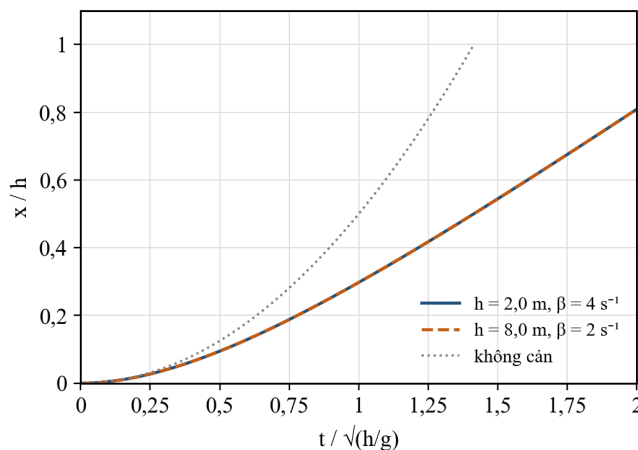
Experiment 1: $\Pi_2 = (0.20/0.050)^2 \cdot 2.0/9.8 \approx 3.27$. Experiment 2: $b/m = 0.10/0.050 = 2 \text{ s}^{-1}$ (half), $h = 8.0 \text{ m}$ (four times), so Π_2 has the same value: $2^2 \cdot 8.0/9.8 \approx 3.27$.

Hai hệ có cùng Π_2 nên f giống nhau và $t_2/t_1 = \sqrt{(h_2/h_1)} = 2$.

The two systems have the same Π_2 , hence the same f , and $t_2/t_1 = \sqrt{(h_2/h_1)} = 2$.

Vậy $t_2 = 2t_1 \approx 2,126 \text{ s}$. Kết luận này không cần biết hàm f . Giới hạn: nó chỉ đúng khi hai hệ có cùng Π_2 ; với $b = 0,20 \text{ kg/s}$ ở $8,0 \text{ m}$ thì Π_2 khác và không dự đoán được t nếu chưa biết f .

Hence $t_2 = 2t_1 \approx 2.126 \text{ s}$. The conclusion needs no knowledge of f . Its limit: it holds only when the two systems share Π_2 ; with $b = 0.20 \text{ kg/s}$ at 8.0 m the value of Π_2 differs and t cannot be predicted without f . ■



Hình 1.6. Hai thí nghiệm rơi có cản tuyến tính vẽ trong biến không thứ nguyên $t/\sqrt{(h/g)}$ và x/h trùng nhau; đường chấm là rơi không cản.

Figure 1.6. Two falls with linear drag drawn in the dimensionless variables $t/\sqrt{(h/g)}$ and x/h coincide; the dotted line is fall without drag.

NHẬN XÉT / REMARK — Khi Π_2 nhỏ (cản yếu), f dần tới $\sqrt{2}$, tức t dần tới $\sqrt{(2h/g)} = 0,639$ s ở thí nghiệm 1. Khi Π_2 lớn (cản mạnh), vật nhanh chóng đạt tốc độ cuối mg/b và $t \approx hb/(mg)$, tỉ lệ với h . Biết hai giới hạn này, ta nối bằng thực nghiệm phần giữa mà không có công thức.

When Π_2 is small (weak drag), f tends to $\sqrt{2}$, so t tends to $\sqrt{(2h/g)} = 0.639$ s in experiment 1. When Π_2 is large (strong drag) the body quickly reaches the terminal speed mg/b and $t \approx hb/(mg)$, proportional to h . Knowing the two limits, one joins the middle by experiment without a formula.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Giọt chất lỏng bán kính r dao động hình dạng: tần số f có thể phụ thuộc hệ số căng bề mặt σ (thứ nguyên MT^{-2}), khối lượng riêng ρ , bán kính r . Ba đại lượng độc lập cho ba phương trình; xem g có cần thêm không bằng cách so lực căng bề mặt và trọng lực.

A liquid drop of radius r oscillating in shape: the frequency f may depend on the surface tension σ (dimension MT^{-2}), the density ρ and the radius r . Three independent quantities give three equations; whether g must be added is decided by comparing surface tension and weight.

VÍ DỤ 1.13 (Chọn đại lượng cần đưa vào) / EXAMPLE 1.13 (Choosing which quantities to include) — Tìm dạng của tần số f dao động hình dạng của giọt nước bán kính $r = 1,0$ mm. Hệ số căng bề mặt $\sigma = 0,0728$ N/m, $\rho = 1000$ kg/m³. Thực nghiệm cho hằng số không thứ nguyên $C \approx 0,45$. Tính f ; biết f thay đổi thế nào khi bán kính tăng gấp đôi; xét có cần đưa g vào không.

Find the form of the frequency f of shape oscillations of a water drop of radius $r = 1.0$ mm. The surface tension is $\sigma = 0.0728$ N/m and $\rho = 1000$ kg/m³. Experiment gives a dimensionless constant $C \approx 0.45$. Compute f ; say how f changes when the radius doubles; decide whether g must be included.

Lời giải. / Solution.

Đặt $f = C \cdot \sigma^a \rho^b r^c$; $[f] = T^{-1}$, $[\sigma] = MT^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[r] = L$.

Set $f = C \cdot \sigma^a \rho^b r^c$; $[f] = T^{-1}$, $[\sigma] = MT^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[r] = L$.

1. T: $-1 = -2a$, nên $a = 1/2$. M: $0 = a + b$, nên $b = -1/2$. L: $0 = -3b + c$, nên $c = 3b = -3/2$.

T: $-1 = -2a$, so $a = 1/2$. M: $0 = a + b$, so $b = -1/2$. L: $0 = -3b + c$, so $c = 3b = -3/2$.

$$f = C\sqrt{\sigma/(\rho r^3)} \quad (1.6)$$

Với $r = 1,0$ mm: $\sqrt{\sigma/(\rho r^3)} = \sqrt{(0,0728/(1000 \cdot 10^{-9}))} \approx 270$ s⁻¹, nên $f \approx 0,45 \cdot 270 \approx 121$ Hz.

For $r = 1.0$ mm: $\sqrt{\sigma/(\rho r^3)} = \sqrt{(0.0728/(1000 \cdot 10^{-9}))} \approx 270$ s⁻¹, so $f \approx 0.45 \cdot 270 \approx 121$ Hz.

Bán kính gấp đôi: f giảm $2^{3/2} \approx 2,83$ lần, còn khoảng 43 Hz.

Doubling the radius reduces f by $2^{3/2} \approx 2.83$, to about 43 Hz.

Đưa g vào: thêm một tổ hợp không thứ nguyên $\rho g r^2 / \sigma$ (số Bond). Với $r = 1,0$ mm giá trị là 0,135, nhỏ, nên trọng lực chỉ hiệu chỉnh nhẹ và công thức bỏ g dùng được. Với giọt bán kính 5 mm số này lớn hơn 25 lần và công thức mất hiệu lực.

Including g adds a dimensionless group $\rho g r^2 / \sigma$ (the Bond number). For $r = 1.0$ mm it is 0.135, small, so gravity is a slight correction and the formula without g works. For a 5 mm radius it is 25 times larger and the formula fails.

Vậy $f = C\sqrt{(\sigma/(pr^3))} \approx 121 \text{ Hz}$ cho $r = 1,0 \text{ mm}$; f tỉ lệ $r^{-3/2}$.

Hence $f = C\sqrt{(\sigma/(pr^3))} \approx 121 \text{ Hz}$ for $r = 1.0 \text{ mm}$; f is proportional to $r^{-3/2}$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Chu kỳ vệ tinh quanh Trái Đất phụ thuộc bán kính quỹ đạo r , khối lượng M của Trái Đất và hằng số hấp dẫn G . G và M có thể xuất hiện riêng hay chỉ qua tích GM ? Thứ nguyên của G (bảng ở mục 1.1) cho M^{-1} : cặp G, M phải xuất hiện cùng lũy thừa.

The period of a satellite about the Earth depends on the orbital radius r , the Earth's mass M and the gravitational constant G . Can G and M appear separately or only as the product GM ? The dimension of G (see the table in section 1.1) carries M^{-1} : G and M must appear with the same power.

VÍ DỤ 1.14 (Từ một thiên thể dự đoán thiên thể khác) / EXAMPLE 1.14 (Predicting one body from another) — Chu kỳ chuyển động tròn của một vật quanh Trái Đất chỉ phụ thuộc vào bán kính quỹ đạo r , hằng số hấp dẫn G và khối lượng M của Trái Đất. Dùng phân tích thứ nguyên tìm dạng của chu kỳ, rồi từ chu kỳ của Mặt Trăng (27,32 ngày, $r = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$) dự đoán chu kỳ một trạm quỹ đạo ở độ cao 410 km (bán kính Trái Đất $6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$), không dùng giá trị G hay M .

The period of circular motion of a body about the Earth depends only on the orbital radius r , the gravitational constant G and the Earth's mass M . Use dimensional analysis to find the form of the period, then from the period of the Moon (27.32 days, $r = 3.844 \cdot 10^8 \text{ m}$) predict the period of a station at 410 km altitude (Earth radius $6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$), without using the values of G or M .

Lời giải. / Solution.

Đặt $T = C \cdot r^a G^b M^c$; $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$.

Set $T = C \cdot r^a G^b M^c$; $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$.

1. $T: 1 = -2b$, nên $b = -1/2$. $M: 0 = -b + c$, nên $c = -1/2$. $L: 0 = a + 3b$, nên $a = 3/2$.

$T: 1 = -2b$, so $b = -1/2$. $M: 0 = -b + c$, so $c = -1/2$. $L: 0 = a + 3b$, so $a = 3/2$.

$$T = C\sqrt{(r^3/(GM))} \quad (1.7)$$

G và M chỉ xuất hiện qua tích GM , nên với cùng một thiên thể trung tâm, T tỉ lệ với $r^{3/2}$: $T_2/T_1 = (r_2/r_1)^{3/2}$, và C, G, M đều giản ước.

G and M appear only through the product GM , so for one central body T is proportional to $r^{3/2}$: $T_2/T_1 = (r_2/r_1)^{3/2}$, and C, G, M all cancel.

Bán kính quỹ đạo trạm: $r = 6,371 \cdot 10^6 + 4,1 \cdot 10^5 = 6,781 \cdot 10^6 \text{ m}$. Chu kỳ Mặt Trăng: $2,360 \cdot 10^6 \text{ s}$.

The station's orbital radius is $r = 6.371 \cdot 10^6 + 4.1 \cdot 10^5 = 6.781 \cdot 10^6 \text{ m}$. The Moon's period is $2.360 \cdot 10^6 \text{ s}$.

$$T_{ISS} = T_M(r_{ISS}/r_M)^{3/2}$$

Tỉ số bán kính 0,01764, lũy thừa $3/2$ cho khoảng $2,34 \cdot 10^{-3}$, nên $T_{ISS} \approx 5530 \text{ s} \approx 92,2 \text{ phút}$.

The radius ratio is 0.01764, its $3/2$ power is about $2.34 \cdot 10^{-3}$, so $T_{ISS} \approx 5530 \text{ s} \approx 92.2 \text{ min}$.

Vậy chu kỳ của trạm khoảng 92,2 phút. Giá trị quan sát khoảng 92,7 phút, lệch dưới 1%.

Hence the station's period is about 92.2 min. The observed value is about 92.7 min, within 1%.

■

NHẬN XÉT / REMARK — Kết quả $T \propto r^{3/2}$ là định luật Kepler thứ ba cho quỹ đạo tròn; phân tích thứ nguyên cho dạng, còn hằng số $C = 2\pi$ cần dẫn từ lực hấp dẫn (Chương Động lực học nâng cao).

The result $T \propto r^{3/2}$ is Kepler's third law for circular orbits; dimensional analysis gives the form, while the constant $C = 2\pi$ has to be derived from the gravitational force (chapter on advanced dynamics).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng dạng tích lũy thừa khi có hai tổ hợp không thứ nguyên trở lên (ví dụ rơi có cản tuyến tính). Khi đó $t = \sqrt{(h/g) \cdot f(\Pi_2)}$ với f chưa biết, không phải $t = C \cdot h^p g^q \dots$

Using a pure power product when two or more dimensionless groups exist (for example fall with linear drag). Then $t = \sqrt{(h/g) \cdot f(\Pi_2)}$ with f unknown, not $t = C \cdot h^p g^q \dots$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ba đại lượng độc lập và ba đơn vị cơ bản: phân tích thứ nguyên cho công thức, trừ hằng số C . Nhiều hơn ba: cho một hàm f của các tổ hợp không thứ nguyên.

Three independent quantities and three base units: dimensional analysis gives the formula up to the constant C . More than three: a function f of dimensionless groups.

1.9. Bảng chiến lược: từ dấu hiệu trong đề đến công cụ — *Strategy table: from the sign in the problem to the tool*

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Cho công thức dạng chữ, hỏi đúng hay sai <i>A formula in letters, right or wrong?</i>	So thứ nguyên hai vế; thử giá trị giới hạn <i>Compare dimensions of both sides; test a limiting case</i>	1.1
Biết đại lượng phụ thuộc vào ba đại lượng, hỏi dạng công thức <i>The quantity depends on three others; find the form</i>	Phân tích thứ nguyên, giải ba phương trình lũy thừa <i>Dimensional analysis, three power equations</i>	1.2, 1.3
Cho một phép đo ở điều kiện này, hỏi kết quả ở điều kiện khác <i>One measurement given; asked for another case</i>	Tỉ lệ từ công thức lũy thừa, giản ước hằng số <i>Ratio from the power formula, constants cancel</i>	1.14
“Ước lượng”, “cỡ bao nhiêu”, không cho số <i>“Estimate”, “about how much”, no numbers</i>	Chuỗi thừa số, làm tròn một chữ số, kiểm bằng đại lượng khác <i>A chain of factors, one significant figure, cross-check</i>	1.4
Cho các số đo kèm $\pm$ hay độ chia dụng cụ <i>Readings with $\pm$ or instrument divisions</i>	Truyền sai số: cộng tuyệt đối, cộng tương đối, nhân với số mũ n <i>Propagate: add absolute, add relative, multiply by the exponent n</i>	1.6, 1.7

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Hiệu hai số đo gần nhau <i>Difference of two close readings</i>	Sai số tuyệt đối cộng; đo trực tiếp hiệu bằng dụng cụ nhạy hơn <i>Absolute errors add; measure the difference directly with a finer instrument</i>	1.8
Bộ số liệu nhiều điểm, hỏi hằng số <i>Many data points, asked for a constant</i>	Tuyến tính hóa, bình phương tối thiểu, hai đường biên <i>Linearise, least squares, extreme lines</i>	1.9, 1.10
Dụng cụ cho trước, hỏi “đề xuất phương án” <i>Given apparatus, “propose a method”</i>	Sáu khâu; đồ thị để loại sai số hệ thống không đổi <i>Six stages; a graph to remove a constant systematic error</i>	1.11
Hơn ba đại lượng độc lập, hai hệ giống nhau <i>More than three independent quantities, two similar systems</i>	Tổ hợp không thứ nguyên, nguyên lí đồng dạng <i>Dimensionless groups, similarity</i>	1.12, 1.13

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Đại lượng cơ bản	Base quantity	đại lượng chọn làm gốc (M, L, T) <i>quantity chosen as the foundation (M, L, T)</i>
Thứ nguyên	Dimension	tích các lũy thừa của M, L, T <i>product of powers of M, L, T</i>
Không thứ nguyên	Dimensionless	mọi lũy thừa của M, L, T bằng 0 <i>all powers of M, L, T equal 0</i>
Đồng nhất thứ nguyên	Dimensional homogeneity	hai vế đẳng thức cùng thứ nguyên <i>both sides of an equation have equal dimension</i>
Phân tích thứ nguyên	Dimensional analysis	tìm dạng công thức từ thứ nguyên <i>finding a formula's form from dimensions</i>
Tổ hợp không thứ nguyên	Dimensionless group	tích lũy thừa các đại lượng có thứ nguyên bằng 1 <i>power product of quantities with dimension equal to 1</i>
Nguyên lí đồng dạng	Similarity	hai hệ cùng tổ hợp không thứ nguyên diễn ra giống nhau <i>systems with equal groups behave alike</i>
Bậc độ lớn	Order of magnitude	lũy thừa của 10 gần giá trị nhất <i>the power of ten nearest the value</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Ước lượng Fermi	Fermi estimate	tính cỡ độ lớn từ vài số liệu quen thuộc <i>an order-of-magnitude calculation from familiar numbers</i>
Chữ số có nghĩa	Significant figure	chữ số đáng tin của kết quả đo <i>a trustworthy digit of a result</i>
Sai số tuyệt đối	Absolute uncertainty	độ lớn của độ lệch có thể có <i>the size of the possible deviation</i>
Sai số tương đối	Relative uncertainty	sai số tuyệt đối chia cho giá trị <i>absolute uncertainty divided by the value</i>
Sai số ngẫu nhiên	Random error	rải hai phía, giảm khi lấy trung bình <i>scatters both ways, falls on averaging</i>
Sai số hệ thống	Systematic error	lệch cùng phía, không giảm khi lấy trung bình <i>shifts one way, not reduced by averaging</i>
Sai số dụng cụ	Instrument error	nửa độ chia nhỏ nhất hay độ chính xác ghi trên máy <i>half the smallest division or the stated accuracy</i>
Độ lệch chuẩn	Standard deviation	độ rải của từng lần đo quanh trung bình <i>scatter of single readings about the mean</i>
Tuyến tính hóa	Linearisation	đưa quan hệ về đường thẳng bằng đổi trục <i>turning a relation into a line by changing axes</i>
Hệ số góc	Slope	tỉ số $\Delta(\text{trục dọc})/\Delta(\text{trục ngang})$ <i>ratio $\Delta(\text{vertical})/\Delta(\text{horizontal})$</i>
Bình phương tối thiểu	Least squares	đường làm tổng bình phương độ lệch dọc nhỏ nhất <i>the line minimising the sum of squared vertical deviations</i>
Thanh sai số	Error bar	đoạn thẳng trên đồ thị biểu diễn sai số của điểm <i>a segment on a graph showing a point's uncertainty</i>
Phương án thí nghiệm	Experimental method	bản kế hoạch gồm cơ sở, dụng cụ, bước, xử lý, sai số <i>a plan with principle, apparatus, steps, treatment, uncertainty</i>

1.10. Bài tự luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 1.1 / Problem 1.1 — Từ biểu thức lực hấp dẫn $F = Gm_1m_2/r^2$, tìm thứ nguyên và đơn vị SI của hằng số G . Kiểm tra bằng thứ nguyên xem $\sqrt{r^3/(GM)}$ có là thời gian không và GM/r^2 có là gia tốc không (M là khối lượng, r là độ dài).

From the gravitational force $F = Gm_1m_2/r^2$, find the dimension and SI unit of the constant G . Check by dimensions whether $\sqrt{r^3/(GM)}$ is a time and GM/r^2 an acceleration (M a mass, r a length).

Bài 1.2 / Problem 1.2 — Hình chữ nhật đo được các cạnh $a = 21,50 \text{ cm} \pm 0,05 \text{ cm}$ và $b = 8,20 \text{ cm} \pm 0,05 \text{ cm}$. Viết diện tích S và chu vi P kèm sai số theo quy ước làm tròn.

A rectangle has sides $a = 21.50 \text{ cm} \pm 0.05 \text{ cm}$ and $b = 8.20 \text{ cm} \pm 0.05 \text{ cm}$. Write the area S and the perimeter P with uncertainties in the rounding convention.

Bài 1.3 / Problem 1.3 — Ước lượng khối lượng không khí trong một phòng học $9,0 \text{ m} \times 6,5 \text{ m} \times 3,6 \text{ m}$ (khối lượng riêng không khí $1,2 \text{ kg/m}^3$). Bằng khoảng mấy học sinh nặng 50 kg ? Nếu mỗi kích thước chỉ biết với sai số 10% thì khối lượng bất định bao nhiêu phần trăm?

Estimate the mass of air in a classroom $9.0 \text{ m} \times 6.5 \text{ m} \times 3.6 \text{ m}$ (air density 1.2 kg/m^3). About how many 50 kg students is that? If each dimension is known only to 10% , what is the percentage uncertainty of the mass?

Bài 1.4 / Problem 1.4 — Tần số f của vật khối lượng m dao động trên lò xo độ cứng k (thứ nguyên của k là MT^{-2}) chỉ phụ thuộc k và m . Tìm dạng f bằng phân tích thứ nguyên. Với $m = 0,10 \text{ kg}$ đo được $f = 3,2 \text{ Hz}$. Tính f khi (a) m tăng lên $0,40 \text{ kg}$; (b) $m = 0,40 \text{ kg}$ và lò xo cứng gấp đôi.

The frequency f of a mass m oscillating on a spring of stiffness k (dimension of k is MT^{-2}) depends only on k and m . Find the form of f by dimensional analysis. With $m = 0.10 \text{ kg}$, $f = 3.2 \text{ Hz}$ is measured. Find f when (a) m increases to 0.40 kg ; (b) $m = 0.40 \text{ kg}$ and the spring is twice as stiff.

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 1.5 / Problem 1.5 — Thả vật rơi từ nghỉ, đo thời gian rơi t bằng đồng hồ bấm tay có độ trễ cố định τ chưa biết, nên $t_{\text{đo}} = t_{\text{thật}} + \tau$. Với sáu độ cao s : $0,5$; $1,0$; $1,5$; $2,0$; $2,5$; $3,0 \text{ (m)}$ đo được t : $0,44$; $0,58$; $0,68$; $0,75$; $0,84$; $0,91 \text{ (s)}$. Dùng đồ thị $\sqrt{s}$ theo t tìm g và τ . Giải thích vì sao vẽ s theo t^2 cho g sai, và cho biết g thu được từ đồ thị đó.

A body is dropped from rest and the fall time t is measured with a hand-held stopwatch with a fixed unknown delay τ , so measured $t = \text{true } t + \tau$. For six heights s : 0.5 , 1.0 , 1.5 , 2.0 , 2.5 , 3.0 (m) the times are: 0.44 , 0.58 , 0.68 , 0.75 , 0.84 , 0.91 (s) . Use the graph of $\sqrt{s}$ against t to find g and τ . Explain why plotting s against t^2 gives a wrong g , and state the g that graph gives.

Bài 1.6 / Problem 1.6 — Khối lượng riêng của quả cầu thép: $\rho = 6m/(\pi d^3)$. Đo $m = 8,35 \text{ g} \pm 0,01 \text{ g}$ và $d = 12,70 \text{ mm} \pm 0,01 \text{ mm}$ (panme). Tính ρ và sai số. Nếu dùng thước kẹp (sai số $0,02 \text{ mm}$), ρ sai số bao nhiêu? Nếu thay cân bằng cân chính xác $0,001 \text{ g}$, sai số tương đối của ρ giảm tới đâu khi vẫn dùng panme?

Density of a steel ball: $\rho = 6m/(\pi d^3)$. Measured $m = 8.35 \text{ g} \pm 0.01 \text{ g}$ and $d = 12.70 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}$ (micrometer). Find ρ and its uncertainty. With calipers (error 0.02 mm) what is the uncertainty of ρ ? If the balance is replaced by one accurate to 0.001 g , how far does the relative uncertainty of ρ fall while keeping the micrometer?

Bài 1.7 / Problem 1.7 — Công suất P mà một tuabin gió lấy từ luồng không khí chỉ phụ thuộc khối lượng riêng ρ của không khí, diện tích quét A của cánh quạt và tốc độ gió v . Tìm dạng P . Mô hình có $A = 0,20 \text{ m}^2$ trong gió $5,0 \text{ m/s}$ ($\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$) cho $P = 6,0 \text{ W}$. Dự đoán P cho tuabin $A = 1,8 \text{ m}^2$ trong gió $8,0 \text{ m/s}$. Nếu bán kính cánh tăng $1,5$ lần ở cùng tốc độ gió, P tăng mấy lần?

The power P a wind turbine takes from an air stream depends only on the air density ρ , the swept area A of the rotor and the wind speed v . Find the form of P . A model with $A = 0.20 \text{ m}^2$ in a 5.0 m/s wind ($\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$) gives $P = 6.0 \text{ W}$. Predict P for a turbine with $A = 1.8 \text{ m}^2$ in an 8.0 m/s wind. If the blade radius grows 1.5 times at the same wind speed, by what factor does P grow?

Bài 1.8 / Problem 1.8 — Đo bề dày và khối lượng riêng của giấy với thước chia mm và cân: một ram 500 tờ A4 ($210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$, sai số mỗi cạnh $0,5 \text{ mm}$) cao $H = 5,05 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$, khối lượng $2,50 \text{ kg} \pm 0,01 \text{ kg}$. (a) Nêu vì sao đo cả ram thay vì một tờ. (b) Tính bề dày một tờ và sai số. (c) Tính khối lượng riêng và sai số. (d) Dùng hai ram chồng lên nhau thì sai số tương đối của ρ còn bao nhiêu?

Measure the thickness and density of paper with a mm ruler and a balance: a ream of 500 A4 sheets ($210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$, error 0.5 mm per side) stands $H = 5.05 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$ and has mass $2.50 \text{ kg} \pm 0.01 \text{ kg}$. (a) Say why the whole ream is measured instead of one sheet. (b) Find the thickness of one sheet and its uncertainty. (c) Find the density and its uncertainty. (d) With two reams stacked, what is the relative uncertainty of ρ ?

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 1.9 / Problem 1.9 — Ném vật thẳng đứng lên với tốc độ v_0 , lực cản không khí có gia tốc $-\lambda v^2$ (λ tính bằng m^{-1} , hướng ngược chiều chuyển động) cộng với g . (a) Bằng phân tích thứ nguyên chứng minh $H = (v_0^2/g) \cdot f(\eta)$ với $\eta = \lambda v_0^2/g$. (b) Một mô phỏng số cho $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $\lambda = 0,010 \text{ m}^{-1}$: $H = 17,1 \text{ m}$. Cần λ' bằng bao nhiêu để ném với $v_0' = 10 \text{ m/s}$ cho cùng hình dạng chuyển động, và khi đó H' bằng bao nhiêu? (c) Cản làm giảm độ cao bao nhiêu phần trăm so với không cản ở thí nghiệm (b)? Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A body is thrown vertically up with speed v_0 ; air drag gives an acceleration $-\lambda v^2$ (λ in m^{-1} , opposite the motion) in addition to g . (a) Use dimensional analysis to show $H = (v_0^2/g) \cdot f(\eta)$ with $\eta = \lambda v_0^2/g$. (b) A numerical simulation for $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $\lambda = 0.010 \text{ m}^{-1}$ gives $H = 17.1 \text{ m}$. What λ' gives the same shape of motion for $v_0' = 10 \text{ m/s}$, and what is H' then? (c) By what percentage does drag lower the height in experiment (b)? Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 1.10 / Problem 1.10 — Một giọt nước mưa nhỏ bán kính r chuyển động chậm trong không khí có độ nhớt η (thứ nguyên $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$); lực cản F chỉ phụ thuộc η , r , v . (a) Tìm dạng F bằng phân tích thứ nguyên. (b) Biết hằng số là 6π , tìm tốc độ rơi ổn định của giọt $r = 0,030 \text{ mm}$, bỏ qua lực đẩy của không khí; $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho_n = 1000 \text{ kg/m}^3$. (c) Tổ hợp không thứ nguyên $\text{Re} = \rho_a v(2r)/\eta$, $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$: tính Re ở (b), và bán kính lớn nhất để $\text{Re} \leq 1$ khi dùng công thức (b). (d) Với $r = 1,0 \text{ mm}$ (ví dụ về lực cản bậc hai) Re bằng bao nhiêu?

A small raindrop of radius r moves slowly through air of viscosity η (dimension $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$); the drag F depends only on η , r , v . (a) Find the form of F by dimensional analysis. (b) Given the constant 6π , find the steady fall speed of a drop of $r = 0.030 \text{ mm}$, neglecting air buoyancy; $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$. (c) With the dimensionless group $\text{Re} = \rho_a v(2r)/\eta$, $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$: compute Re in (b), and the largest radius for which $\text{Re} \leq 1$ when the formula of (b) is used. (d) For $r = 1.0 \text{ mm}$ (the quadratic-drag example) what is Re ?

Bài 1.11 / Problem 1.11 — Đo g bằng hai chiều dài con lắc, mỗi chiều dài đo từ điểm treo đến mép trên quả cầu (thiếu bán kính r chưa biết). $\ell_1 = 1,000 \text{ m}$, $\ell_2 = 0,250 \text{ m}$, sai số mỗi

chiều dài 0,002 m; thời gian 20 dao động: $t_1 = 40,44$ s, $t_2 = 20,66$ s, sai số mỗi thời gian 0,1 s. (a) Chứng minh r triệt tiêu và tìm biểu thức g . (b) Tính g và sai số. (c) Nếu chọn $\ell_2 = 0,900$ m ($t_2 = 38,40$ s) thì sai số tương đối của g bằng bao nhiêu? (d) So g tính từ riêng ℓ_1 với giá trị ở (b).

Measure g with two pendulum lengths, each measured from the suspension point to the top of the bob (omitting an unknown radius r). $\ell_1 = 1.000$ m, $\ell_2 = 0.250$ m, error 0.002 m each; the time for 20 oscillations is $t_1 = 40.44$ s, $t_2 = 20.66$ s, error 0.1 s each. (a) Show that r cancels and find an expression for g . (b) Find g and its uncertainty. (c) If $\ell_2 = 0.900$ m is chosen ($t_2 = 38.40$ s), what is the relative uncertainty of g ? (d) Compare g from ℓ_1 alone with the value in (b).

Bài 1.12 / Problem 1.12 — Một bọt hơi hình cầu bán kính R trong nước (khối lượng riêng ρ) bị áp suất p bên ngoài ép xẹp. Thời gian xẹp t chỉ phụ thuộc R , ρ , p . (a) Tìm dạng t . (b) Một mô phỏng cho $R = 1,0$ mm, $p = 1,0 \cdot 10^5$ Pa, $\rho = 1000$ kg/m³: $t = 9,2 \cdot 10^{-5}$ s. Tìm hằng số không thứ nguyên. (c) Dự đoán t cho $R = 3,0$ mm, $p = 3,0 \cdot 10^4$ Pa. (d) So tốc độ trung bình R/t của thành bọt với $\sqrt{(p/\rho)}$.

A spherical vapour bubble of radius R in water (density ρ) is squeezed shut by the outside pressure p . The collapse time t depends only on R , ρ , p . (a) Find the form of t . (b) A simulation for $R = 1.0$ mm, $p = 1.0 \cdot 10^5$ Pa, $\rho = 1000$ kg/m³ gives $t = 9.2 \cdot 10^{-5}$ s. Find the dimensionless constant. (c) Predict t for $R = 3.0$ mm, $p = 3.0 \cdot 10^4$ Pa. (d) Compare the mean wall speed R/t with $\sqrt{(p/\rho)}$.

1.11. Lời giải bài tự luyện — Solutions to practice problems

Bài 1.1 — Problem 1.1

Giải $F = Gm_1m_2/r^2$ theo G : $G = Fr^2/(m_1m_2)$.

Solve $F = Gm_1m_2/r^2$ for G : $G = Fr^2/(m_1m_2)$.

$$[G] = \text{MLT}^{-2} \cdot \text{L}^2 / \text{M}^2 = \text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$$

Đơn vị SI: $\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

SI unit: $\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

$$[r^3/(GM)] = \text{L}^3 / (\text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2} \cdot \text{M}) = \text{T}^2$$

Căn bậc hai có thứ nguyên T : $\sqrt{(r^3/(GM))}$ là thời gian.

The square root has dimension T : $\sqrt{(r^3/(GM))}$ is a time.

$$[GM/r^2] = \text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2} \cdot \text{M} / \text{L}^2 = \text{LT}^{-2}$$

Vậy G có thứ nguyên $\text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$ (đơn vị $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$); cả hai biểu thức đều đúng thứ nguyên, biểu thức sau là gia tốc hấp dẫn.

Hence G has dimension $\text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$ (unit $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$); both expressions are dimensionally right, the second being the gravitational acceleration. ■

Bài 1.2 — Problem 1.2

Diện tích là tích: sai số tương đối cộng lại. $\varepsilon_a = 0,05/21,50 \approx 0,23\%$, $\varepsilon_b = 0,05/8,20 \approx 0,61\%$, nên $\varepsilon_s \approx 0,84\%$.

The area is a product: relative uncertainties add. $\varepsilon_a = 0.05/21.50 \approx 0.23\%$, $\varepsilon_b = 0.05/8.20 \approx 0.61\%$, so $\varepsilon_s \approx 0.84\%$.

$$S = 21,50 \cdot 8,20 = 176,3 \text{ cm}^2; \Delta S = 0,84\% \cdot 176,3 \approx 1,5 \text{ cm}^2.$$

$$S = 21.50 \cdot 8.20 = 176.3 \text{ cm}^2; \Delta S = 0.84\% \cdot 176.3 \approx 1.5 \text{ cm}^2.$$

Chu vi là tổng: sai số tuyệt đối cộng lại. $P = 2(a + b) = 59,4 \text{ cm}$, $\Delta P = 2(0,05 + 0,05) = 0,2 \text{ cm}$.

The perimeter is a sum: absolute uncertainties add. $P = 2(a + b) = 59.4 \text{ cm}$, $\Delta P = 2(0.05 + 0.05) = 0.2 \text{ cm}$.

Vậy $S = 176,3 \pm 1,5 \text{ cm}^2$ (chữ số đầu của sai số là 1 nên giữ hai chữ số) và $P = 59,4 \pm 0,2 \text{ cm}$.

Hence $S = 176.3 \pm 1.5 \text{ cm}^2$ (the first digit of the uncertainty is 1, so two figures are kept) and $P = 59.4 \pm 0.2 \text{ cm}$. ■

Bài 1.3 — Problem 1.3

Thể tích $V = 9,0 \cdot 6,5 \cdot 3,6 = 210,6 \text{ m}^3$.

The volume is $V = 9.0 \cdot 6.5 \cdot 3.6 = 210.6 \text{ m}^3$.

Khối lượng $m = \rho V = 1,2 \cdot 210,6 \approx 253 \text{ kg}$, bậc độ lớn 10^2 kg .

The mass is $m = \rho V = 1.2 \cdot 210.6 \approx 253 \text{ kg}$, of order 10^2 kg .

Số học sinh: $253/50 \approx 5$.

Number of students: $253/50 \approx 5$.

Ba kích thước nhân với nhau, mỗi kích thước sai 10%, nên $\varepsilon_V = 3 \cdot 10\% = 30\%$, $\varepsilon_m = 30\%$ (ρ coi chính xác), $\Delta m \approx 76 \text{ kg}$.

Three dimensions multiply, each 10% uncertain, so $\varepsilon_V = 3 \cdot 10\% = 30\%$ and $\varepsilon_m = 30\%$ (ρ taken exact), $\Delta m \approx 76 \text{ kg}$.

Vậy khối lượng khí cỡ $2,5 \cdot 10^2 \text{ kg}$, bằng khoảng 5 học sinh, bất định cỡ 30%.

Hence the air weighs about $2.5 \cdot 10^2 \text{ kg}$, roughly 5 students, uncertain by about 30%. ■

Bài 1.4 — Problem 1.4

Đặt $f = C \cdot k^a m^b$: $T^{-1} = (MT^{-2})^a M^b$.

Set $f = C \cdot k^a m^b$: $T^{-1} = (MT^{-2})^a M^b$.

1. T: $-1 = -2a$, nên $a = 1/2$. M: $0 = a + b$, nên $b = -1/2$.

T: $-1 = -2a$, so $a = 1/2$. M: $0 = a + b$, so $b = -1/2$.

$$f = C\sqrt{(k/m)}$$

(a) k không đổi: $f \propto m^{-1/2}$. Khối lượng gấp 4 nên f giảm 2 lần: $f = 3,2/2 = 1,6 \text{ Hz}$.

(a) k unchanged: $f \propto m^{-1/2}$. The mass is four times larger so f halves: $f = 3.2/2 = 1.6 \text{ Hz}$.

(b) k gấp đôi nhân f với $\sqrt{2}$: $f = 1,6 \cdot \sqrt{2} \approx 2,3 \text{ Hz}$.

(b) Doubling k multiplies f by $\sqrt{2}$: $f = 1.6 \cdot \sqrt{2} \approx 2.3 \text{ Hz}$.

Vậy $f = C\sqrt{(k/m)}$; (a) $f \approx 1,6 \text{ Hz}$; (b) $f \approx 2,3 \text{ Hz}$.

Hence $f = C\sqrt{(k/m)}$; (a) $f \approx 1.6 \text{ Hz}$; (b) $f \approx 2.3 \text{ Hz}$. ■

Bài 1.5 — Problem 1.5

Thời gian rơi thật là $t - \tau$ nên $s = \frac{1}{2}g(t - \tau)^2$. Lấy căn: $\sqrt{s} = \sqrt{(g/2)} \cdot (t - \tau)$.

The true fall time is $t - \tau$ so $s = \frac{1}{2}g(t - \tau)^2$. Taking the root: $\sqrt{s} = \sqrt{(g/2)} \cdot (t - \tau)$.

$$\sqrt{s} = \sqrt{(g/2)} \cdot t - \sqrt{(g/2)} \cdot \tau$$

Đây là đường thẳng $Y = aX + b$ với $X = t$, $Y = \sqrt{s}$, hệ số góc $a = \sqrt{(g/2)}$, hệ số chặn $b = -a\tau$.

This is a line $Y = aX + b$ with $X = t$, $Y = \sqrt{s}$, slope $a = \sqrt{(g/2)}$ and intercept $b = -a\tau$.

Bình phương tối thiểu trên sáu điểm: $a = 2,204 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, $b = -0,266 \text{ m}^{1/2}$.

Least squares on the six points: $a = 2.204 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, $b = -0.266 \text{ m}^{1/2}$.

$$g = 2a^2, \tau = -b/a$$

$g = 2 \cdot 2,204^2 \approx 9,71 \text{ m/s}^2$; $\tau = -0,266/2,204$ cho $|\tau| \approx 0,12 \text{ s}$.

$g = 2 \cdot 2.204^2 \approx 9.71 \text{ m/s}^2$; $\tau = -(-0.266)/2.204 \approx 0.12 \text{ s}$.

Vẽ s theo t^2 : $(t - \tau)^2 = t^2 - 2t\tau + \tau^2$ chứa số hạng bậc nhất theo t nên s theo t^2 không là đường thẳng, và đường tốt nhất qua các điểm có hệ số góc $g/2$ sai. Tính được $g \approx 7,98 \text{ m/s}^2$, thấp hơn 18%.

Plotting s against t^2 : $(t - \tau)^2 = t^2 - 2t\tau + \tau^2$ contains a term linear in t , so s against t^2 is not a line, and the best line through the points has a wrong slope $g/2$. It gives $g \approx 7.98 \text{ m/s}^2$, 18% low.

Vậy $g \approx 9,71 \text{ m/s}^2$ và $\tau \approx 0,12 \text{ s}$.

Hence $g \approx 9.71 \text{ m/s}^2$ and $\tau \approx 0.12 \text{ s}$. ■

Bài 1.6 — Problem 1.6

$\rho = 6 \cdot 8,35 \cdot 10^{-3} / (\pi \cdot (12,70 \cdot 10^{-3})^3) \approx 7785 \text{ kg/m}^3$.

$\rho = 6 \cdot 8.35 \cdot 10^{-3} / (\pi \cdot (12.70 \cdot 10^{-3})^3) \approx 7785 \text{ kg/m}^3$.

$$\varepsilon_p = \varepsilon_m + 3\varepsilon_d$$

Panme: $\varepsilon_m = 0,01/8,35 \approx 0,12\%$, $\varepsilon_d = 0,01/12,70 \approx 0,079\%$, nên $\varepsilon_p \approx 0,12 + 0,24 = 0,36\%$, $\Delta\rho \approx 28 \text{ kg/m}^3$.

Micrometer: $\varepsilon_m = 0.01/8.35 \approx 0.12\%$, $\varepsilon_d = 0.01/12.70 \approx 0.079\%$, so $\varepsilon_p \approx 0.12 + 0.24 = 0.36\%$, $\Delta\rho \approx 28 \text{ kg/m}^3$.

Thước kẹp: $\varepsilon_d = 0,02/12,70 \approx 0,157\%$, $\varepsilon_p \approx 0,12 + 0,47 = 0,59\%$, $\Delta\rho \approx 46 \text{ kg/m}^3$.

Calipers: $\varepsilon_d = 0.02/12.70 \approx 0.157\%$, $\varepsilon_p \approx 0.12 + 0.47 = 0.59\%$, $\Delta\rho \approx 46 \text{ kg/m}^3$.

Cân 0,001 g: $\varepsilon_m \approx 0,012\%$, $\varepsilon_p \approx 0,012 + 0,24 = 0,25\%$: giảm chút ít vì đường kính (lũy thừa 3) chi phối.

Balance at 0.001 g: $\varepsilon_m \approx 0.012\%$, $\varepsilon_p \approx 0.012 + 0.24 = 0.25\%$: only a slight fall because the diameter (power 3) dominates.

Vậy $\rho = (7,79 \pm 0,03) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ với panme; $(7,79 \pm 0,05) \cdot 10^3$ với thước kẹp; cân tốt hơn chỉ đưa ε về 0,25%.

Hence $\rho = (7.79 \pm 0.03) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ with the micrometer; $(7.79 \pm 0.05) \cdot 10^3$ with the calipers; the better balance only brings ε to 0.25%. ■

Bài 1.7 — Problem 1.7

Đặt $P = C \cdot \rho^a A^b v^c$; $[P] = ML^2T^{-3}$.

Set $P = C \cdot \rho^a A^b v^c$; $[P] = ML^2T^{-3}$.

1. M: $1 = a$. T: $-3 = -c$, nên $c = 3$. L: $2 = -3a + 2b + c = -3 + 2b + 3$, nên $b = 1$.

M: $1 = a$. T: $-3 = -c$, so $c = 3$. L: $2 = -3a + 2b + c = -3 + 2b + 3$, so $b = 1$.

$$P = C\rho A v^3$$

Từ mô hình: $C = P/(\rho A v^3) = 6,0/(1,2 \cdot 0,20 \cdot 125) = 0,20$.

From the model: $C = P/(\rho A v^3) = 6.0/(1.2 \cdot 0.20 \cdot 125) = 0.20$.

Tuabin lớn: $P = 0,20 \cdot 1,2 \cdot 1,8 \cdot 8,0^3 \approx 221$ W. Cách khác theo tỉ lệ: $(1,8/0,20) \cdot (8,0/5,0)^3 = 9 \cdot 4,096 \approx 36,9$ lần $6,0$ W, cũng ≈ 221 W.

Large turbine: $P = 0.20 \cdot 1.2 \cdot 1.8 \cdot 8.0^3 \approx 221$ W. By ratios: $(1.8/0.20) \cdot (8.0/5.0)^3 = 9 \cdot 4.096 \approx 36.9$ times 6.0 W, also ≈ 221 W.

Bán kính $\times 1,5$ thì $A \propto r^2$ tăng $1,5^2 = 2,25$ lần, nên P tăng $2,25$ lần.

Radius $\times 1.5$ makes $A \propto r^2$ grow $1.5^2 = 2.25$ times, so P grows 2.25 times.

Vậy $P = C\rho A v^3$, tuabin lớn cho khoảng 221 W; bán kính $\times 1,5$ cho $P \times 2,25$.

Hence $P = C\rho A v^3$; the large turbine gives about 221 W; radius $\times 1.5$ gives $P \times 2.25$. ■

Bài 1.8 — Problem 1.8

(a) Một tờ dày khoảng $0,1$ mm, nhỏ hơn nhiều so với độ chia 1 mm: sai số tương đối cỡ 500% . Đo N tờ chồng lên thì sai số tuyệt đối của H không đổi ($0,1$ cm), còn H tăng N lần, nên sai số tương đối giảm N lần.

(a) One sheet is about 0.1 mm thick, far below the 1 mm division: relative uncertainty about 500% . For N sheets stacked, the absolute uncertainty of H stays (0.1 cm) while H grows N times, so the relative uncertainty falls N times.

(b) $d = H/500 = 0,101$ mm; $\varepsilon_d = \varepsilon_H = 0,1/5,05 \approx 1,98\%$; $\Delta d = 0,1$ cm/500 $\approx 0,002$ mm. Vậy $d = (0,101 \pm 0,002)$ mm.

(b) $d = H/500 = 0.101$ mm; $\varepsilon_d = \varepsilon_H = 0.1/5.05 \approx 1.98\%$; $\Delta d = 0.1$ cm/500 ≈ 0.002 mm. So $d = (0.101 \pm 0.002)$ mm.

$$\rho = m/(abH), \quad \varepsilon_\rho = \varepsilon_m + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_H$$

(c) $\rho = 2,50/(0,210 \cdot 0,297 \cdot 0,0505) \approx 794$ kg/m³. $\varepsilon_m = 0,40\%$, $\varepsilon_a = 0,5/210 \approx 0,24\%$, $\varepsilon_b = 0,5/297 \approx 0,17\%$, $\varepsilon_H = 1,98\%$; tổng $\varepsilon_\rho \approx 2,79\%$, $\Delta\rho \approx 22$ kg/m³.

(c) $\rho = 2.50/(0.210 \cdot 0.297 \cdot 0.0505) \approx 794$ kg/m³. $\varepsilon_m = 0.40\%$, $\varepsilon_a = 0.5/210 \approx 0.24\%$, $\varepsilon_b = 0.5/297 \approx 0.17\%$, $\varepsilon_H = 1.98\%$; total $\varepsilon_\rho \approx 2.79\%$, $\Delta\rho \approx 22$ kg/m³.

(d) Hai ram: $H = 10,10$ cm, $\varepsilon_H = 0,99\%$; $m = 5,00$ kg, $\varepsilon_m = 0,20\%$; $\varepsilon_\rho \approx 0,20 + 0,24 + 0,17 + 0,99 = 1,60\%$.

(d) Two reams: $H = 10.10$ cm, $\varepsilon_H = 0.99\%$; $m = 5.00$ kg, $\varepsilon_m = 0.20\%$; $\varepsilon_\rho \approx 0.20 + 0.24 + 0.17 + 0.99 = 1.60\%$.

Vậy $d = (0,101 \pm 0,002)$ mm; $\rho = (7,9 \pm 0,2) \cdot 10^2$ kg/m³, trong đó chiều cao ram chiếm khoảng 71% sai số; hai ram đưa ε_ρ về 1,60%.

Hence $d = (0.101 \pm 0.002)$ mm; $\rho = (7.9 \pm 0.2) \cdot 10^2$ kg/m³, of which the ream height supplies about 71% of the uncertainty; two reams bring ε_ρ to 1.60%. ■

Bài 1.9 — Problem 1.9

(a) Các đại lượng H , v_0 , g , λ có $[H] = L$, $[v_0] = LT^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$, $[\lambda] = L^{-1}$: bốn đại lượng, hai đơn vị độc lập (L , T), nên có hai tổ hợp không thứ nguyên.

(a) The quantities H , v_0 , g , λ have $[H] = L$, $[v_0] = LT^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$, $[\lambda] = L^{-1}$: four quantities and two independent units (L , T), so two dimensionless groups.

$$\Pi_1 = H g / v_0^2, \quad \Pi_2 = \lambda v_0^2 / g$$

Kiểm: $[Hg/v_0^2] = L \cdot LT^{-2}/(L^2T^{-2}) = 1$ và $[\lambda v_0^2/g] = L^{-1} \cdot L^2T^{-2}/(LT^{-2}) = 1$. Theo nguyên lí đồng dạng $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, tức $H = (v_0^2/g) \cdot f(\eta)$.

Check: $[Hg/v_0^2] = L \cdot LT^{-2}/(L^2T^{-2}) = 1$ and $[\lambda v_0^2/g] = L^{-1} \cdot L^2T^{-2}/(LT^{-2}) = 1$. By the principle of similarity $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, that is $H = (v_0^2/g) \cdot f(\eta)$.

(b) Thí nghiệm 1 có $\eta = 0,010 \cdot 400/9,8 \approx 0,408$. Thí nghiệm 2 cần cùng η : $\lambda' \cdot 100 = 0,010 \cdot 400$, nên $\lambda' = 0,040$ m⁻¹.

(b) Experiment 1 has $\eta = 0.010 \cdot 400/9.8 \approx 0.408$. Experiment 2 needs the same η : $\lambda' \cdot 100 = 0.010 \cdot 400$, so $\lambda' = 0.040$ m⁻¹.

Cùng η nên cùng f , và $H'/H = (v_0'/v_0)^2 = 1/4$: $H' = 17,1/4 \approx 4,28$ m.

The same η gives the same f , and $H'/H = (v_0'/v_0)^2 = 1/4$: $H' = 17.1/4 \approx 4.28$ m.

(c) Không cản: $H_0 = v_0^2/(2g) = 400/19,6 \approx 20,4$ m. Tỉ số $17,1/20,4 \approx 0,84$: cản làm giảm khoảng 16%.

(c) Without drag: $H_0 = v_0^2/(2g) = 400/19.6 \approx 20.4$ m. The ratio $17.1/20.4 \approx 0.84$: drag lowers the height by about 16%.

Vậy $\lambda' = 0,040$ m⁻¹, $H' \approx 4,28$ m; cản làm giảm độ cao khoảng 16%.

Hence $\lambda' = 0.040$ m⁻¹, $H' \approx 4.28$ m; drag lowers the height by about 16%. ■

Bài 1.10 — Problem 1.10

(a) $F = C \cdot \eta^a r^b v^c$: M: $1 = a$. T: $-2 = -a - c$, nên $c = 1$. L: $1 = -a + b + c = -1 + b + 1$, nên $b = 1$.

(a) $F = C \cdot \eta^a r^b v^c$: M: $1 = a$. T: $-2 = -a - c$, so $c = 1$. L: $1 = -a + b + c = -1 + b + 1$, so $b = 1$.

$$F = C \eta r v$$

(b) Cân bằng trọng lực $mg = 6\pi\eta r v$ với $m = (4/3)\pi r^3 \rho_n$:

(b) Balance weight $mg = 6\pi\eta r v$ with $m = (4/3)\pi r^3 \rho_w$:

$$v = 2\rho_n g r^2 / (9\eta)$$

Với $r = 3,0 \cdot 10^{-5}$ m: $v = 2 \cdot 1000 \cdot 9,8 \cdot 9,0 \cdot 10^{-10} / (9 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5}) \approx 0,109$ m/s.

With $r = 3.0 \cdot 10^{-5}$ m: $v = 2 \cdot 1000 \cdot 9.8 \cdot 9.0 \cdot 10^{-10} / (9 \cdot 1.8 \cdot 10^{-5}) \approx 0.109$ m/s.

(c) $Re = 1,2 \cdot 0,109 \cdot 6,0 \cdot 10^{-5} / 1,8 \cdot 10^{-5} \approx 0,44$, nhỏ hơn 1 nên công thức dùng được. Thay v ở (b) vào Re : $Re = 4\rho_n \rho_{kg} r^3 / (9\eta^2)$; đặt $Re = 1$:

(c) $Re = 1.2 \cdot 0.109 \cdot 6.0 \cdot 10^{-5} / 1.8 \cdot 10^{-5} \approx 0.44$, below 1 so the formula applies. Putting v of (b) into Re : $Re = 4\rho_w \rho_{kg} r^3 / (9\eta^2)$; set $Re = 1$:

$$r^3 = 9\eta^2 / (4\rho_n \rho_{kg})$$

$r = 0,040$ mm, và $v = 0,19$ m/s tại đó.

$r = 0.040$ mm, and $v = 0.19$ m/s there.

(d) Với $r = 1,0$ mm, $v \approx 6,6$ m/s (từ ví dụ về lực cản bậc hai): $Re = 1,2 \cdot 6,6 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3} / 1,8 \cdot 10^{-5} \approx 880 \gg 1$, nên dùng lực cản bậc hai $F = C_p S v^2$ chứ không dùng $F = 6\pi\eta r v$.

(d) For $r = 1.0$ mm, $v \approx 6.6$ m/s (from the quadratic-drag example): $Re = 1.2 \cdot 6.6 \cdot 2.0 \cdot 10^{-3} / 1.8 \cdot 10^{-5} \approx 880 \gg 1$, so the quadratic drag $F = C_p S v^2$ applies, not $F = 6\pi\eta r v$.

Vậy $F = C_p r v$; giọt 0,030 mm rơi với $v \approx 0,109$ m/s ($Re \approx 0,44$); công thức này dùng được đến $r \approx 0,040$ mm.

Hence $F = C_p r v$; a 0.030 mm drop falls at $v \approx 0.109$ m/s ($Re \approx 0.44$); the formula holds up to $r \approx 0.040$ mm. ■

Bài 1.11 — Problem 1.11

(a) $T^2 = (4\pi^2/g)(\ell + r)$ cho mỗi chiều dài. Trừ hai phương trình:

(a) $T^2 = (4\pi^2/g)(\ell + r)$ for each length. Subtract the two equations:

$$T_1^2 - T_2^2 = (4\pi^2/g)(\ell_1 - \ell_2)$$

r triệt tiêu. Từ đó:

r cancels. Hence:

$$g = 4\pi^2(\ell_1 - \ell_2) / (T_1^2 - T_2^2)$$

(b) $T_1 = 40,44/20 = 2,022$ s, $T_2 = 20,66/20 = 1,033$ s; $T_1^2 - T_2^2 \approx 3,021$ s², do đó $g = 4\pi^2 \cdot 0,750/3,021 \approx 9,80$ m/s².

(b) $T_1 = 40.44/20 = 2.022$ s, $T_2 = 20.66/20 = 1.033$ s; $T_1^2 - T_2^2 \approx 3.021$ s², so $g = 4\pi^2 \cdot 0.750/3.021 \approx 9.80$ m/s².

Sai số: $\Delta(\ell_1 - \ell_2) = 0,004$ m, $\varepsilon = 0,53\%$. $\Delta T = 0,1/20 = 0,005$ s, $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$: 0,0202 và 0,0103 s², cộng 0,0305 s², $\varepsilon = 1,0\%$. Tổng $\varepsilon_g \approx 1,5\%$, $\Delta g \approx 0,15$ m/s².

Uncertainty: $\Delta(\ell_1 - \ell_2) = 0.004$ m, $\varepsilon = 0.53\%$. $\Delta T = 0.1/20 = 0.005$ s, $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$: 0.0202 and 0.0103 s², sum 0.0305 s², $\varepsilon = 1.0\%$. Total $\varepsilon_g \approx 1.5\%$, $\Delta g \approx 0.15$ m/s².

(c) $\ell_1 - \ell_2 = 0,100$ m làm số hạng đầu bằng $0,004/0,100 = 4\%$; $T_1^2 - T_2^2$ nhỏ cũng làm số hạng sau lớn; tổng $\varepsilon_g \approx 14\%$. Hai chiều dài gần nhau làm sai số bị phóng to cỡ 9 lần.

(c) $\ell_1 - \ell_2 = 0.100$ m makes the first term $0.004/0.100 = 4\%$; the small $T_1^2 - T_2^2$ enlarges the second; total $\varepsilon_g \approx 14\%$. Two close lengths magnify the uncertainty about 9 times.

(d) Từ ℓ_1 riêng: $g = 4\pi^2 \cdot 1,000/2,022^2 \approx 9,66$ m/s², thấp hơn (b) khoảng 1,4% vì thiếu r . Mức lệch này cùng cỡ ε_g của (b), nên ở sai số thời gian 0,1 s phương pháp hai chiều dài

chưa vượt được cách thông thường; nó có lợi khi r/ℓ lớn hoặc khi thời gian đo chính xác hơn.

(d) From ℓ_1 alone: $g = 4\pi^2 \cdot 1.000/2.022^2 \approx 9.66 \text{ m/s}^2$, about 1.4% below (b) because r is omitted. This offset is comparable to ε_g of (b), so at a timing error of 0.1 s the two-length method does not beat the ordinary one; it pays when r/ℓ is large or the timing is more accurate.

Vậy $g = 9,80 \pm 0,15 \text{ m/s}^2$ ($\varepsilon \approx 1,5\%$); chọn ℓ_2 gần ℓ_1 làm ε_g tăng lên cỡ 14%.

Hence $g = 9.80 \pm 0.15 \text{ m/s}^2$ ($\varepsilon \approx 1.5\%$); choosing ℓ_2 close to ℓ_1 raises ε_g to about 14%. ■

Bài 1.12 — Problem 1.12

(a) $t = C \cdot R^a \rho^b p^c$; $[p] = ML^{-1}T^{-2}$. T: $1 = -2c$, nên $c = -1/2$. M: $0 = b + c$, nên $b = 1/2$. L: $0 = a - 3b - c = a - 3/2 + 1/2$, nên $a = 1$.

(a) $t = C \cdot R^a \rho^b p^c$; $[p] = ML^{-1}T^{-2}$. T: $1 = -2c$, so $c = -1/2$. M: $0 = b + c$, so $b = 1/2$. L: $0 = a - 3b - c = a - 3/2 + 1/2$, so $a = 1$.

$$t = C R \sqrt{(\rho/p)}$$

(b) $\sqrt{(\rho/p)} = \sqrt{(1000/10^5)} = 0,1 \text{ s/m}$, nên $C = 9,2 \cdot 10^{-5} / (1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1) = 0,92$.

(b) $\sqrt{(\rho/p)} = \sqrt{(1000/10^5)} = 0.1 \text{ s/m}$, so $C = 9.2 \cdot 10^{-5} / (1.0 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1) = 0.92$.

(c) Theo tỉ lệ $t \propto R/\sqrt{p}$: $t = 9,2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot \sqrt{(10^5/(3,0 \cdot 10^4))} = 9,2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 1,826 \approx 5,04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

(c) By ratios $t \propto R/\sqrt{p}$: $t = 9.2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot \sqrt{(10^5/(3.0 \cdot 10^4))} = 9.2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 1.826 \approx 5.04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

(d) $R/t = 3,0 \cdot 10^{-3} / (5,04 \cdot 10^{-4}) \approx 6,0 \text{ m/s}$ và $\sqrt{(p/\rho)} = \sqrt{(3,0 \cdot 10^4/1000)} \approx 5,5 \text{ m/s}$: cùng cỡ, vì $R/t = \sqrt{(p/\rho)}/C$.

(d) $R/t = 3.0 \cdot 10^{-3} / (5.04 \cdot 10^{-4}) \approx 6.0 \text{ m/s}$ and $\sqrt{(p/\rho)} = \sqrt{(3.0 \cdot 10^4/1000)} \approx 5.5 \text{ m/s}$: the same scale, since $R/t = \sqrt{(p/\rho)}/C$.

Vậy $t = CR\sqrt{(\rho/p)}$ với $C \approx 0,92$; bọt 3,0 mm ở $3,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ xẹp sau khoảng $5,04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

Hence $t = CR\sqrt{(\rho/p)}$ with $C \approx 0.92$; a 3.0 mm bubble at $3.0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ collapses in about $5.04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. ■

Chương 2. Động học chất điểm chuyển động thẳng — Chapter 2. One-dimensional kinematics

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Phân biệt độ dịch chuyển với quãng đường, vận tốc trung bình với tốc độ trung bình, và tính đúng từng đại lượng từ đồ thị.
Tell displacement from distance travelled and average velocity from average speed, and compute each correctly from a graph.
- Dùng bốn phương trình của chuyển động thẳng biến đổi đều và chọn phương trình không chứa đại lượng đề không cho.
Use the four equations of uniformly accelerated motion and pick the one that leaves out the quantity the problem does not give.
- Giải rơi tự do và ném thẳng đứng bằng một phương trình duy nhất cho cả đường lên lẫn đường xuống.
Solve free fall and vertical throws with a single equation covering both the rise and the fall.
- Lập điều kiện gặp nhau, biện luận nghiệm phương trình bậc hai, và chuyển sang hệ quy chiếu gắn một vật để rút gọn bài toán.
Set up the meeting condition, discuss the roots of a quadratic, and switch to the frame of one body to shorten a problem.
- Xử lý chuyển động nhiều giai đoạn với gia tốc đổi theo bậc thang, nối các giai đoạn bằng vận tốc và vị trí ở nút.
Handle multi-stage motion with step-wise acceleration, joining the stages through the velocity and position at each node.

2.1. Hệ quy chiếu, độ dịch chuyển và quãng đường — Reference frame, displacement and distance

Chuyển động thẳng được khảo sát trên một trục Ox , vật chuyển động coi là chất điểm: kích thước của nó nhỏ so với quãng đường nó đi. Chỉ số m (mean) đặt cho giá trị trung bình, ví dụ v_m ; chỉ số 0 đặt cho giá trị tại thời điểm ban đầu. Giá trị $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ trừ khi đề cho khác. Khi xét chuyển động thẳng đứng, trục Oy hướng lên.

One-dimensional motion is studied along an axis Ox , and the moving body is treated as a particle: its size is small compared with the distance it covers. The subscript m (mean) marks an average value, for example v_m ; the subscript 0 marks the value at the initial instant. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ unless stated otherwise. For vertical motion the axis Oy points up.

ĐỊNH NGHĨA 2.1 (Hệ quy chiếu) / DEFINITION 2.1 (Reference frame) — Hệ quy chiếu gồm vật làm mốc, trục tọa độ gắn với vật mốc, gốc thời gian và đồng hồ. Tọa độ x của chất điểm là số đo đại số của đoạn từ gốc O tới chất điểm, dương theo chiều dương của trục và âm theo chiều ngược lại.

A reference frame consists of a reference body, a coordinate axis attached to it, a time origin and a clock. The coordinate x of a particle is the signed distance from the origin O to the particle, positive in the positive direction of the axis and negative in the opposite direction.

ĐỊNH NGHĨA 2.2 (Độ dịch chuyển) / DEFINITION 2.2 (Displacement) — Độ dịch chuyển của chất điểm từ thời điểm t_1 đến t_2 là $\Delta x = x_2 - x_1$. Đây là đại lượng đại số: $\Delta x > 0$ khi chất điểm dịch theo chiều dương, $\Delta x < 0$ khi dịch ngược chiều dương. Nó chỉ phụ thuộc vị trí đầu và vị trí cuối, không phụ thuộc đường đi.

The displacement of a particle from time t_1 to t_2 is $\Delta x = x_2 - x_1$. It is a signed quantity: $\Delta x > 0$ when the particle moves in the positive direction, $\Delta x < 0$ when it moves against it. It depends only on the initial and final positions, not on the path.

ĐỊNH NGHĨA 2.3 (Quãng đường) / DEFINITION 2.3 (Distance travelled) — Quãng đường s là tổng độ dài các đoạn chất điểm đã đi qua trong khoảng thời gian xét. Quãng đường không âm và không giảm theo thời gian.

The distance travelled s is the total length of the stretches the particle has passed over in the interval considered. It is never negative and never decreases with time.

TÍNH CHẤT 2.4 (Độ dịch chuyển và quãng đường) / PROPERTY 2.4 (Displacement versus distance) — Với mọi chuyển động thẳng, $|\Delta x| \leq s$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi chất điểm không đổi chiều chuyển động trong khoảng thời gian xét.

For any rectilinear motion, $|\Delta x| \leq s$. Equality holds if and only if the particle does not reverse its direction of motion in the interval.

Chứng minh. / Proof.

Chia khoảng thời gian thành các đoạn nhỏ sao cho trong mỗi đoạn chất điểm không đổi chiều. Độ dịch chuyển cả khoảng là tổng đại số của các độ dịch chuyển nhỏ, còn quãng đường là tổng các giá trị tuyệt đối của chúng.

Split the interval into pieces in each of which the particle keeps its direction. The total displacement is the algebraic sum of the small displacements, while the distance is the sum of their absolute values.

Giá trị tuyệt đối của một tổng không vượt quá tổng các giá trị tuyệt đối, và hai vế bằng nhau khi mọi số hạng cùng dấu, tức chất điểm không đổi chiều.

The absolute value of a sum never exceeds the sum of the absolute values, and the two are equal when all the terms have the same sign, that is, when the particle never reverses. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Hai vật cùng vị trí đầu và cuối thì có cùng độ dịch chuyển, dù đi bằng đường nào. Một vòng khép kín cho $\Delta x = 0$ nhưng $s > 0$.

Two bodies with the same initial and final positions have the same displacement, whatever their paths. A closed round trip gives $\Delta x = 0$ but $s > 0$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy quãng đường làm độ dịch chuyển khi vật đổi chiều: người đi 120 m về phía đông rồi 45 m về phía tây có $\Delta x = 75$ m, còn $s = 165$ m.

Using distance in place of displacement when the body reverses: a walker going 120 m east then 45 m west has $\Delta x = 75$ m but $s = 165$ m.

2.2. Vận tốc, tốc độ và gia tốc — Velocity, speed and acceleration

ĐỊNH NGHĨA 2.5 (Vận tốc trung bình và tốc độ trung bình) / DEFINITION 2.5 (Average velocity and average speed) — Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian Δt là v_m

$= \Delta x / \Delta t$, đại lượng đại số cùng dấu với Δx . Tốc độ trung bình là $s / \Delta t$, luôn không âm. Hai đại lượng này bằng nhau về độ lớn chỉ khi chất điểm không đổi chiều.

The average velocity over a time interval Δt is $v_m = \Delta x / \Delta t$, a signed quantity with the sign of Δx . The average speed is $s / \Delta t$ and is never negative. The two have equal magnitude only when the particle does not reverse.

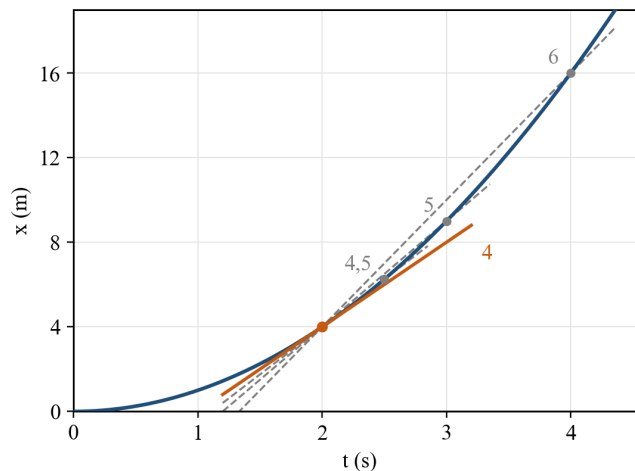
ĐỊNH NGHĨA 2.6 (Vận tốc tức thời) / DEFINITION 2.6 (Instantaneous velocity) — Vận tốc tức thời tại thời điểm t là giá trị mà vận tốc trung bình v_m tiến tới khi khoảng thời gian Δt bắt đầu từ t dần tới 0. Trên đồ thị $x-t$, nó là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm đang xét.

The instantaneous velocity at time t is the value that the average velocity v_m approaches as the interval Δt starting at t shrinks to 0. On an $x-t$ graph it is the slope of the tangent at the point in question.

$$v = \Delta x / \Delta t \text{ khi } \Delta t \text{ dần tới } 0 \quad (2.1)$$

Hình 2.1 cho thấy giới hạn này với $x = t^2$ (x tính bằng mét, t bằng giây). Từ điểm $t = 2$ s, các cát tuyến nối tới $t = 4$ s, 3 s, 2,5 s có hệ số góc 6; 5; 4,5 m/s, tức là vận tốc trung bình trên các khoảng $\Delta t = 2$ s, 1 s, 0,5 s. Hệ số góc giảm dần về 4 m/s, đúng bằng $2t$ tại $t = 2$ s: $\Delta x / \Delta t = (4\Delta t + \Delta t^2) / \Delta t = 4 + \Delta t$, tiến tới 4 khi Δt dần tới 0.

Figure 2.1 shows this limit for $x = t^2$ (x in metres, t in seconds). From the point $t = 2$ s, the chords reaching to $t = 4$ s, 3 s, 2.5 s have slopes 6, 5, 4.5 m/s, the average velocities over $\Delta t = 2$ s, 1 s, 0.5 s. The slope falls towards 4 m/s, which is $2t$ at $t = 2$ s: for the interval Δt after $t = 2$ s, $\Delta x / \Delta t = (4\Delta t + \Delta t^2) / \Delta t = 4 + \Delta t$, which tends to 4 as Δt tends to 0.



Hình 2.1. Cát tuyến của $x = t^2$ xuất phát từ $t = 2$ s tiến tới tiếp tuyến; số ghi cạnh đường là hệ số góc, đơn vị m/s

Figure 2.1. Chords of $x = t^2$ starting at $t = 2$ s approach the tangent; the number beside each line is its slope in m/s

ĐỊNH NGHĨA 2.7 (Gia tốc) / DEFINITION 2.7 (Acceleration) — Gia tốc trung bình là $a_m = \Delta v / \Delta t$. Gia tốc tức thời là giá trị a_m tiến tới khi Δt dần tới 0; trên đồ thị $v-t$, nó là hệ số góc của tiếp tuyến. Đơn vị m/s^2 . Trong chuyển động thẳng, a là đại lượng đại số.

The average acceleration is $a_m = \Delta v / \Delta t$. The instantaneous acceleration is the value a_m approaches as Δt tends to 0; on a $v-t$ graph it is the slope of the tangent. Its unit is m/s^2 . In rectilinear motion a is a signed quantity.

$$a = \Delta v / \Delta t \text{ khi } \Delta t \text{ dần tới } 0 \quad (2.2)$$

TÍNH CHẤT 2.8 (Nhanh dần và chậm dần) / PROPERTY 2.8 (Speeding up and slowing down) — Chuyển động nhanh dần khi v và a cùng dấu (tốc độ tăng); chậm dần khi v và a ngược dấu (tốc độ giảm). Dấu của a một mình không cho biết nhanh dần hay chậm dần.

The motion speeds up when v and a have the same sign (the speed grows) and slows down when they have opposite signs (the speed falls). The sign of a alone does not tell which.

Vật ném thẳng đứng lên có $a = -g < 0$ suốt hành trình. Khi đi lên, $v > 0$ nên chậm dần; khi đi xuống, $v < 0$ nên nhanh dần.

A body thrown straight up has $a = -g < 0$ throughout. On the way up $v > 0$, so it slows down; on the way down $v < 0$, so it speeds up.

ĐỊNH LÝ 2.9 (Trung bình điều hòa) / THEOREM 2.9 (Harmonic mean) — Chất điểm đi hai quãng đường bằng nhau theo cùng một chiều với tốc độ v_1 rồi v_2 (mỗi quãng chuyển động đều) thì tốc độ trung bình cả quãng là trung bình điều hòa của v_1, v_2 :

A particle covers two equal distances in the same direction at speeds v_1 then v_2 (each stretch at constant speed). Its average speed over the whole path is the harmonic mean of v_1 and v_2 :

$$v_m = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) \quad (2.3)$$

Chứng minh. / Proof.

Gọi mỗi quãng dài s . Thời gian hai quãng là s/v_1 và s/v_2 . Tốc độ trung bình bằng tổng quãng đường chia tổng thời gian:

Let each stretch have length s . The two times are s/v_1 and s/v_2 . The average speed is total distance over total time:

$$v_m = 2s/(s/v_1 + s/v_2) = 2/(1/v_1 + 1/v_2) = 2v_1v_2/(v_1 + v_2)$$

■

HỆ QUẢ 2.10 (Quãng bằng nhau, thời gian bằng nhau) / COROLLARY 2.10 (Equal distances, equal times) — Với n quãng đường bằng nhau đi với các tốc độ $v_1, \dots, v_n$, tốc độ trung bình là $n/(1/v_1 + \dots + 1/v_n)$. Với n khoảng thời gian bằng nhau, tốc độ trung bình là trung bình cộng $(v_1 + \dots + v_n)/n$.

For n equal distances at speeds $v_1, \dots, v_n$, the average speed is $n/(1/v_1 + \dots + 1/v_n)$. For n equal time intervals it is the arithmetic mean $(v_1 + \dots + v_n)/n$.

Chứng minh. / Proof.

Quãng bằng nhau: lặp lại phép tính của định lý trên với n quãng, tổng thời gian là $s(1/v_1 + \dots + 1/v_n)$ còn tổng quãng là ns .

Equal distances: repeat the calculation above with n stretches; the total time is $s(1/v_1 + \dots + 1/v_n)$ and the total distance is ns .

Thời gian bằng nhau, mỗi đoạn kéo dài τ : tổng quãng đường là $(v_1 + \dots + v_n)\tau$, tổng thời gian là $n\tau$, chia ra trung bình cộng.

Equal times, each lasting τ : the total distance is $(v_1 + \dots + v_n)\tau$ and the total time is $n\tau$, which gives the arithmetic mean. ■

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Quãng bằng nhau: trung bình điều hòa. Thời gian bằng nhau: trung bình cộng. Tốc độ trung bình KHÔNG phải là trung bình cộng các tốc độ khi quãng đường bằng nhau.

Equal distances: harmonic mean. Equal times: arithmetic mean. The average speed is NOT the arithmetic mean of the speeds when the distances are equal.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy $(v_1 + v_2)/2$ cho hai nửa quãng đường: đi 30 km/h nửa đầu và 60 km/h nửa sau cho tốc độ trung bình 40 km/h, không phải 45 km/h.

Taking $(v_1 + v_2)/2$ for two half-distances: 30 km/h over the first half and 60 km/h over the second give an average speed of 40 km/h, not 45 km/h.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho tốc độ theo từng nửa quãng đường nhưng nửa sau lại chia theo thời gian. Ghi rõ đại lượng nào được chia đều: quãng bằng nhau thì trung bình điều hòa, thời gian bằng nhau thì trung bình cộng. Tổng quãng AB không cho nên phải tự triệt tiêu.

The speeds are given for each half of the distance, but the second half is split by time. State which quantity is split evenly: equal distances call for the harmonic mean, equal times for the arithmetic mean. The length AB is not given, so it must cancel.

VÍ DỤ 2.1 (Phân biệt Δx và s) / EXAMPLE 2.1 (Displacement versus distance) — Người chạy trên đường thẳng đi 120 m về phía đông trong 30 s, nghỉ 10 s, rồi chạy 45 m về phía tây trong 15 s. Tính độ dịch chuyển, quãng đường, vận tốc trung bình và tốc độ trung bình trên cả 55 s.

A runner on a straight track goes 120 m east in 30 s, rests for 10 s, then runs 45 m west in 15 s. Find the displacement, the distance travelled, the average velocity and the average speed over the whole 55 s.

Lời giải. / Solution.

1. Chọn trục Ox hướng đông, gốc tại chỗ xuất phát. Vị trí cuối: $x = 120 - 45 = 75$ m nên $\Delta x = 75$ m.

Take Ox pointing east with the origin at the start. The final position is $x = 120 - 45 = 75$ m, so $\Delta x = 75$ m.

2. Chật điểm đổi chiều nên quãng đường là tổng hai đoạn: $s = 120 + 45 = 165$ m.

The particle reverses, so the distance is the sum of the two stretches: $s = 120 + 45 = 165$ m.

3. Thời gian cả hành trình: $\Delta t = 30 + 10 + 15 = 55$ s. Nghỉ 10 s vẫn tính vào Δt .

Total time: $\Delta t = 30 + 10 + 15 = 55$ s. The 10 s rest counts towards Δt .

$$v_m = \Delta x / \Delta t, \text{ tốc độ trung bình} = s / \Delta t$$

Vận tốc trung bình là $75/55 \approx 1,36$ m/s theo chiều đông; tốc độ trung bình là $165/55 = 3,00$ m/s. Vậy hai đại lượng khác nhau vì người chạy đổi chiều.

The average velocity is $75/55 \approx 1.36$ m/s eastward; the average speed is $165/55 = 3.00$ m/s. Hence the two differ because the runner reverses. ■

VÍ DỤ 2.2 (Hai kiểu chia: theo quãng và theo thời gian) / EXAMPLE 2.2 (Two kinds of split: by distance and by time) — Ô tô chạy từ A đến B. Nửa đầu quãng đường đi với tốc độ

30 km/h. Với nửa quãng đường còn lại, nửa thời gian đầu đi với 40 km/h, nửa thời gian sau đi với 60 km/h. Tìm tốc độ trung bình trên cả quãng AB.

A car runs from A to B. It covers the first half of the distance at 30 km/h. Over the second half, it drives at 40 km/h for the first half of the time and at 60 km/h for the second half of the time. Find the average speed over the whole of AB.

Lời giải. / Solution.

1. Nửa quãng sau chia theo thời gian bằng nhau nên tốc độ trung bình trên nửa đó là trung bình cộng: $(40 + 60)/2 = 50$ km/h.

The second half is split into equal times, so its average speed is the arithmetic mean: $(40 + 60)/2 = 50$ km/h.

2. Cả quãng gồm hai nửa quãng đường bằng nhau với tốc độ trung bình 30 km/h và 50 km/h, nên dùng trung bình điều hòa:

The whole path is two equal distances at average speeds 30 km/h and 50 km/h, so the harmonic mean applies:

$$v_m = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) \quad (2.3)$$

3. Thay số bằng đơn vị km/h: $2 \cdot 30 \cdot 50 / (30 + 50) = 3000/80 = 37,5$. Kiểm tra với AB = 120 km: nửa đầu mất 2 h, nửa sau 60 km với 50 km/h mất 1,2 h, tổng 3,2 h, và $120/3,2 = 37,5$ km/h.

Substituting in km/h: $2 \cdot 30 \cdot 50 / (30 + 50) = 3000/80 = 37.5$. Check with AB = 120 km: the first half takes 2 h, the second half of 60 km at 50 km/h takes 1.2 h, total 3.2 h, and $120/3.2 = 37.5$ km/h.

Vậy tốc độ trung bình trên cả quãng AB là 37,5 km/h, không phụ thuộc độ dài AB.

Hence the average speed over the whole of AB is 37.5 km/h, independent of the length of AB. ■

2.3. Đồ thị chuyển động thẳng — Graphs of rectilinear motion

TÍNH CHẤT 2.11 (Ý nghĩa hệ số góc) / PROPERTY 2.11 (Meaning of the slope) — Trên đồ thị x–t: hệ số góc của đoạn thẳng nối hai điểm là vận tốc trung bình giữa hai thời điểm ấy; hệ số góc của tiếp tuyến là vận tốc tức thời. Trên đồ thị v–t, hệ số góc của tiếp tuyến là gia tốc tức thời. Đồ thị x–t thẳng ứng với vận tốc không đổi; đồ thị v–t thẳng ứng với gia tốc không đổi.

On an x–t graph, the slope of the segment joining two points is the average velocity between those instants, and the slope of the tangent is the instantaneous velocity. On a v–t graph, the slope of the tangent is the instantaneous acceleration. A straight x–t graph means constant velocity; a straight v–t graph means constant acceleration.

ĐỊNH LÝ 2.12 (Diện tích dưới đồ thị v–t) / THEOREM 2.12 (Area under the v–t graph) — Độ dịch chuyển trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 bằng diện tích đại số giới hạn bởi đồ thị v–t, trục thời gian và hai đường thẳng đứng $t = t_1$, $t = t_2$: phần nằm trên trục t tính dương, phần nằm dưới tính âm. Tương tự, diện tích đại số dưới đồ thị a–t bằng độ biến thiên vận tốc Δv .

The displacement between t_1 and t_2 equals the signed area bounded by the v–t graph, the time axis and the vertical lines $t = t_1$, $t = t_2$: area above the t axis counts as positive, area below as negative.

Likewise, the signed area under an a–t graph equals the change in velocity Δv .

Chứng minh. / Proof.

Chia khoảng thời gian thành các đoạn Δt_i đủ ngắn để vận tốc trong mỗi đoạn xem như không đổi, bằng v_i . Khi đó độ dịch chuyển trong đoạn là $v_i \Delta t_i$, chính là diện tích hình chữ nhật cao v_i , rộng Δt_i , mang dấu của v_i .

Divide the interval into pieces Δt_i short enough for the velocity in each to be taken as constant, v_i . The displacement in that piece is $v_i \Delta t_i$, the area of a rectangle of height v_i and width Δt_i , carrying the sign of v_i .

$$\Delta x = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_n \Delta t_n \quad (2.4)$$

Chia càng mịn thì tổng các hình chữ nhật càng sát miền dưới đồ thị. Khi v không đổi từng đoạn hoặc biến đổi tuyến tính, miền ấy là hình chữ nhật, tam giác, hình thang và phép cộng cho kết quả đúng. Lập luận cho $a-t$ giống hệt, với a và Δv thay cho v và Δx .

The finer the division, the closer the sum of rectangles hugs the region under the graph. When v is constant on pieces or varies linearly, the region is a rectangle, triangle or trapezium and the sum is exact. The argument for $a-t$ is identical, with a and Δv in place of v and Δx . ■

NHẬN XÉT / REMARK — Diện tích đại số cho độ dịch chuyển; quãng đường là tổng các diện tích lấy giá trị tuyệt đối, tức diện tích dưới đồ thị $|v|-t$. Khi đọc đồ thị $v-t$, tìm trước các thời điểm đồ thị cắt trục t : đó là các lúc đổi chiều và là chỗ phải tách miền.

The signed area gives displacement; the distance travelled is the sum of the areas taken as absolute values, the area under the $|v|-t$ graph. When reading a $v-t$ graph, first locate where it crosses the t axis: those are the instants of reversal and the places where the region must be split.

Đồ thị Graph	Hệ số góc cho The slope gives	Diện tích dưới đồ thị cho The area under it gives
$x-t$ $x-t$	vận tốc v the velocity v	không có ý nghĩa vật lí no physical meaning
$v-t$ $v-t$	gia tốc a the acceleration a	độ dịch chuyển Δx the displacement Δx
$a-t$ $a-t$	độ giật, ngoài chương trình the jerk, beyond the course	độ biến thiên vận tốc Δv the change in velocity Δv

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hệ số góc đi xuống một bậc: $x-t \Rightarrow v-t \Rightarrow a-t$. Diện tích đi lên một bậc: $a-t \Rightarrow v-t \Rightarrow x-t$. Đơn vị kiểm tra: m/s nhân s ra m , m/s^2 nhân s ra m/s .

Slope steps down one level: $x-t \Rightarrow v-t \Rightarrow a-t$. Area steps up one level: $a-t \Rightarrow v-t \Rightarrow x-t$. Unit check: m/s times s gives m , m/s^2 times s gives m/s .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đọc vận tốc từ độ cao của đồ thị $x-t$ thay vì từ độ dốc: hai vật cắt nhau trên $x-t$ là gặp nhau, không phải cùng vận tốc; vận tốc bằng nhau khi hai tiếp tuyến song song.

Reading velocity from the height of an $x-t$ graph instead of its steepness: two curves crossing on $x-t$ means the bodies meet, not that their velocities are equal; the velocities are equal where the tangents are parallel.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đồ thị $v-t$ gồm bốn đoạn thẳng. Hỏi về độ dịch chuyển thì lấy diện tích đại số; hỏi về quãng đường thì tách tại chỗ v đổi dấu. Gia tốc từng giai đoạn là hệ số góc. Vị trí lúc đổi chiều cần cộng thêm tọa độ ban đầu x_0 .

The $v-t$ graph has four straight pieces. For displacement take the signed area; for distance split where v changes sign. The acceleration in each stage is the slope. The position at reversal needs the initial coordinate x_0 added.

VÍ DỤ 2.3 (Đọc đồ thị $v-t$, tách miền tại chỗ đổi dấu) / EXAMPLE 2.3 (Reading a $v-t$ graph, splitting at the sign change) —

Chất điểm chuyển động thẳng, lúc $t = 0$ ở $x_0 = 5$ m. Đồ thị $v-t$ ở Hình 2.2: v tăng đều từ 0 đến 8 m/s trong 4 s, giữ 8 m/s đến $t = 10$ s, giảm đều tới -4 m/s ở $t = 13$ s, rồi giữ -4 m/s đến $t = 16$ s. Tìm gia tốc từng giai đoạn, thời điểm và vị trí đổi chiều, độ dịch chuyển, quãng đường, vận tốc trung bình và tốc độ trung bình trong 16 s.

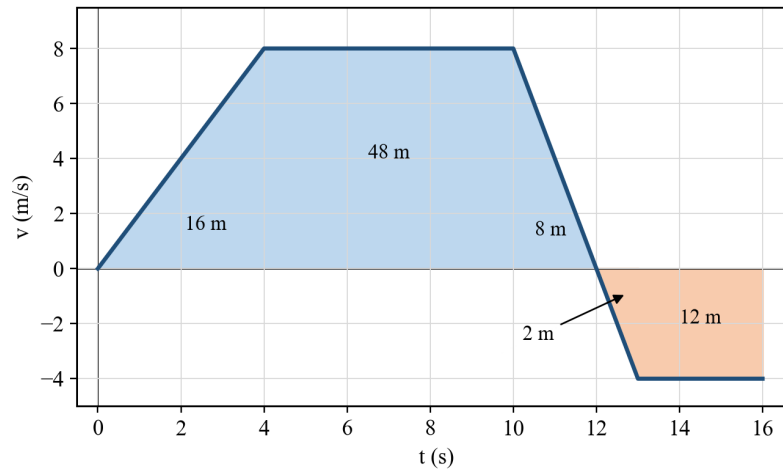
A particle moves in a straight line, at $x_0 = 5$ m when $t = 0$. The $v-t$ graph in Figure 2.2: v rises uniformly from 0 to 8 m/s in 4 s, stays at 8 m/s until $t = 10$ s, falls uniformly to -4 m/s at $t = 13$ s, then stays at -4 m/s until $t = 16$ s. Find the acceleration in each stage, the instant and position of reversal, the displacement, the distance travelled, and the average velocity and average speed over the 16 s.

Lời giải. / Solution.

1. Gia tốc là hệ số góc: $a = 8/4 = 2 \text{ m/s}^2$ (0–4 s), $a = 0$ (4–10 s), $a = (-4 - 8)/3 = -4 \text{ m/s}^2$ (10–13 s), $a = 0$ (13–16 s).
Acceleration is the slope: $a = 8/4 = 2 \text{ m/s}^2$ (0–4 s), $a = 0$ (4–10 s), $a = (-4 - 8)/3 = -4 \text{ m/s}^2$ (10–13 s), $a = 0$ (13–16 s).
2. Đồ thị cắt trục t khi $8 - 4(t - 10) = 0$, tức $t = 12$ s: vật đổi chiều lúc này.
The graph crosses the t axis when $8 - 4(t - 10) = 0$, that is at $t = 12$ s: the particle reverses then.
3. Diện tích các miền: 0–4 s: $(1/2) \cdot 4 \cdot 8 = 16$ m; 4–10 s: $6 \cdot 8 = 48$ m; 10–12 s: $(1/2) \cdot 2 \cdot 8 = 8$ m (dương); 12–13 s: $(1/2) \cdot 1 \cdot 4 = 2$ m (âm); 13–16 s: $3 \cdot 4 = 12$ m (âm).
Areas: 0–4 s: $(1/2) \cdot 4 \cdot 8 = 16$ m; 4–10 s: $6 \cdot 8 = 48$ m; 10–12 s: $(1/2) \cdot 2 \cdot 8 = 8$ m (positive); 12–13 s: $(1/2) \cdot 1 \cdot 4 = 2$ m (negative); 13–16 s: $3 \cdot 4 = 12$ m (negative).
4. Đến lúc đổi chiều đã đi $16 + 48 + 8 = 72$ m theo chiều dương nên vị trí là $x = 5 + 72 = 77$ m.
By the reversal the particle has gone $16 + 48 + 8 = 72$ m in the positive direction, so $x = 5 + 72 = 77$ m.
5. Độ dịch chuyển: $\Delta x = 72 - 2 - 12 = 58$ m. Quãng đường: $s = 72 + 2 + 12 = 86$ m.
Displacement: $\Delta x = 72 - 2 - 12 = 58$ m. Distance: $s = 72 + 2 + 12 = 86$ m.

Vận tốc trung bình là $58/16 = 3,625$ m/s; tốc độ trung bình là $86/16 = 5,375$ m/s. Vậy vật đổi chiều tại $t = 12$ s ở $x = 77$ m, và kết thúc tại $x = 63$ m.

The average velocity is $58/16 = 3.625$ m/s; the average speed is $86/16 = 5.375$ m/s. Hence the particle reverses at $t = 12$ s at $x = 77$ m and ends at $x = 63$ m. ■



Hình 2.2. Đồ thị $v-t$ của Ví dụ 2.3; miền xanh là độ dịch chuyển dương, miền cam là âm, số ghi là diện tích tính bằng mét

Figure 2.2. The $v-t$ graph of Example 2.3; blue regions are positive displacement, orange regions negative, numbers are areas in metres

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cộng diện tích mọi miền để được độ dịch chuyển mà không đổi dấu phần dưới trục t . Với Ví dụ 2.3 đáp số sai là $72 + 2 + 12 = 86$ m cho Δx .

Adding the areas of all regions to get the displacement without giving the part below the t axis a minus sign. In Example 2.3 the wrong answer is $72 + 2 + 12 = 86$ m for Δx .

2.4. Chuyển động thẳng biến đổi đều — Uniformly accelerated motion

ĐỊNH NGHĨA 2.13 (Chuyển động thẳng biến đổi đều) / DEFINITION 2.13 (Uniformly accelerated motion) — Chuyển động thẳng biến đổi đều là chuyển động thẳng có gia tốc a không đổi. Đồ thị $v-t$ là một đường thẳng có hệ số góc a .

Uniformly accelerated motion is rectilinear motion with constant acceleration a . Its $v-t$ graph is a straight line of slope a .

ĐỊNH LÝ 2.14 (Bốn phương trình của chuyển động biến đổi đều) / THEOREM 2.14 (The four equations of constant acceleration) — Với chuyển động thẳng có gia tốc a không đổi, vận tốc v_0 và tọa độ x_0 ở $t = 0$, bốn phương trình sau liên hệ x , v , t , a (mỗi phương trình thiếu đúng một đại lượng, xem bảng bên dưới các công thức):

For rectilinear motion with constant acceleration a , velocity v_0 and coordinate x_0 at $t = 0$, the following four equations link x , v , t and a (each lacks exactly one quantity, see the table below the formulas):

$$v = v_0 + at \quad (2.5)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (2.6)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (2.7)$$

$$x - x_0 = (v_0 + v)t/2 \quad (2.8)$$

Chứng minh. / Proof.

Phương trình (2.5): gia tốc không đổi nên $a = (v - v_0)/t$ đúng với mọi khoảng, suy ra $v = v_0 + at$.

Equation (2.5): the acceleration is constant, so $a = (v - v_0)/t$ holds over every interval, giving $v = v_0 + at$.

Phương trình (2.8): đồ thị $v-t$ là đường thẳng nên miền dưới nó (Hình 2.3) là hình thang có hai đáy v_0, v và chiều cao t . Theo định lý về diện tích, $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$.

Equation (2.8): the $v-t$ graph is a straight line, so the region under it (Figure 2.3) is a trapezium with parallel sides v_0, v and height t . By the area theorem, $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$.

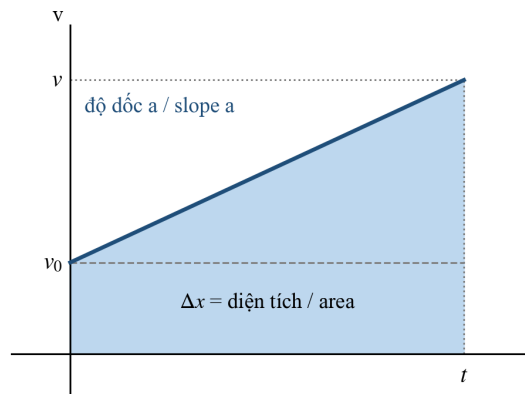
Phương trình (2.6): thay v từ (2.5) vào (2.8): $x - x_0 = (2v_0 + at)t/2 = v_0t + at^2/2$.

Equation (2.6): substitute v from (2.5) into (2.8): $x - x_0 = (2v_0 + at)t/2 = v_0t + at^2/2$.

Phương trình (2.7): rút $t = (v - v_0)/a$ từ (2.5) rồi thay vào (2.8):

Equation (2.7): take $t = (v - v_0)/a$ from (2.5) and put it into (2.8):

$$x - x_0 = (v_0 + v)(v - v_0)/(2a) = (v^2 - v_0^2)/(2a)$$



Hình 2.3. Đồ thị $v-t$ của chuyển động biến đổi đều: miền dưới đường thẳng là hình thang, diện tích bằng độ dịch chuyển

Figure 2.3. The $v-t$ graph of uniformly accelerated motion: the region under the line is a trapezium whose area is the displacement

Phương trình Equation	Không chứa Does not contain	Dùng khi đề không cho Use when the problem omits
$v = v_0 + at$ $v = v_0 + at$	$x - x_0$ $x - x_0$	quãng đường the displacement
$x = x_0 + v_0t + at^2/2$ $x = x_0 + v_0t + at^2/2$	v	vận tốc cuối the final velocity
$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$	t	thời gian the time

Phương trình <i>Equation</i>	Không chứa <i>Does not contain</i>	Dùng khi đề không cho <i>Use when the problem omits</i>
$x - x_0 = (v_0 + v)t/2$ $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$	a	gia tốc <i>the acceleration</i>

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Bốn phương trình (2.5) đến (2.8) và quy tắc chọn: gạch tên đại lượng đề không cho và không hỏi, rồi lấy phương trình thiếu đúng đại lượng ấy.
The four equations (2.5) to (2.8) and the selection rule: strike out the quantity the problem neither gives nor asks, then take the equation that lacks exactly that quantity.

HỆ QUẢ 2.15 (Quãng đường trong các khoảng thời gian bằng nhau) / COROLLARY 2.15 (Distances in equal time intervals) — Chia chuyển động biến đổi đều thành các khoảng thời gian bằng nhau τ liên tiếp thì hiệu hai quãng đường kế nhau không đổi và bằng $a\tau^2$. Nếu xuất phát từ nghỉ, các quãng đi được trong các khoảng τ liên tiếp tỉ lệ $1 : 3 : 5 : \dots$, và tổng quãng từ đầu tỉ lệ với bình phương thời gian.
Divide uniformly accelerated motion into consecutive equal time intervals τ : the difference between successive distances is constant and equals $a\tau^2$. Starting from rest, the distances in consecutive intervals τ are in the ratio $1 : 3 : 5 : \dots$, and the total distance from the start is proportional to the square of the time.

Chứng minh. / Proof.

Quãng đường trong khoảng thứ n , từ $(n-1)\tau$ đến $n\tau$, là hiệu hai giá trị của (2.6):

The distance in the n -th interval, from $(n-1)\tau$ to $n\tau$, is the difference of two values of (2.6):

$$s_n = v_0\tau + (2n-1)a\tau^2/2 \quad (2.9)$$

Hiệu $s_{n+1} - s_n = a\tau^2$, không phụ thuộc n . Khi $v_0 = 0$, s_n tỉ lệ với $2n-1$, tức $1 : 3 : 5 : \dots$. Tổng n khoảng đầu là $(1+3+\dots+(2n-1))a\tau^2/2 = n^2a\tau^2/2$, tỉ lệ với n^2 .

The difference $s_{n+1} - s_n = a\tau^2$ does not depend on n . For $v_0 = 0$, s_n is proportional to $2n-1$, that is $1 : 3 : 5 : \dots$. The first n intervals add up to $(1+3+\dots+(2n-1))a\tau^2/2 = n^2a\tau^2/2$, proportional to n^2 . ■

HỆ QUẢ 2.16 (Thời gian qua các đoạn bằng nhau) / COROLLARY 2.16 (Time through equal stretches) — Vật xuất phát từ nghỉ, chuyển động biến đổi đều qua các đoạn đường bằng nhau liên tiếp. Nếu đoạn thứ nhất mất t_1 thì đoạn thứ n mất
A body starts from rest and moves with constant acceleration through consecutive equal stretches. If the first stretch takes t_1 , the n -th stretch takes

$$t_n = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \quad (2.10)$$

Chứng minh. / Proof.

Gọi mỗi đoạn dài ℓ . Từ (2.6) với $v_0 = 0$, thời gian đi n đoạn đầu là $T_n = \sqrt{2n\ell/a}$, nên $T_n = t_1\sqrt{n}$.

Let each stretch have length ℓ . From (2.6) with $v_0 = 0$, the time for the first n stretches is $T_n = \sqrt{2n\ell/a}$, so $T_n = t_1\sqrt{n}$.

Thời gian riêng của đoạn thứ n là hiệu $T_n - T_{n-1} = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

The time of the n -th stretch alone is the difference $T_n - T_{n-1} = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$. ■

HỆ QUẢ 2.17 (Vận tốc ở giữa thời gian và giữa quãng đường) / COROLLARY 2.17

(Velocity at mid-time and at mid-path) — Trong chuyển động biến đổi đều từ vận tốc v_0 đến v (vật không đổi chiều), vận tốc tại thời điểm chính giữa là $(v_0 + v)/2$ và bằng vận tốc trung bình. Vận tốc tại vị trí chính giữa quãng đường là

In uniformly accelerated motion from v_0 to v (the body does not reverse), the velocity at the middle instant is $(v_0 + v)/2$ and equals the average velocity. The velocity at the middle of the path is

$$v_x = \sqrt{(v_0^2 + v^2)/2} \quad (2.11)$$

Chứng minh. / Proof.

Giữa thời gian: (2.5) cho $v_t = v_0 + a(t/2) = (v_0 + v)/2$, đúng bằng v_m theo (2.8).

Mid-time: (2.5) gives $v_t = v_0 + a(t/2) = (v_0 + v)/2$, which is v_m by (2.8).

Giữa quãng: gọi v_x là vận tốc ở trung điểm. Áp dụng (2.7) cho nửa đầu và nửa sau, mỗi nửa dài $\Delta x/2$:

Mid-path: let v_x be the velocity at the midpoint. Apply (2.7) to the first and second halves, each of length $\Delta x/2$:

$$v_x^2 - v_0^2 = a\Delta x = v^2 - v_x^2$$

Suy ra $2v_x^2 = v_0^2 + v^2$.

Hence $2v_x^2 = v_0^2 + v^2$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Vì $(v_0^2 + v^2)/2 \geq ((v_0 + v)/2)^2$ (hiệu bằng $((v - v_0)/2)^2$), vận tốc ở giữa quãng đường luôn không nhỏ hơn vận tốc ở giữa thời gian, dấu bằng chỉ khi $v = v_0$. Vật nhanh dần đi nửa quãng đầu mất nhiều thời gian hơn nửa quãng sau, nên đến giữa quãng nó đã qua hơn nửa thời gian.

Since $(v_0^2 + v^2)/2 \geq ((v_0 + v)/2)^2$ (the difference is $((v - v_0)/2)^2$), the velocity at mid-path is never less than at mid-time, with equality only for $v = v_0$. A body speeding up spends longer on the first half of the path than on the second, so it reaches mid-path after more than half the time.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Áp dụng (2.5) đến (2.8) cho một chuyển động có gia tốc đổi giữa chừng (phanh rồi nhả phanh, hai giai đoạn khác nhau): mỗi giai đoạn phải viết phương trình riêng, nối bằng vận tốc và tọa độ tại nút.

Applying (2.5) to (2.8) to a motion whose acceleration changes midway (braking then releasing, two different values of a): each stage needs its own equations, joined through the velocity and coordinate at the node.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên dấu của a khi chậm dần: xe đi theo chiều dương và hãm phanh có $a < 0$. Dùng $a > 0$ trong (2.7) cho v^2 lớn hơn v_0^2 , vô lý.

Forgetting the sign of a when slowing down: a car moving in the positive direction and braking has $a < 0$. Using $a > 0$ in (2.7) would give v^2 larger than v_0^2 , which is absurd.

VÍ DỤ 2.4 (Chọn phương trình thiếu đại lượng chưa biết) / EXAMPLE 2.4 (Pick the equation that lacks the unknown)

— Vật xuất phát từ nghỉ, chuyển động nhanh dần đều. Nó

đi qua hai điểm A và B cách nhau 60 m trong 4,0 s, và vận tốc tại B là 20 m/s. Tìm vận tốc tại A, gia tốc, và khoảng cách từ chỗ xuất phát đến A.

A body starts from rest and speeds up uniformly. It passes two points A and B 60 m apart in 4.0 s, and its velocity at B is 20 m/s. Find the velocity at A, the acceleration, and the distance from the starting point to A.

Lời giải. / Solution.

1. Chọn chiều dương theo chuyển động. Giữa A và B biết quãng đường, thời gian và v_B ; chưa biết a nên dùng phương trình thiếu a , tức (2.8):

Take the positive direction along the motion. Between A and B the distance, the time and v_B are known and a is not, so use the equation without a , (2.8):

$$x_B - x_A = (v_A + v_B)t/2 \quad (2.8)$$

2. Suy ra $v_A = 2 \cdot 60/4 - 20 = 10$ m/s.

Hence $v_A = 2 \cdot 60/4 - 20 = 10$ m/s.

3. Gia tốc từ (2.5) giữa A và B: $a = (20 - 10)/4 = 2,5$ m/s².

The acceleration from (2.5) between A and B: $a = (20 - 10)/4 = 2.5$ m/s².

4. Từ chỗ xuất phát ($v = 0$) đến A, đề không cho thời gian nên dùng (2.7): $OA = v_A^2/(2a) = 100/5 = 20$ m.

From the start ($v = 0$) to A the time is not given, so use (2.7): $OA = v_A^2/(2a) = 100/5 = 20$ m.

Vậy $v_A = 10$ m/s, $a = 2,5$ m/s² và $OA = 20$ m.

Hence $v_A = 10$ m/s, $a = 2.5$ m/s² and $OA = 20$ m. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Người quan sát đứng yên, các toa trôi qua trước mặt. Điểm ở đầu đoàn tàu đi những đoạn bằng nhau, mỗi đoạn bằng chiều dài một toa, kể từ lúc nghỉ. Đó đúng là tình huống của (2.10), nên không cần giải từng toa.

The observer stands still while the coaches pass. The head of the train covers equal stretches, each the length of one coach, starting from rest. This is exactly the situation of (2.10), so there is no need to treat each coach separately.

VÍ DỤ 2.5 (Các đoạn đường bằng nhau liên tiếp) / EXAMPLE 2.5 (Consecutive equal stretches) — Đoàn tàu có các toa dài 20 m bắt đầu chuyển động nhanh dần đều từ nghỉ.

Người quan sát đứng ngang đầu toa thứ nhất; toa thứ nhất đi qua trước mặt người đó trong 4,0 s. Tìm gia tốc của tàu, thời gian toa thứ 9 đi qua, và vận tốc tàu khi toa thứ 9 vừa đi qua hết.

A train with coaches 20 m long starts from rest and speeds up uniformly. An observer stands level with the front of the first coach; the first coach passes him in 4.0 s. Find the acceleration of the train, the time the 9th coach takes to pass, and the speed of the train as the 9th coach finishes passing.

Lời giải. / Solution.

1. Đầu toa 1 đi 20 m từ nghỉ trong 4,0 s: $a = 2\ell/t_1^2 = 2 \cdot 20/16 = 2,5$ m/s².

The front of coach 1 covers 20 m from rest in 4.0 s: $a = 2\ell/t_1^2 = 2 \cdot 20/16 = 2.5$ m/s².

2. Thời gian toa thứ 9 theo (2.10): $t_9 = 4(\sqrt{9} - \sqrt{8}) = 4(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0,686$ s.

The time of the 9th coach by (2.10): $t_9 = 4(\sqrt{9} - \sqrt{8}) = 4(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0.686$ s.

3. Sau 9 toa tàu đã đi 180 m, và biết a , quãng đường nên dùng (2.7): $v = \sqrt{(2 \cdot 2,5 \cdot 180)} = 30$ m/s. Kiểm tra: thời gian 9 toa là $4\sqrt{9} = 12$ s và $2,5 \cdot 12 = 30$ m/s.

After 9 coaches the train has gone 180 m; with a and the distance known, use (2.7): $v = \sqrt{2 \cdot 2.5 \cdot 180} = 30 \text{ m/s}$. Check: the time for 9 coaches is $4\sqrt{9} = 12 \text{ s}$ and $2.5 \cdot 12 = 30 \text{ m/s}$.

Vậy $a = 2,5 \text{ m/s}^2$, toa thứ 9 qua trong khoảng 0,69 s và vận tốc tàu lúc ấy là 30 m/s.

Hence $a = 2.5 \text{ m/s}^2$, the 9th coach passes in about 0.69 s and the speed of the train at that moment is 30 m/s. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Toa thứ 9 chỉ mất khoảng 1/6 thời gian của toa thứ nhất ($0,686/4 \approx 0,17$). Tỉ số thời gian các toa liên tiếp là $1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 : \dots$, giảm dần như $1/(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$; công thức này cũng cho thấy với mọi n thời gian toa luôn dương và nhỏ dần.

The 9th coach takes only about 1/6 of the time of the first ($0.686/4 \approx 0.17$). The times of successive coaches are in the ratio $1 : 0.41 : 0.32 : 0.27 : \dots$, falling like $1/(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$, since $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1$.

2.5. Rơi tự do và ném thẳng đứng — Free fall and vertical throws

ĐỊNH LUẬT 2.18 (Rơi tự do) / LAW 2.18 (Free fall) — Ở gần mặt đất, nếu bỏ qua lực cản của không khí thì mọi vật rơi với cùng một gia tốc hướng xuống $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, không phụ thuộc khối lượng và hình dạng. Phạm vi: độ cao nhỏ so với bán kính Trái Đất; lực cản không khí bé so với trọng lượng.

Near the ground, if air resistance is neglected, every body falls with the same downward acceleration $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$, independent of mass and shape. Scope: heights small compared with the radius of the Earth; air resistance small compared with the weight.

Chọn trục Oy hướng lên, gốc ở mặt đất hoặc điểm ném. Khi đó gia tốc của mọi vật chỉ chịu trọng lực là $a = -g$ trong suốt hành trình, cả lúc lên lẫn lúc xuống, nên (2.5) đến (2.8) áp dụng nguyên vẹn với $a = -g$. Một vật thả rơi là trường hợp $v_0 = 0$.

Take the axis Oy pointing up, with origin at the ground or at the point of launch. The acceleration of any body acted on by weight alone is $a = -g$ throughout, going up and coming down alike, so (2.5) to (2.8) apply unchanged with $a = -g$. A dropped body is the case $v_0 = 0$.

HỆ QUẢ 2.19 (Ném thẳng đứng) / COROLLARY 2.19 (Vertical throw) — Vật ném thẳng đứng lên từ y_0 với vận tốc $v_0 > 0$ thì $y = y_0 + v_0 t - gt^2/2$ và $v = v_0 - gt$. Vật lên cao nhất sau $t = v_0/g$, độ cao cực đại so với chỗ ném là $H = v_0^2/(2g)$; thời gian đi xuống bằng thời gian đi lên và vận tốc khi trở lại chỗ ném là $-v_0$.

A body thrown straight up from y_0 with velocity $v_0 > 0$ has $y = y_0 + v_0 t - gt^2/2$ and $v = v_0 - gt$. It reaches its highest point after $t = v_0/g$, the maximum height above the launch point is $H = v_0^2/(2g)$; the time to come down equals the time to go up, and the velocity on returning to the launch point is $-v_0$.

$$y = y_0 + v_0 t - gt^2/2 \quad (2.12)$$

$$t_{\text{lên}} = v_0/g, \quad H = v_0^2/(2g) \quad (2.13)$$

Chứng minh. / Proof.

Điểm cao nhất có $v = 0$: từ (2.5) với $a = -g$, $0 = v_0 - gt$ nên $t = v_0/g$. Độ cao cực đại từ (2.7): $0 - v_0^2 = -2gH$, tức $H = v_0^2/(2g)$.

At the highest point $v = 0$: from (2.5) with $a = -g$, $0 = v_0 - gt$ so $t = v_0/g$. The maximum height from (2.7): $0 - v_0^2 = -2gH$, so $H = v_0^2/(2g)$.

Về chỗ ném: $y = y_0$ cho $v_0t - gt^2/2 = 0$, nghiệm $t = 0$ và $t = 2v_0/g$, gấp đôi thời gian lên. Khi đó $v = v_0 - 2v_0 = -v_0$.

Return to the launch point: $y = y_0$ gives $v_0t - gt^2/2 = 0$, with roots $t = 0$ and $t = 2v_0/g$, twice the time up. Then $v = v_0 - 2v_0 = -v_0$. ■

HỆ QUẢ 2.20 (Hai lần qua cùng một độ cao) / COROLLARY 2.20 (Two passes through one height) — Vật ném lên từ mặt đất với v_0 qua độ cao h ($0 < h < H$) hai lần, một lần đi lên, một lần đi xuống, với cùng tốc độ $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$. Khoảng thời gian giữa hai lần qua là
A body thrown up from the ground with v_0 passes the height h ($0 < h < H$) twice, once going up and once coming down, with the same speed $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$. The time between the two passes is

$$\Delta t = 2\sqrt{(v_0^2 - 2gh)}/g \quad (2.14)$$

Chứng minh. / Proof.

Từ (2.7) tại độ cao h : $v^2 = v_0^2 - 2gh$, nên $v = \pm\sqrt{(v_0^2 - 2gh)}$, dấu + khi lên, dấu - khi xuống.

From (2.7) at height h : $v^2 = v_0^2 - 2gh$, so $v = \pm\sqrt{(v_0^2 - 2gh)}$, plus going up and minus coming down.

Vận tốc đổi từ $+u$ sang $-u$ với gia tốc $-g$ mất thời gian $2u/g$ theo (2.5), $u = \sqrt{(v_0^2 - 2gh)}$.

The velocity changes from $+u$ to $-u$ at acceleration $-g$, which takes $2u/g$ by (2.5), with $u = \sqrt{(v_0^2 - 2gh)}$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Một phương trình (2.12) mô tả cả đường lên lẫn đường xuống, kể cả khi vật bay qua chỗ ném về phía dưới ($y < y_0$). Giải $y = h$ cho hai nghiệm t , hai nghiệm là hai lần qua độ cao h ; nghiệm âm bị loại, nghiệm dương lớn hơn thời gian bay là vật đã chạm đất.

The single equation (2.12) describes the rise and the fall, even when the body passes below the launch point ($y < y_0$). Solving $y = h$ gives two roots t , the two passes through height h ; a negative root is rejected, and a root beyond the flight time means the body has already landed.

NHẬN XÉT / REMARK — Tốc độ chạm đất của vật ném từ độ cao h với tốc độ v_0 là $\sqrt{(v_0^2 + 2gh)}$ cho mọi hướng ném thẳng đứng, lên hay xuống: (2.7) chỉ chứa v_0^2 . Ném lên rồi rơi về chỗ ném, vật có đúng vận tốc $-v_0$ và từ đó giống hệt ném xuống; hai bài có thời gian khác nhau và tốc độ cuối như nhau.

The impact speed of a body thrown from height h with speed v_0 is $\sqrt{(v_0^2 + 2gh)}$ for any vertical direction, up or down, because (2.7) contains only v_0^2 . Thrown up, the body returns to the launch point with velocity exactly $-v_0$ and from there is identical to a body thrown down; the two problems have different times and the same final speed.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vật bay lên rồi rơi xuống đất, đề hỏi thời gian chạm đất. Không tách hai đoạn. Đặt gốc ở mặt đất, trục hướng lên, viết (2.12) với $y_0 = 30$ m và đặt $y = 0$; hai nghiệm trái dấu, lấy nghiệm dương.

The body rises and then falls to the ground, and the time to land is asked. Do not split into two stages.

Put the origin at the ground, the axis up, write (2.12) with $y_0 = 30$ m and set $y = 0$; the two roots have opposite signs, so take the positive one.

VÍ DỤ 2.6 (Một phương trình cho cả lên và xuống) / EXAMPLE 2.6 (One equation for the rise and the fall) — Từ nóc nhà cao 30 m, ném thẳng đứng một quả bóng lên với vận tốc 12 m/s. Bỏ qua lực cản, $g = 9,8$ m/s². Tìm độ cao cực đại so với mặt đất, thời gian rơi chạm đất và tốc độ khi chạm đất.

From the roof of a house 30 m high a ball is thrown straight up at 12 m/s. Ignore air resistance, $g = 9.8$ m/s². Find the maximum height above the ground, the time to reach the ground and the speed on impact.

Lời giải. / Solution.

- Gốc ở mặt đất, Oy hướng lên: $y_0 = 30$ m, $v_0 = 12$ m/s, $a = -9,8$ m/s².
Origin at the ground, Oy upward: $y_0 = 30$ m, $v_0 = 12$ m/s, $a = -9.8$ m/s².
- Độ cao cực đại: $H = 144/(2 \cdot 9,8) \approx 7,35$ m trên nóc nhà, tức $30 + 7,35 \approx 37,3$ m so với mặt đất.
Maximum height: $H = 144/(2 \cdot 9.8) \approx 7.35$ m above the roof, that is $30 + 7.35 \approx 37.3$ m above the ground.
- Chạm đất khi $y = 0$: $30 + 12t - 4,9t^2 = 0$, tức $4,9t^2 - 12t - 30 = 0$. Biệt thức $144 + 588 = 732$, $\sqrt{732} \approx 27,06$, nên $t = (12 + 27,06)/9,8 \approx 3,99$ s (nghiệm âm loại).
It lands when $y = 0$: $30 + 12t - 4.9t^2 = 0$, i.e. $4.9t^2 - 12t - 30 = 0$. The discriminant is $144 + 588 = 732$, $\sqrt{732} \approx 27.06$, so $t = (12 + 27.06)/9.8 \approx 3.99$ s (the negative root is rejected).
- Tốc độ lúc chạm đất từ (2.7), không cần t : $v^2 = 144 + 2 \cdot 9,8 \cdot 30 = 732$, $v \approx 27,1$ m/s. Kiểm tra bằng (2.5): $12 - 9,8 \cdot 3,985 \approx -27,05$ m/s, dấu âm là hướng xuống.
Speed on impact from (2.7), without t : $v^2 = 144 + 2 \cdot 9.8 \cdot 30 = 732$, $v \approx 27.1$ m/s. Check with (2.5): $12 - 9.8 \cdot 3.985 \approx -27.05$ m/s, the minus sign meaning downward.

Vậy bóng lên cao nhất 37,3 m, chạm đất sau khoảng 3,99 s với tốc độ khoảng 27,1 m/s.
Hence the ball peaks at 37.3 m, lands after about 3.99 s, and hits at about 27.1 m/s. ■

VÍ DỤ 2.7 (Đặt thời gian rơi làm ẩn) / EXAMPLE 2.7 (Take the time of fall as the unknown) — Vật rơi tự do từ độ cao H xuống đất. Trong 2,0 s cuối cùng trước khi chạm đất, vật đi được quãng đường bằng $3/4$ H . Tính H và thời gian rơi, $g = 9,8$ m/s².

A body falls freely from height H to the ground. In the last 2.0 s before impact it covers a distance equal to $3/4$ of H . Find H and the total time of fall, $g = 9.8$ m/s².

Lời giải. / Solution.

- Gọi thời gian rơi là T . Quãng đường cả quãng: $H = gT^2/2$. Quãng đường đến lúc $T - 2$ là $g(T - 2)^2/2$.
Let the time of fall be T . The whole distance: $H = gT^2/2$. The distance fallen by time $T - 2$ is $g(T - 2)^2/2$.
- Phần còn lại trong 2 s cuối là $3H/4$, nên phần đã rơi trước đó là $H/4$:
The last 2 s cover $3H/4$, so the part already fallen before is $H/4$:

$$g(T - 2)^2/2 = (1/4) \cdot gT^2/2$$

3. Lấy căn hai vế (cả hai dương vì $T > 2$): $T - 2 = T/2$, nên $T = 4$ s.

Take square roots (both sides positive since $T > 2$): $T - 2 = T/2$, so $T = 4$ s.

4. $H = 9,8 \cdot 16/2 = 78,4$ m. Kiểm tra: trong 2 s đầu vật rơi $4,9 \cdot 4 = 19,6$ m = $H/4$.

$H = 9.8 \cdot 16/2 = 78.4$ m. Check: in the first 2 s the body falls $4.9 \cdot 4 = 19.6$ m = $H/4$.

Vậy vật rơi trong 4 s từ độ cao 78,4 m.

Hence the body falls for 4 s from a height of 78.4 m. ■

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Rơi tự do từ nghỉ: $v = gt$, $s = gt^2/2$, $v^2 = 2gs$. Ném lên: lên cao nhất sau v_0/g , độ cao $v_0^2/(2g)$, thời gian cả đi lẫn về $2v_0/g$.

Free fall from rest: $v = gt$, $s = gt^2/2$, $v^2 = 2gs$. Thrown up: highest point after v_0/g , height $v_0^2/(2g)$, round-trip time $2v_0/g$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tách ném lên và rơi xuống thành hai bài rồi cộng quãng đường nhầm: đi lên H , đi xuống $H + 30$ m; đừng quên vật rơi thấp hơn chỗ ném. Chọn trục và dấu một lần, dùng một phương trình.

Splitting the throw into a rise and a fall and then adding distances wrongly: up H , down $H + 30$ m; do not forget the body lands below the launch point. Fix the axis and signs once and use a single equation.

2.6. Hai vật gặp nhau và chuyển động nhiều giai đoạn — Meeting problems and multi-stage motion

ĐỊNH NGHĨA 2.21 (Chuyển động tương đối một chiều) / DEFINITION 2.21 (One-dimensional relative motion) — Với hai chất điểm 1 và 2 trên cùng một trục, chuyển động của 2 đối với 1 (hệ quy chiếu gắn với 1) được mô tả bởi hiệu: tọa độ tương đối $x_{21} = x_2 - x_1$, vận tốc tương đối $v_{21} = v_2 - v_1$, gia tốc tương đối $a_{21} = a_2 - a_1$. Hai vật gặp nhau khi $x_{21} = 0$.

For two particles 1 and 2 on the same axis, the motion of 2 relative to 1 (the frame attached to 1) is described by differences: relative coordinate $x_{21} = x_2 - x_1$, relative velocity $v_{21} = v_2 - v_1$, relative acceleration $a_{21} = a_2 - a_1$. The two meet when $x_{21} = 0$.

ĐỊNH LÝ 2.22 (Gia tốc bằng nhau) / THEOREM 2.22 (Equal accelerations) — Nếu hai chất điểm có cùng gia tốc thì chuyển động tương đối của chúng là chuyển động đều: $x_{21} = x_{21}(0) + v_{21}(0) \cdot t$. Hai vật ném thẳng đứng cùng lúc, hoặc một vật thả và một vật ném, chưa chạm đất, thuộc trường hợp này.

If two particles have the same acceleration, their relative motion is uniform: $x_{21} = x_{21}(0) + v_{21}(0) \cdot t$. Two bodies thrown vertically at the same moment, or one dropped and one thrown, before either lands, fall under this case.

Chứng minh. / Proof.

Trừ (2.6) viết cho vật 2 và vật 1 với cùng a , các số hạng $at^2/2$ triệt tiêu:

Subtract (2.6) written for body 2 and body 1 with the same a ; the terms $at^2/2$ cancel:

$$x_2 - x_1 = (x_{20} - x_{10}) + (v_{20} - v_{10})t$$

Vế phải là hàm bậc nhất của t , tức chuyển động đều với vận tốc $v_{20} - v_{10}$.

The right side is linear in t , that is uniform motion with velocity $v_{20} - v_{10}$. ■

TÍNH CHẤT 2.23 (Gặp nhau và khoảng cách nhỏ nhất) / PROPERTY 2.23 (Meeting and minimum separation) — Điều kiện gặp nhau: $x_{21}(t) = 0$ là phương trình bậc hai ẩn t khi $a_{21} \neq 0$. Biệt thức $u^2 - 2a_{21}x_{21}(0)$ dương: gặp nhau hai lần; bằng 0: chạm đúng một lần, ngay lúc vận tốc tương đối bằng 0; âm: không gặp. Khi không gặp, khoảng cách nhỏ nhất đạt lúc $v_{21} = 0$ và bằng $|x_{21}(0) - v_{21}(0)^2/(2a_{21})|$.

Meeting condition: $x_{21}(t) = 0$ is a quadratic in t when $a_{21} \neq 0$. The discriminant $u^2 - 2a_{21}x_{21}(0)$, with $u = v_{21}(0)$: positive, they meet twice; zero: exactly one touch, at the instant when the relative velocity is 0; negative: they never meet. When they do not meet, the minimum separation occurs when $v_{21} = 0$ and equals $|x_{21}(0) - v_{21}(0)^2/(2a_{21})|$.

Chứng minh. / Proof.

Viết $x_{21}(t) = x_0 + ut + bt^2/2$ với x_0, u, b là tọa độ, vận tốc, gia tốc tương đối ban đầu ($b \neq 0$), rồi hoàn thành bình phương:

Write $x_{21}(t) = x_0 + ut + bt^2/2$ with x_0, u, b the initial relative coordinate, velocity and acceleration ($b \neq 0$), and complete the square:

$$x_{21} = (b/2)(t + u/b)^2 + x_0 - u^2/(2b)$$

Giá trị cực trị $x_0 - u^2/(2b)$ đạt lúc $t = -u/b$, tức lúc $v_{21} = u + bt = 0$. Phương trình $x_{21} = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $(t + u/b)^2 = -(2/b)(x_0 - u^2/(2b))$ không âm, tức biệt thức $u^2 - 2bx_0 \geq 0$; bằng 0 thì nghiệm kép tại $v_{21} = 0$.

The extreme value $x_0 - u^2/(2b)$ occurs at $t = -u/b$, that is when $v_{21} = u + bt = 0$. The equation $x_{21} = 0$ has a solution if and only if $(t + u/b)^2 = -(2/b)(x_0 - u^2/(2b))$ is not negative, that is if the discriminant $u^2 - 2bx_0 \geq 0$; when it is 0 the root is double, at $v_{21} = 0$. ■

TÍNH CHẤT 2.24 (Nối các giai đoạn) / PROPERTY 2.24 (Joining the stages) — Chuyển động nhiều giai đoạn: chia tại mọi thời điểm gia tốc đổi. Mỗi giai đoạn dùng (2.5) đến (2.8) với a của giai đoạn đó; vận tốc và tọa độ cuối giai đoạn này là điều kiện đầu của giai đoạn sau. Gia tốc có thể nhảy, vận tốc và tọa độ không nhảy.

Multi-stage motion: split at every instant where the acceleration changes. Each stage uses (2.5) to (2.8) with its own a ; the velocity and coordinate at the end of one stage are the initial conditions of the next. The acceleration may jump; the velocity and coordinate do not.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai vật cùng chịu gia tốc $-g$, nên theo định lý về gia tốc bằng nhau chuyển động tương đối là đều. Trước khi viết hai phương trình bậc hai, hãy thử: ngay lúc B được ném, A đã rơi 5 m và có vận tốc 10 m/s hướng xuống; khoảng cách 75 m, vận tốc đến gần nhau là $40 + 10 = 50$ m/s.

Both bodies share the acceleration $-g$, so by the equal-accelerations theorem their relative motion is uniform. Before writing two quadratics, try this: at the instant B is thrown, A has fallen 5 m and moves down at 10 m/s; the gap is 75 m and the closing speed is $40 + 10 = 50$ m/s.

VÍ DỤ 2.8 (Hiệu hai chuyển động cùng gia tốc là chuyển động đều) / EXAMPLE 2.8 (Two motions with equal acceleration differ by uniform motion) — Vật A thả rơi từ đỉnh tháp cao 80 m. Sau 1,0 s, vật B được ném thẳng đứng từ chân tháp lên với vận tốc 40 m/s. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Hai vật gặp nhau lúc nào, ở độ cao bao nhiêu, và lúc ấy mỗi vật đang đi lên hay đi xuống?

Body A is dropped from the top of a tower 80 m high. After 1.0 s, body B is thrown straight up from the foot of the tower at 40 m/s. Take $g = 10 \text{ m/s}^2$. When and at what height do they meet, and is each body moving up or down then?

Lời giải. / Solution.

1. Gốc ở chân tháp, Oy lên, gốc thời gian lúc thả A. A: $y_A = 80 - 5t^2$. B bắt đầu từ $t = 1$ s: $y_B = 40(t - 1) - 5(t - 1)^2$.

Origin at the foot of the tower, Oy up, time zero when A is dropped. A: $y_A = 80 - 5t^2$. B starts at $t = 1$ s: $y_B = 40(t - 1) - 5(t - 1)^2$.

2. Khai triển $y_B = 40t - 40 - 5t^2 + 10t - 5 = 50t - 45 - 5t^2$. Cho $y_A = y_B$, các số hạng t^2 triệt tiêu:

Expand $y_B = 40t - 40 - 5t^2 + 10t - 5 = 50t - 45 - 5t^2$. Setting $y_A = y_B$, the t^2 terms cancel:

$$80 = 50t - 45$$

3. Suy ra $t = 2,5$ s, độ cao $y = 80 - 5 \cdot 6,25 = 48,75$ m. Cách kia: lúc $t = 1$ s khoảng cách 75 m, vận tốc đến gần nhau 50 m/s, mất 1,5 s, tức $t = 2,5$ s.

Hence $t = 2.5$ s and $y = 80 - 5 \cdot 6.25 = 48.75$ m. The other way: at $t = 1$ s the gap is 75 m, the closing speed 50 m/s, taking 1.5 s, so $t = 2.5$ s.

4. Vận tốc lúc gặp: $v_A = -10 \cdot 2,5 = -25$ m/s (xuống); $v_B = 40 - 10 \cdot 1,5 = 25$ m/s (lên).

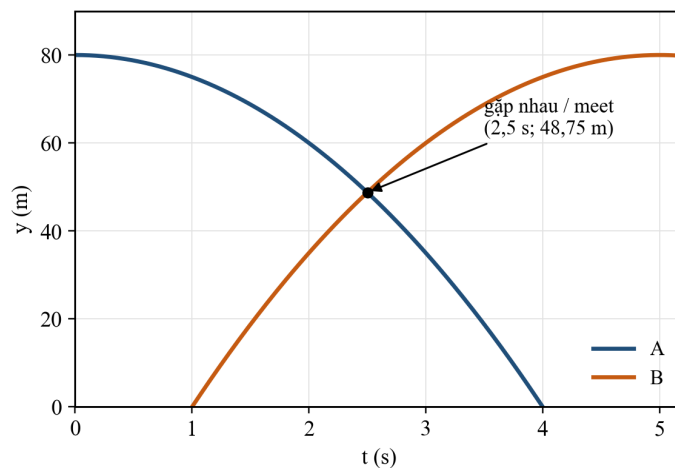
Vật B chưa tới đỉnh (đỉnh sau 4 s) nên lập luận hợp lệ.

Velocities at the meeting: $v_A = -10 \cdot 2.5 = -25$ m/s (down); $v_B = 40 - 10 \cdot 1.5 = 25$ m/s (up).

B has not yet reached its peak (which comes after 4 s), so the argument holds.

Vậy hai vật gặp nhau sau 2,5 s ở độ cao 48,75 m; A đi xuống, B đi lên, cùng tốc độ 25 m/s.

Hence they meet after 2.5 s at a height of 48.75 m; A moves down and B up, both at 25 m/s. ■



Hình 2.4. Đồ thị $y-t$ của Ví dụ 2.8: hai parabola cắt nhau tại $t = 2,5$ s

Figure 2.4. The $y-t$ graph of Example 2.8: the two parabolas intersect at $t = 2.5$ s

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Ba giai đoạn rõ ràng: tăng tốc, chạy đều, hãm. Đề đặt giới hạn vận tốc, nên cần biết tàu có đạt giới hạn ấy hay không trước khi chia giai đoạn. Thử tình huống không có giới hạn để so sánh.

Three stages are obvious: speeding up, cruising, braking. The problem sets a speed limit, so one must

know whether the train reaches the limit before splitting into stages. Try the case with no limit for comparison.

VÍ DỤ 2.9 (Tăng tốc, chạy đều, hãm) / EXAMPLE 2.9 (Speed up, cruise, brake) — Tàu điện chạy giữa hai ga cách nhau 2.400 m: tăng tốc với gia tốc $0,8 \text{ m/s}^2$, chạy đều khi đạt tốc độ giới hạn 20 m/s , rồi hãm với gia tốc $1,2 \text{ m/s}^2$ để dừng đúng ở ga sau. Tính thời gian đi hết quãng đường. Nếu bỏ giới hạn tốc độ thì thời gian ngắn nhất là bao nhiêu?

An electric train runs between two stations 2,400 m apart: it speeds up at 0.8 m/s^2 , cruises on reaching the speed limit of 20 m/s , then brakes at 1.2 m/s^2 to stop exactly at the second station. Find the time for the whole run. With no speed limit, what is the shortest possible time?

Lời giải. / Solution.

- Giai đoạn 1: $t_1 = 20/0,8 = 25 \text{ s}$, $s_1 = 20^2/(2 \cdot 0,8) = 250 \text{ m}$. Giai đoạn 3: $t_3 = 20/1,2 \approx 16,67 \text{ s}$, $s_3 = 400/2,4 \approx 166,7 \text{ m}$.
Stage 1: $t_1 = 20/0.8 = 25 \text{ s}$, $s_1 = 20^2/(2 \cdot 0.8) = 250 \text{ m}$. Stage 3: $t_3 = 20/1.2 \approx 16.67 \text{ s}$, $s_3 = 400/2.4 \approx 166.7 \text{ m}$.
- Giai đoạn 2 đi quãng $s_2 = 2400 - 250 - 166,7 \approx 1983,3 \text{ m}$ với 20 m/s , mất $t_2 \approx 99,17 \text{ s}$.
Stage 2 covers $s_2 = 2400 - 250 - 166.7 \approx 1983.3 \text{ m}$ at 20 m/s , taking $t_2 \approx 99.17 \text{ s}$.
- Tổng thời gian: $25 + 99,17 + 16,67 \approx 140,8 \text{ s}$.
Total time: $25 + 99.17 + 16.67 \approx 140.8 \text{ s}$.
- Không giới hạn: chỉ còn tăng tốc rồi hãm, đạt tốc độ cực đại v tại điểm nối. Quãng đường:
No limit: only speeding up then braking, with the peak speed v at the junction. The distance:
$$S = v^2/(2a_1) + v^2/(2a_2) \Rightarrow v^2 = 2S/(1/a_1 + 1/a_2)$$
- Thay số: $1/0,8 + 1/1,2 = 1,25 + 0,8333 \approx 2,0833$, nên $v^2 = 4800/2,0833 = 2304$ và $v = 48 \text{ m/s}$. Thời gian $T = v(1/a_1 + 1/a_2) = 48 \cdot 2,0833 = 100 \text{ s}$.
Substituting: $1/0.8 + 1/1.2 = 1.25 + 0.8333 \approx 2.0833$, so $v^2 = 4800/2.0833 = 2304$ and $v = 48 \text{ m/s}$. The time is $T = v(1/a_1 + 1/a_2) = 48 \cdot 2.0833 = 100 \text{ s}$.

Vậy với giới hạn 20 m/s , tàu mất khoảng $140,8 \text{ s}$; không giới hạn thì ngắn nhất là 100 s , với tốc độ cực đại 48 m/s .

Hence with the 20 m/s limit the run takes about 140.8 s ; with no limit the shortest time is 100 s , at a peak speed of 48 m/s . ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai xe cùng đi theo một chiều, xe sau nhanh hơn. Trong hệ quy chiếu gắn xe B (xe trước) chỉ có xe A chuyển động, với vận tốc 18 m/s hướng về B, chạy chậm dần khi phanh. Câu hỏi 'có va chạm không' thành 'xe A có dừng lại (trong hệ này) trước khi đi hết khoảng cách d không'.

The two cars travel in the same direction and the rear one is faster. In the frame attached to car B (the front one) only car A moves, at 18 m/s towards B, and it decelerates when it brakes. The question 'is there a collision' becomes 'does A come to rest (in this frame) before covering the gap d '.

VÍ DỤ 2.10 (Hệ quy chiếu gắn xe phía trước) / EXAMPLE 2.10 (The frame of the car ahead) — Xe A chạy đều 30 m/s, phía trước cách d là xe B chạy đều cùng chiều 12 m/s. Tại thời điểm phát hiện B, người lái A mất 0,5 s phản ứng rồi phanh với gia tốc 3 m/s^2 (không đổi). Tìm d nhỏ nhất để không va chạm. Nếu $d = 60 \text{ m}$ thì va chạm xảy ra lúc nào kể từ khi phát hiện, và vận tốc tương đối khi va chạm là bao nhiêu?

Car A drives at a steady 30 m/s, with car B a distance d ahead going the same way at a steady 12 m/s. At the moment A's driver notices B, there is a 0.5 s reaction time before braking at a constant 3 m/s^2 . Find the smallest d that avoids a collision. If $d = 60 \text{ m}$, when does the collision occur after the driver notices B, and what is the relative velocity at impact?

Lời giải. / Solution.

- Hệ quy chiếu gắn B: A có vận tốc tương đối $u = 30 - 12 = 18 \text{ m/s}$. Trong 0,5 s phản ứng A tiến gần $18 \cdot 0,5 = 9 \text{ m}$.
In B's frame, A has relative velocity $u = 30 - 12 = 18 \text{ m/s}$. During the 0.5 s reaction A closes $18 \cdot 0.5 = 9 \text{ m}$.
- Khi phanh, gia tốc tương đối là -3 m/s^2 ; vận tốc tương đối về 0 sau khi đi thêm $u^2/(2 \cdot 3) = 324/6 = 54 \text{ m}$ theo (2.7).
While braking, the relative acceleration is -3 m/s^2 ; the relative velocity reaches 0 after a further $u^2/(2 \cdot 3) = 324/6 = 54 \text{ m}$ by (2.7).
- Không va chạm khi $d \geq 9 + 54 = 63 \text{ m}$, nên d nhỏ nhất là 63 m (A vừa kịp chạm tới B với vận tốc tương đối 0).
No collision requires $d \geq 9 + 54 = 63 \text{ m}$, so the smallest d is 63 m (A just reaches B with relative velocity 0).
- Với $d = 60 \text{ m}$: sau thời gian phản ứng khoảng cách còn 51 m. Gọi τ là thời gian phanh đến khi va chạm: $18\tau - 1,5\tau^2 = 51$, tức $\tau^2 - 12\tau + 34 = 0$, $\tau = 6 - \sqrt{2} \approx 4,59 \text{ s}$ (lấy nghiệm nhỏ, lần gặp đầu).
For $d = 60 \text{ m}$: after the reaction time the gap is 51 m. Let τ be the braking time until impact: $18\tau - 1.5\tau^2 = 51$, i.e. $\tau^2 - 12\tau + 34 = 0$, $\tau = 6 - \sqrt{2} \approx 4.59 \text{ s}$ (take the smaller root, the first meeting).
- Vận tốc tương đối lúc va chạm: $18 - 3\tau = 3\sqrt{2} \approx 4,24 \text{ m/s}$. Thời điểm kể từ lúc phát hiện: $0,5 + 4,59 \approx 5,09 \text{ s}$.
Relative velocity at impact: $18 - 3\tau = 3\sqrt{2} \approx 4.24 \text{ m/s}$. Time since the driver noticed B: $0.5 + 4.59 \approx 5.09 \text{ s}$.

Vậy d nhỏ nhất là 63 m. Với $d = 60 \text{ m}$ va chạm xảy ra sau khoảng 5,09 s với vận tốc tương đối khoảng 4,24 m/s.

Hence the smallest d is 63 m. For $d = 60 \text{ m}$ the collision occurs after about 5.09 s at a relative velocity of about 4.24 m/s. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Khoảng cách an toàn tăng theo bình phương vận tốc tương đối ($u^2/(2a)$) nhưng chỉ tăng bậc nhất theo thời gian phản ứng ($u \cdot t_p$). Với $u = 18 \text{ m/s}$, cắt 0,5 s phản ứng chỉ bớt 9 m, còn giảm u xuống một nửa bớt tới 40,5 m.

The safe gap grows with the square of the relative velocity ($u^2/(2a)$) but only linearly with reaction time ($u \cdot t_r$). With $u = 18 \text{ m/s}$, cutting a 0.5 s reaction saves just 9 m, whereas halving u saves 40.5 m.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Xe buýt có hai giai đoạn (tăng tốc rồi đều) nên phương trình gặp nhau cũng có hai dạng. Thử giai đoạn 1 trước: nếu biệt thức âm thì người chưa đuổi kịp trong giai đoạn đó, chuyển sang giai đoạn 2 với điều kiện đầu lấy ở nút $t = 8$ s.

The bus has two stages (speeding up then steady), so the meeting equation has two forms as well. Try stage 1 first: if its discriminant is negative the runner has not caught up in that stage, so move on to stage 2 with initial conditions taken at the node $t = 8$ s.

VÍ DỤ 2.11 (Phương trình gặp nhau theo từng giai đoạn) / EXAMPLE 2.11 (The meeting equation stage by stage)

— Người chạy đều 6 m/s đuổi theo xe buýt đang đứng yên cách 40 m phía trước. Đúng lúc ấy xe buýt tăng tốc với gia tốc $0,5 \text{ m/s}^2$ cho đến khi đạt 4 m/s rồi chạy đều. Người đó có đuổi kịp không, ở đâu và lúc nào? Với khoảng cách ban đầu nào thì người đuổi kịp khi xe còn đang tăng tốc?

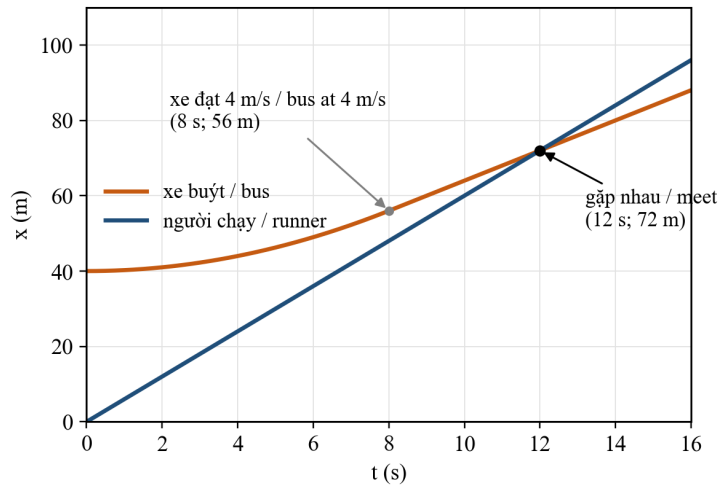
A runner at a steady 6 m/s chases a bus standing 40 m ahead. At that instant the bus accelerates at 0.5 m/s^2 until it reaches 4 m/s, then goes at a steady speed. Does the runner catch it, and where and when? For what initial gap does the runner catch it while it is still accelerating?

Lời giải. / Solution.

- Chọn gốc ở chỗ người chạy lúc $t = 0$. Giai đoạn 1 ($0 \leq t \leq 8$ s, xe đạt 4 m/s sau $4/0,5 = 8$ s): $x_{\text{xe}} = 40 + 0,25t^2$, $x_{\text{người}} = 6t$.
Origin at the runner's position at $t = 0$. Stage 1 ($0 \leq t \leq 8$ s; the bus reaches 4 m/s after $4/0.5 = 8$ s): $x_{\text{bus}} = 40 + 0.25t^2$, $x_{\text{runner}} = 6t$.
- Gặp nhau: $0,25t^2 - 6t + 40 = 0$, biệt thức $36 - 40 = -4 < 0$ nên chưa gặp trong giai đoạn 1. Tại $t = 8$ s: xe ở 56 m, người ở 48 m, hơn nhau 8 m.
Meeting: $0.25t^2 - 6t + 40 = 0$, discriminant $36 - 40 = -4 < 0$, so no meeting in stage 1. At $t = 8$ s the bus is at 56 m, the runner at 48 m, 8 m apart.
- Giai đoạn 2 ($t \geq 8$ s): $x_{\text{xe}} = 56 + 4(t - 8)$, $x_{\text{người}} = 6t$. Gặp nhau: $6t = 24 + 4t$, nên $t = 12$ s, tại $x = 72$ m.
Stage 2 ($t \geq 8$ s): $x_{\text{bus}} = 56 + 4(t - 8)$, $x_{\text{runner}} = 6t$. Meeting: $6t = 24 + 4t$, so $t = 12$ s at $x = 72$ m.
- Với khoảng cách ban đầu d , tại $t = 8$ s xe ở $d + 16$, người ở 48. Người bắt kịp trong giai đoạn 1 khi $d + 16 \leq 48$, tức $d \leq 32$ m (khoảng cách giảm suốt giai đoạn 1 vì vận tốc xe luôn dưới 6 m/s).
For an initial gap d , at $t = 8$ s the bus is at $d + 16$ and the runner at 48. The runner catches it in stage 1 if $d + 16 \leq 48$, i.e. $d \leq 32$ m (the gap shrinks throughout stage 1 because the bus speed stays below 6 m/s).

Vậy với $d = 40$ m người chạy đuổi kịp sau 12 s ở 72 m so với chỗ xuất phát; điều kiện để đuổi kịp khi xe còn tăng tốc là $d \leq 32$ m.

Hence for $d = 40$ m the runner catches the bus after 12 s, 72 m from the start; catching it while it still accelerates requires $d \leq 32$ m. ■



Hình 2.5. Đồ thị $x-t$ của Ví dụ 2.11: đường thẳng của người chạy cắt đường của xe buýt ở giai đoạn xe chạy đều

Figure 2.5. The $x-t$ graph of Example 2.11: the runner's line cuts the bus's curve in the steady stage of the bus

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Giải phương trình gặp nhau của giai đoạn 1 rồi dùng luôn cho mọi t : nghiệm tìm được phải nằm trong khoảng thời gian của giai đoạn đó, nếu không phải bỏ và sang giai đoạn sau.

Solving the stage-1 meeting equation and using it for all t : the root found must lie inside the time range of that stage, otherwise discard it and go to the next stage.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên rằng hai vật có gia tốc khác nhau thì chuyển động tương đối KHÔNG đều. Công thức $t = d/v_{21}$ chỉ đúng khi $a_{21} = 0$.

Forgetting that bodies with different accelerations have non-uniform relative motion. The formula $t = d/v_{21}$ holds only when $a_{21} = 0$.

2.7. Gia tốc thay đổi theo bậc thang — Step-wise acceleration

ĐỊNH NGHĨA 2.25 (Gia tốc bậc thang) / DEFINITION 2.25 (Step-wise acceleration) —

Gia tốc bậc thang là gia tốc có giá trị không đổi trên từng khoảng thời gian liên tiếp và nhảy từ giá trị này sang giá trị khác tại các thời điểm nút. Đồ thị $a-t$ là các đoạn nằm ngang.

Step-wise acceleration is an acceleration that is constant on each of several consecutive time intervals and jumps from one value to another at the node instants. Its $a-t$ graph consists of horizontal segments.

ĐỊNH LÝ 2.26 (Tính liên tục tại nút) / THEOREM 2.26 (Continuity at the nodes) — Với

gia tốc bậc thang (hữu hạn), vận tốc $v(t)$ là đường gấp khúc liên tục và tọa độ $x(t)$ liên tục. Đồ thị $x-t$ gồm các cung parabol nối nhau tại nút với cùng tiếp tuyến, vì v liên tục.

For a finite step-wise acceleration, the velocity $v(t)$ is a continuous broken line and the coordinate $x(t)$ is continuous. The $x-t$ graph consists of parabolic arcs joined at the nodes with a common tangent, because v is continuous.

Chứng minh. / Proof.

Trong khoảng ngắn Δt quanh nút, độ biến thiên vận tốc không vượt quá $a_{\max}\Delta t$, với $a_{\max}$ là giá trị lớn nhất của $|a|$. Khi Δt dần tới 0, độ biến thiên ấy dần tới 0, nên v không có bước nhảy.

Over a short interval Δt around a node, the change in velocity does not exceed $a_{\max}\Delta t$, where $a_{\max}$ is the largest value of $|a|$. As Δt tends to 0 this change tends to 0, so v has no jump.

Cùng cách lập luận với độ dịch chuyển, không vượt quá $|v|_{\max}\Delta t$. Hệ số góc của $x-t$ chính là v , liên tục nên hai cung parabol có cùng tiếp tuyến tại nút.

The same reasoning for the displacement, which cannot exceed $|v|_{\max}\Delta t$. The slope of $x-t$ is v , which is continuous, so the two parabolic arcs share a tangent at the node. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Lập bảng nút t, v, x . Từ nút trước, mỗi giai đoạn cho v sau bằng v trước cộng $a\Delta t$ và x sau bằng x trước cộng $v\Delta t$ cộng $a\Delta t^2/2$. Muốn tìm quãng đường, tìm trong từng giai đoạn xem v có đổi dấu không ($v = 0$ là lúc đổi chiều), rồi cộng giá trị tuyệt đối các đoạn.

Make a table of nodes t, v, x . From each node, a stage gives the later v as the earlier v plus $a\Delta t$ and the later x as the earlier x plus $v\Delta t$ plus $a\Delta t^2/2$. For the distance travelled, check in each stage whether v changes sign ($v = 0$ is a reversal), then add the absolute values of the pieces.

VÍ DỤ 2.12 (Lập bảng nút cho gia tốc bậc thang) / EXAMPLE 2.12 (A node table for step-wise acceleration) — Chất điểm chuyển động thẳng, lúc $t = 0$ ở $x = 0$ với vận tốc -4 m/s. Gia tốc: $+3$ m/s² trong $0-2$ s; 0 trong $2-5$ s; -2 m/s² trong $5-8$ s; $+1$ m/s² trong $8-12$ s. Tìm vận tốc và tọa độ ở $t = 12$ s, các thời điểm đổi chiều cùng vị trí tương ứng, và quãng đường đi được trong 12 s.

A particle moves in a straight line; at $t = 0$ it is at $x = 0$ with velocity -4 m/s. Its acceleration is $+3$ m/s² for $0-2$ s; 0 for $2-5$ s; -2 m/s² for $5-8$ s; $+1$ m/s² for $8-12$ s. Find the velocity and coordinate at $t = 12$ s, the instants of reversal with the corresponding positions, and the distance travelled in 12 s.

Lời giải. / Solution.

- Giai đoạn 1 ($0-2$ s): $v = -4 + 3 \cdot 2 = 2$ m/s; $x = -4 \cdot 2 + 3 \cdot 4/2 = -2$ m. Vận tốc đổi dấu: $-4 + 3t = 0$ cho $t = 4/3$ s, $x = -4 \cdot (4/3) + 1,5 \cdot (16/9) = -8/3 \approx -2,67$ m.
Stage 1 ($0-2$ s): $v = -4 + 3 \cdot 2 = 2$ m/s; $x = -4 \cdot 2 + 3 \cdot 4/2 = -2$ m. The velocity changes sign: $-4 + 3t = 0$ gives $t = 4/3$ s, $x = -4 \cdot (4/3) + 1,5 \cdot (16/9) = -8/3 \approx -2,67$ m.
- Giai đoạn 2 ($2-5$ s): $v = 2$ m/s không đổi; $x = -2 + 2 \cdot 3 = 4$ m.
Stage 2 ($2-5$ s): $v = 2$ m/s constant; $x = -2 + 2 \cdot 3 = 4$ m.
- Giai đoạn 3 ($5-8$ s): $v = 2 - 2(t - 5)$ bằng 0 lúc $t = 6$ s, $x = 4 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 5$ m. Đến $t = 8$ s: $v = 2 - 6 = -4$ m/s, $x = 4 + 2 \cdot 3 - (1/2) \cdot 2 \cdot 9 = 1$ m.
Stage 3 ($5-8$ s): $v = 2 - 2(t - 5)$ is 0 at $t = 6$ s, $x = 4 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 5$ m. At $t = 8$ s: $v = 2 - 6 = -4$ m/s, $x = 4 + 2 \cdot 3 - (1/2) \cdot 2 \cdot 9 = 1$ m.
- Giai đoạn 4 ($8-12$ s): $v = -4 + 1 \cdot 4 = 0$; $x = 1 - 4 \cdot 4 + (1/2) \cdot 16 = -7$ m. Vận tốc chỉ chạm 0 ở cuối khoảng, không đổi chiều.
Stage 4 ($8-12$ s): $v = -4 + 1 \cdot 4 = 0$; $x = 1 - 4 \cdot 4 + (1/2) \cdot 16 = -7$ m. The velocity only reaches 0 at the end of the interval, with no reversal.

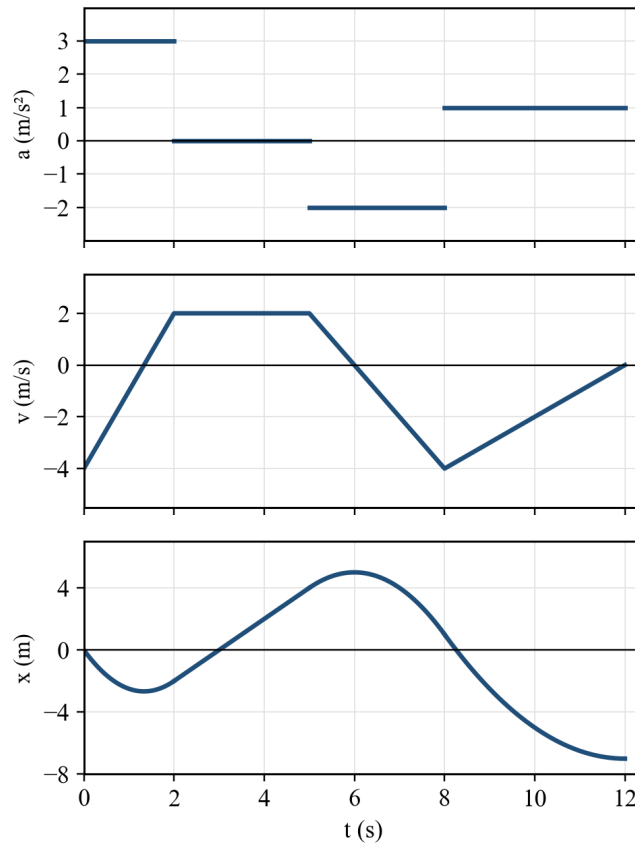
5. Quãng đường: đoạn từ 0 đến $-8/3$ (đi $8/3$ m); từ $-8/3$ đến 5 (đi $5 + 8/3 = 23/3$ m); từ 5 đến -7 (đi 12 m). Tổng $s = 8/3 + 23/3 + 12 = 67/3 \approx 22,3$ m.

Distance: from 0 to $-8/3$ ($8/3$ m); from $-8/3$ to 5 ($5 + 8/3 = 23/3$ m); from 5 to -7 (12 m).

Total $s = 8/3 + 23/3 + 12 = 67/3 \approx 22.3$ m.

Vậy ở $t = 12$ s vật dừng tại $x = -7$ m; vật đổi chiều ở $t = 4/3$ s ($x \approx -2,67$ m) và $t = 6$ s ($x = 5$ m); quãng đường khoảng 22,3 m, còn độ dịch chuyển là -7 m.

Hence at $t = 12$ s the particle is at rest at $x = -7$ m; it reverses at $t = 4/3$ s ($x \approx -2.67$ m) and $t = 6$ s ($x = 5$ m); the distance is about 22.3 m and the displacement is -7 m. ■



Hình 2.6. Đồ thị $a-t$, $v-t$ và $x-t$ của Ví dụ 2.12 trên cùng trục thời gian: a nhảy, v gãy khúc, x trơn

Figure 2.6. The $a-t$, $v-t$ and $x-t$ graphs of Example 2.12 on a common time axis: a jumps, v has corners, x is smooth

NHẬN XÉT / REMARK — Ba đồ thị ở Hình 2.6 liên hệ chặt: chiều dốc của $v-t$ đọc từ $a-t$, chiều dốc của $x-t$ đọc từ $v-t$. Đỉnh và đáy của $x-t$ nằm đúng tại các điểm $v-t$ cắt trục t ($t = 4/3$ s và $t = 6$ s), điều có thể kiểm bằng mắt trước khi tính.

The three graphs of Figure 2.6 are tightly linked: the slope of $v-t$ is read from $a-t$, the slope of $x-t$ from $v-t$. The peaks and troughs of $x-t$ sit exactly where $v-t$ crosses the t axis ($t = 4/3$ s and $t = 6$ s), something that can be checked by eye before any calculation.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Ốc vít bung ra có vận tốc 2,0 m/s hướng lên (bằng vận tốc thang lúc đó) và sau đó chỉ chịu trọng lực. Hai việc khác nhau: thời gian chạm sàn là việc của hệ quy chiếu thang, còn độ dịch chuyển và quãng đường so với mặt đất phải tính trong hệ quy

chiều gắn mặt đất. Làm cả hai rồi đối chiếu bằng chuyển động của sàn.

The screw that comes loose has velocity 2.0 m/s upward (the velocity of the lift at that moment) and afterwards feels only gravity. Two separate jobs: the time to reach the floor belongs to the lift frame, while displacement and distance relative to the ground must be computed in the ground frame. Do both and cross-check with the motion of the floor.

VÍ DỤ 2.13 (Cùng một sự kiện trong hai hệ quy chiếu) / EXAMPLE 2.13 (One event in two frames) — Thang máy đang đi lên với vận tốc 2,0 m/s và tăng tốc đều với gia tốc 1,2 m/s². Đúng lúc đó một con ốc vít bung khỏi trần thang, trần cách sàn 2,5 m. Tìm thời gian ốc vít rơi tới sàn, vận tốc của nó đối với sàn lúc chạm, và độ dịch chuyển cùng quãng đường của nó so với mặt đất. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A lift is going up at 2.0 m/s and speeding up uniformly at 1.2 m/s². At that instant a screw comes loose from the ceiling, which is 2.5 m above the floor. Find the time for the screw to reach the floor, its velocity relative to the floor on impact, and its displacement and distance travelled relative to the ground. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

- Hệ quy chiếu thang: ốc vít có vận tốc tương đối ban đầu 0 và gia tốc tương đối $-g - a = -(9,8 + 1,2) = -11,0 \text{ m/s}^2$ (hướng xuống).
Lift frame: the screw has initial relative velocity 0 and relative acceleration $-g - a = -(9.8 + 1.2) = -11.0 \text{ m/s}^2$ (downward).
- Đi xuống 2,5 m: $2,5 = (1/2) \cdot 11,0 \cdot t^2$, nên $t = \sqrt{(5/11)} \approx 0,674 \text{ s}$. Vận tốc tương đối lúc chạm: $11,0 \cdot 0,674 \approx 7,42 \text{ m/s}$ hướng xuống.
Falling 2.5 m: $2.5 = (1/2) \cdot 11.0 \cdot t^2$, so $t = \sqrt{(5/11)} \approx 0.674 \text{ s}$. Relative velocity on impact: $11.0 \cdot 0.674 \approx 7.42 \text{ m/s}$ downward.
- Hệ quy chiếu mặt đất, Oy lên, gốc tại vị trí ốc vít lúc bung: $y = 2,0t - 4,9t^2$. Tại $t = 0,674 \text{ s}$: $y = 1,348 - 2,227 \approx -0,879 \text{ m}$, độ dịch chuyển 0,879 m hướng xuống.
Ground frame, Oy up, origin at the screw's position when it comes loose: $y = 2.0t - 4.9t^2$. At $t = 0.674 \text{ s}$: $y = 1.348 - 2.227 \approx -0.879 \text{ m}$, a displacement of 0.879 m downward.
- Ốc vít còn đi lên trước khi rơi: lên thêm $v_0^2/(2g) = 4/19,6 \approx 0,204 \text{ m}$ (mất 0,204 s, ngắn hơn 0,674 s nên có xảy ra). Quãng đường $s = 0,204 + (0,204 + 0,879) \approx 1,29 \text{ m}$.
The screw still rises before falling: a further $v_0^2/(2g) = 4/19.6 \approx 0.204 \text{ m}$ (taking 0.204 s, shorter than 0.674 s, so it does happen). Distance $s = 0.204 + (0.204 + 0.879) \approx 1.29 \text{ m}$.
- Đối chiếu: sàn đi lên $2,0 \cdot 0,674 + 0,6 \cdot 0,674^2 \approx 1,621 \text{ m}$; ốc vít hạ 0,879 m; tổng 1,621 + 0,879 = 2,50 m, đúng bằng khoảng cách trần và sàn.
Cross-check: the floor rises $2.0 \cdot 0.674 + 0.6 \cdot 0.674^2 \approx 1.621 \text{ m}$; the screw drops 0.879 m; the sum $1.621 + 0.879 = 2.50 \text{ m}$ equals the ceiling-to-floor distance.

Vậy ốc vít chạm sàn sau khoảng 0,674 s với vận tốc tương đối khoảng 7,42 m/s; so với mặt đất nó dịch chuyển 0,879 m xuống và đi quãng đường khoảng 1,29 m.

Hence the screw reaches the floor after about 0.674 s at a relative velocity of about 7.42 m/s; relative to the ground it is displaced 0.879 m downward and travels about 1.29 m. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính quãng đường ốc vít bằng |độ dịch chuyển|. Vật ném lên rồi rơi qua điểm đầu thì quãng đường lớn hơn $|\Delta x|$; phải cộng đoạn đi

lên và đoạn đi xuống riêng.

Taking the distance travelled to be |displacement|. A body thrown up that then falls past its starting point has a distance larger than $|\Delta x|$; the rise and the fall must be added separately.

NHẬN XÉT / REMARK — Với hệ nhiều vật, hệ quy chiếu của vật này làm mất đi cả gia tốc lẫn vận tốc chung. Trong Ví dụ 2.13, trần và sàn có cùng gia tốc $1,2 \text{ m/s}^2$ nên vận tốc ban đầu $2,0 \text{ m/s}$ của thang không ảnh hưởng thời gian rơi tương đối; nó chỉ ảnh hưởng quãng đường so với mặt đất.

With several bodies, the frame of one of them removes the common velocity as well as the common acceleration. In Example 2.13 the ceiling and the floor share the acceleration 1.2 m/s^2 , so the initial lift velocity 2.0 m/s does not affect the relative time of fall; it only affects the distance relative to the ground.

2.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — Strategy table and terminology

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Đi hai nửa quãng đường với hai tốc độ, hỏi tốc độ trung bình <i>Two half-distances at two speeds, average speed asked</i>	Trung bình điều hòa (2.3) <i>Harmonic mean (2.3)</i>	2.2
Đồ thị $v-t$ có phần dưới trục t , hỏi quãng đường <i>A $v-t$ graph with a part below the t axis, distance asked</i>	Tách miền tại chỗ v đổi dấu, cộng giá trị tuyệt đối <i>Split where v changes sign, add absolute values</i>	2.3
Biết quãng đường và hai vận tốc, không có a <i>Distance and both velocities known, no a</i>	$x - x_0 = (v_0 + v)t/2$ (2.8) $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$ (2.8)	2.4
Vật từ nghỉ qua các đoạn bằng nhau, hỏi thời gian từng đoạn <i>From rest through equal stretches, time of each stretch asked</i>	$t_n = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ (2.10) $t_n = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ (2.10)	2.5
Ném lên rồi rơi, hỏi thời gian chạm đất <i>Thrown up then falls, time of landing asked</i>	Một phương trình (2.12), $a = -g$ <i>One equation (2.12), $a = -g$</i>	2.6
Hai vật cùng chịu g , hỏi lúc gặp nhau <i>Two bodies under g alone, meeting time asked</i>	Chuyển động tương đối đều: $t = \text{khoảng cách/vận tốc tương đối}$ <i>Uniform relative motion: $t = \text{gap/relative velocity}$</i>	2.8

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Tránh va chạm, đuổi kịp, khoảng cách nhỏ nhất <i>Avoiding a collision, catching up, minimum gap</i>	Hệ quy chiếu gắn vật, $v_{21} = 0$ (tính chất 2.23) <i>Frame of one body, $v_{21} = 0$ (property 2.23)</i>	2.10
Có giới hạn vận tốc hoặc gia tốc đổi theo giai đoạn <i>Speed limit, or acceleration that changes by stage</i>	Chia giai đoạn, nối ở nút, kiểm nghiệm nằm trong khoảng <i>Split into stages, join at nodes, check that the root lies in the interval</i>	2.9, 2.11
Gia tốc cho bằng đồ thị $a-t$ bậc thang <i>Acceleration given by a step $a-t$ graph</i>	Bảng nút t, v, x ; tìm $v = 0$ trong từng giai đoạn <i>Node table t, v, x; look for $v = 0$ in each stage</i>	2.12
Vật rời khỏi vật chuyển động có gia tốc (thang máy, xe) <i>A body leaving an accelerating object (lift, vehicle)</i>	Hai hệ quy chiếu, đối chiếu bằng chuyển động của sàn <i>Two frames, cross-check with the motion of the floor</i>	2.13

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hệ quy chiếu	Reference frame	vật mốc, trục tọa độ, gốc thời gian <i>reference body, axis, time origin and clock</i>
Chất điểm	Particle (point mass)	vật có kích thước nhỏ so với quãng đường đi <i>a body small compared with the distance it travels</i>
Tọa độ	Coordinate	số đo đại số vị trí trên trục <i>signed position on the axis</i>
Độ dịch chuyển	Displacement	$\Delta x = x_2 - x_1$, có dấu <i>$\Delta x = x_2 - x_1$, signed</i>
Quãng đường	Distance travelled	tổng độ dài đã đi, không âm <i>total length covered, never negative</i>
Vận tốc trung bình	Average velocity	$\Delta x / \Delta t$ <i>$\Delta x / \Delta t$</i>
Tốc độ trung bình	Average speed	quãng đường chia thời gian <i>distance divided by time</i>
Vận tốc tức thời	Instantaneous velocity	giới hạn của $\Delta x / \Delta t$ khi Δt dần tới 0 <i>limit of $\Delta x / \Delta t$ as Δt tends to 0</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Gia tốc	Acceleration	$\Delta v/\Delta t$, đơn vị m/s^2 <i>$\Delta v/\Delta t$, unit m/s^2</i>
Chuyển động nhanh dần	Speeding up	v và a cùng dấu <i>v and a of the same sign</i>
Chuyển động chậm dần	Slowing down	v và a ngược dấu <i>v and a of opposite signs</i>
Hệ số góc	Slope (gradient)	độ dốc của đường trên đồ thị <i>steepness of a line on a graph</i>
Tiếp tuyến	Tangent	đường thẳng chạm đồ thị tại một điểm <i>line touching the graph at one point</i>
Cát tuyến	Chord (secant)	đoạn nối hai điểm trên đồ thị <i>segment joining two points of the graph</i>
Trung bình điều hòa	Harmonic mean	$2v_1v_2/(v_1 + v_2)$ <i>$2v_1v_2/(v_1 + v_2)$</i>
Chuyển động thẳng biến đổi đều	Uniformly accelerated motion	chuyển động thẳng có a không đổi <i>rectilinear motion with constant a</i>
Rơi tự do	Free fall	rơi chỉ dưới tác dụng của trọng lực <i>falling under weight alone</i>
Ném thẳng đứng	Vertical throw	ném lên hoặc xuống theo phương thẳng đứng <i>throw straight up or down</i>
Độ cao cực đại	Maximum height	$H = v_0^2/(2g)$ <i>$H = v_0^2/(2g)$</i>
Vận tốc tương đối	Relative velocity	$v_{21} = v_2 - v_1$ <i>$v_{21} = v_2 - v_1$</i>
Gia tốc bậc thang	Step-wise acceleration	a không đổi từng khoảng, nhảy tại nút <i>a constant on intervals, jumping at nodes</i>
Nút	Node	thời điểm gia tốc đổi giá trị <i>instant at which the acceleration changes value</i>

2.9. Bài tự luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 2.1 / Problem 2.1 — Ô tô đi từ A đến B dài 180 km. Một phần ba quãng đường đầu đi với tốc độ 20 km/h, hai phần ba còn lại đi với tốc độ 60 km/h. Tính thời gian đi hết AB và tốc độ trung bình. Tốc độ ấy có bằng trung bình cộng của 20 km/h và 60 km/h không?

A car goes from A to B, 180 km apart. It covers the first third of the distance at 20 km/h and the

remaining two thirds at 60 km/h. Find the time for the whole journey and the average speed. Is that speed equal to the arithmetic mean of 20 km/h and 60 km/h?

Bài 2.2 / Problem 2.2 — Ô tô chạy 72 km/h thì hãm phanh, chuyển động chậm dần đều và dừng sau khi đi thêm 40 m. Tính gia tốc, thời gian hãm và quãng đường xe đi được trong giây cuối cùng trước khi dừng.

A car travelling at 72 km/h brakes, decelerates uniformly and stops after a further 40 m. Find the acceleration, the braking time, and the distance the car covers in the last second before stopping.

Bài 2.3 / Problem 2.3 — Ném một vật thẳng đứng lên từ mặt đất với vận tốc 24,5 m/s. Bỏ qua lực cản, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tìm độ cao cực đại, thời gian bay, và các thời điểm vật ở độ cao 20 m.

A body is thrown straight up from the ground at 24.5 m/s. Ignore air resistance, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Find the maximum height, the flight time, and the instants at which the body is at a height of 20 m.

Bài 2.4 / Problem 2.4 — Vật chuyển động thẳng với đồ thị $v-t$ gồm ba đoạn: v tăng đều từ 0 đến 6 m/s trong 3 s; giữ 6 m/s trong 4 s; giảm đều về 0 trong 2 s. Tìm gia tốc từng giai đoạn, quãng đường cả chuyển động, vận tốc trung bình, và thời điểm vật đã đi được nửa quãng đường.

A body moves in a straight line with a $v-t$ graph of three pieces: v rises uniformly from 0 to 6 m/s in 3 s; stays at 6 m/s for 4 s; falls uniformly to 0 in 2 s. Find the acceleration in each stage, the total distance, the average velocity, and the instant at which half the distance has been covered.

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 2.5 / Problem 2.5 — Một vật rơi tự do từ nghỉ đi qua cửa sổ cao 1,8 m trong 0,10 s. Hỏi điểm thả ở cao hơn mép trên cửa sổ bao nhiêu mét? Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A body falling freely from rest passes a window 1.8 m tall in 0.10 s. How many metres above the top edge of the window was it released? Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 2.6 / Problem 2.6 — Vật chuyển động chậm dần đều cho đến khi dừng hẳn. Trong giây đầu tiên vật đi được 15 m, trong giây cuối cùng đi được 0,5 m. Tính gia tốc, thời gian chuyển động và tổng quãng đường vật đi được.

A body decelerates uniformly until it stops. In the first second it covers 15 m and in the last second 0.5 m. Find the acceleration, the duration of the motion and the total distance covered.

Bài 2.7 / Problem 2.7 — Xe A khởi hành từ nghỉ ở điểm O, chạy nhanh dần đều với gia tốc $1,5 \text{ m/s}^2$. Sau 6 s, xe B đi qua O cùng chiều với xe A và chạy đều với vận tốc v . (a) Với $v = 15 \text{ m/s}$, B có đuổi kịp A không? Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai xe là bao nhiêu và vào lúc nào? (b) Vận tốc v nhỏ nhất để B đuổi kịp A là bao nhiêu? Khi đó gặp nhau lúc nào, ở đâu?

Car A starts from rest at point O and speeds up uniformly at 1.5 m/s^2 . After 6 s, car B passes O in the same direction as A at a steady velocity v . (a) For $v = 15 \text{ m/s}$, does B catch A? What is the minimum separation of the cars and when does it occur? (b) What is the smallest v for B to catch A? When and where do they then meet?

Bài 2.8 / Problem 2.8 — Tàu điện đi giữa hai ga cách nhau 1.800 m trong đúng 80 s: tăng tốc với gia tốc $1,0 \text{ m/s}^2$, chạy đều, rồi hãm với gia tốc $2,0 \text{ m/s}^2$ để dừng ở ga sau. Tìm tốc độ chạy đều v , và thời gian của từng giai đoạn.

An electric train travels between two stations 1,800 m apart in exactly 80 s: it speeds up at 1.0 m/s^2 , cruises, then brakes at 2.0 m/s^2 to stop at the second station. Find the cruising speed v and the duration of each stage.

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 2.9 / Problem 2.9 — Xe bắt đầu từ nghỉ ở $x = 0$ và chuyển động thẳng theo chiều dương với gia tốc phụ thuộc vị trí theo bậc thang: $a = 2,0 \text{ m/s}^2$ khi $0 < x < 100 \text{ m}$; $a = -1,0 \text{ m/s}^2$ khi $100 \text{ m} < x < 250 \text{ m}$; $a = 1,5 \text{ m/s}^2$ khi $250 \text{ m} < x < 350 \text{ m}$. Tìm tốc độ và thời gian ở mỗi nút, tốc độ trung bình trên cả 350 m, và các vị trí tại đó tốc độ bằng 15 m/s.

A car starts from rest at $x = 0$ and moves along the positive direction with an acceleration that depends on position in steps: $a = 2.0 \text{ m/s}^2$ for $0 < x < 100 \text{ m}$; $a = -1.0 \text{ m/s}^2$ for $100 \text{ m} < x < 250 \text{ m}$; $a = 1.5 \text{ m/s}^2$ for $250 \text{ m} < x < 350 \text{ m}$. Find the speed and the time at each node, the average speed over the whole 350 m, and the positions at which the speed equals 15 m/s.

Bài 2.10 / Problem 2.10 — Vật A ném thẳng đứng lên từ mặt đất với vận tốc 29,4 m/s. Sau $\tau = 2,0 \text{ s}$, vật B cũng được ném từ chỗ ấy với cùng vận tốc 29,4 m/s. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. (a) Hai vật gặp nhau lúc nào, ở độ cao nào, và vận tốc mỗi vật khi đó? (b) Chứng minh công thức tổng quát cho thời điểm và độ cao gặp theo τ , tìm điều kiện của τ để gặp nhau trước khi chạm đất. (c) Với τ nào hai vật gặp nhau đúng ở nửa độ cao cực đại?

Body A is thrown straight up from the ground at 29.4 m/s. After $\tau = 2.0 \text{ s}$, body B is thrown from the same place at the same speed 29.4 m/s. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. (a) When and at what height do they meet, and what are their velocities then? (b) Derive the general formulas for the time and height of the meeting in terms of τ , and find the condition on τ for them to meet before landing. (c) For which τ do the bodies meet exactly at half the maximum height?

Bài 2.11 / Problem 2.11 — Thang cuốn đi lên đều. Một người đi lên cùng chiều với thang, đếm được 40 bậc mình đã bước hết khi lên tới đỉnh. Lần khác người ấy đi nhanh gấp đôi, đếm được 48 bậc. (a) Thang có bao nhiêu bậc nhìn thấy được? (b) Nếu người ấy đi ngược chiều, xuống thang đang lên, với tốc độ như lần đầu, thì đếm được bao nhiêu bậc khi tới chân thang? Coi bậc thang không đổi chiều dài và người bước đều.

An escalator moves steadily upward. A person walking up with it counts 40 steps taken in reaching the top. On another trip the person walks twice as fast and counts 48 steps. (a) How many steps does the escalator show? (b) If the person walks the other way, down the rising escalator, at the speed of the first trip, how many steps are counted on reaching the bottom? Assume the steps have constant length and the person walks steadily.

Bài 2.12 / Problem 2.12 — Quả bóng thả rơi từ độ cao 5,0 m xuống nền cứng. Sau mỗi lần chạm nền, tốc độ ngay sau va chạm bằng 0,80 lần tốc độ ngay trước đó. Bỏ qua lực cản, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tìm thời điểm bóng chạm nền lần thứ ba, tổng thời gian bóng nảy cho đến khi dừng hẳn và tổng quãng đường bóng đi được.

A ball is dropped from a height of 5.0 m onto a hard floor. After each impact the speed just after is 0.80 times the speed just before. Ignore air resistance, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Find the instant of the third impact, the total time the ball keeps bouncing until it comes to rest, and the total distance travelled.

2.10. Lời giải bài tự luyện — Solutions to practice problems

Bài 2.1 — Problem 2.1

1. Một phần ba quãng đường là 60 km, mất $60/20 = 3 \text{ h}$. Hai phần ba còn lại là 120 km, mất $120/60 = 2 \text{ h}$.

One third of the distance is 60 km, taking $60/20 = 3 \text{ h}$. The remaining two thirds is 120 km, taking $120/60 = 2 \text{ h}$.

2. Tổng thời gian $3 + 2 = 5$ h. Tốc độ trung bình bằng tổng quãng đường chia tổng thời gian: $180/5 = 36$ km/h.

Total time $3 + 2 = 5$ h. The average speed is total distance over total time: $180/5 = 36$ km/h.

Trung bình cộng của 20 và 60 là 40 km/h, khác 36 km/h vì hai quãng đi với tốc độ khác nhau không bằng nhau về thời gian. Vậy xe mất 5 h và có tốc độ trung bình 36 km/h.

The arithmetic mean of 20 and 60 is 40 km/h, different from 36 km/h because the two stretches are not equal in time. Hence the car takes 5 h and its average speed is 36 km/h. ■

Bài 2.2 — Problem 2.2

1. Đổi 72 km/h = 20 m/s. Chọn chiều dương theo chuyển động: $v_0 = 20$ m/s, $v = 0$, $\Delta x = 40$ m.

Convert 72 km/h = 20 m/s. Take the positive direction along the motion: $v_0 = 20$ m/s, $v = 0$, $\Delta x = 40$ m.

2. Chưa biết t , a nên dùng (2.7): $0 - 400 = 2a \cdot 40$, suy ra $a = -5$ m/s².

Neither t nor a is known, so use (2.7): $0 - 400 = 2a \cdot 40$, giving $a = -5$ m/s².

3. Thời gian hãm theo (2.5): $0 = 20 - 5t$, $t = 4$ s.

The braking time from (2.5): $0 = 20 - 5t$, $t = 4$ s.

4. giây cuối: chuyển động ngược thời gian là chuyển động nhanh dần đều từ nghỉ với gia tốc 5 m/s², quãng đi trong giây đầu của nó là $(1/2) \cdot 5 \cdot 1 = 2,5$ m.

Last second: run backwards in time, the motion is uniform speeding up from rest at 5 m/s², and its first second covers $(1/2) \cdot 5 \cdot 1 = 2.5$ m.

Vậy gia tốc -5 m/s², hãm trong 4 s và trong giây cuối xe đi được $2,5$ m.

Hence the acceleration is -5 m/s², braking lasts 4 s, and in the last second the car covers 2.5 m.

■

Bài 2.3 — Problem 2.3

1. Độ cao cực đại theo (2.13): $H = 24,5^2/(2 \cdot 9,8) = 600,25/19,6 \approx 30,6$ m. Thời gian lên $24,5/9,8 = 2,5$ s nên thời gian bay là 5 s.

Maximum height from (2.13): $H = 24.5^2/(2 \cdot 9.8) = 600.25/19.6 \approx 30.6$ m. The time up is $24.5/9.8 = 2.5$ s, so the flight time is 5 s.

2. Độ cao 20 m: $24,5t - 4,9t^2 = 20$, tức $4,9t^2 - 24,5t + 20 = 0$. Biệt thức $600,25 - 392 = 208,25$, $\sqrt{208,25} \approx 14,43$.

Height 20 m: $24.5t - 4.9t^2 = 20$, i.e. $4.9t^2 - 24.5t + 20 = 0$. The discriminant is $600.25 - 392 = 208.25$, $\sqrt{208.25} \approx 14.43$.

3. $t = (24,5 \pm 14,43)/9,8$, cho $t \approx 1,03$ s (đang lên) và $t \approx 3,97$ s (đang xuống). Hiệu $2,95$ s khớp với (2.14): $2 \cdot 14,43/9,8 \approx 2,95$ s.

$t = (24.5 \pm 14.43)/9.8$, giving $t \approx 1.03$ s (rising) and $t \approx 3.97$ s (falling). The difference 2.95 s agrees with (2.14): $2 \cdot 14.43/9.8 \approx 2.95$ s.

Vậy $H \approx 30,6$ m, bay 5 s, và vật ở độ cao 20 m lúc $1,03$ s và $3,97$ s.

Hence $H \approx 30.6$ m, the flight lasts 5 s, and the body is at 20 m at 1.03 s and 3.97 s. ■

Bài 2.4 — Problem 2.4

1. Gia tốc là hệ số góc: $6/3 = 2 \text{ m/s}^2$; 0 ; $-6/2 = -3 \text{ m/s}^2$.
Acceleration is the slope: $6/3 = 2 \text{ m/s}^2$; 0 ; $-6/2 = -3 \text{ m/s}^2$.
2. Quãng đường là diện tích: $(1/2) \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ m}$; $4 \cdot 6 = 24 \text{ m}$; $(1/2) \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ m}$. Tổng 39 m.
Vật không đổi chiều nên cũng là độ dịch chuyển.
The distance is the area: $(1/2) \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ m}$; $4 \cdot 6 = 24 \text{ m}$; $(1/2) \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ m}$. Total 39 m. The body never reverses, so this is also the displacement.
3. Thời gian cả hành trình $3 + 4 + 2 = 9 \text{ s}$, nên vận tốc trung bình $39/9 \approx 4,33 \text{ m/s}$.
The whole trip lasts $3 + 4 + 2 = 9 \text{ s}$, so the average velocity is $39/9 \approx 4.33 \text{ m/s}$.
4. Một nửa quãng đường là 19,5 m. Giai đoạn 1 cho 9 m, còn thiếu 10,5 m đi đều với 6 m/s mất $10,5/6 = 1,75 \text{ s}$. Thời điểm là $3 + 1,75 = 4,75 \text{ s}$.
Half the distance is 19.5 m. Stage 1 gives 9 m, leaving 10.5 m at 6 m/s, which takes $10.5/6 = 1.75 \text{ s}$. The instant is $3 + 1.75 = 4.75 \text{ s}$.

Vậy $a = 2$; 0 ; -3 m/s^2 , quãng đường 39 m, vận tốc trung bình khoảng 4,33 m/s, và nửa quãng đường đạt lúc $t = 4,75 \text{ s}$.

Hence $a = 2$; 0 ; -3 m/s^2 , the distance is 39 m, the average velocity is about 4.33 m/s, and half the distance is reached at $t = 4.75 \text{ s}$. ■

Bài 2.5 — Problem 2.5

1. Gọi v là vận tốc của vật khi tới mép trên, chiều dương hướng xuống. Qua cửa sổ vật chuyển động nhanh dần đều với gia tốc g trong 0,10 s:
Let v be the velocity of the body at the top edge, positive downward. Through the window the body speeds up uniformly with acceleration g for 0.10 s:
$$\Delta x = vt + gt^2/2$$
2. Thay số: $1,8 = v \cdot 0,10 + 4,9 \cdot 0,01$, nên $v = (1,8 - 0,049)/0,10 = 17,51 \text{ m/s}$.
Substituting: $1.8 = v \cdot 0.10 + 4.9 \cdot 0.01$, so $v = (1.8 - 0.049)/0.10 = 17.51 \text{ m/s}$.
3. Từ nghỉ tới mép trên: $h = v^2/(2g) = 17,51^2/19,6 \approx 15,6 \text{ m}$. Kiểm tra thời gian: $17,51/9,8 \approx 1,79 \text{ s}$, hợp lý.
From rest to the top edge: $h = v^2/(2g) = 17.51^2/19.6 \approx 15.6 \text{ m}$. Check the time: $17.51/9.8 \approx 1.79 \text{ s}$, reasonable.

Vậy điểm thả cao hơn mép trên cửa sổ khoảng 15,6 m.

Hence the release point is about 15.6 m above the top edge of the window. ■

Bài 2.6 — Problem 2.6

1. Giây cuối: nhìn ngược thời gian, vật nhanh dần đều từ nghỉ nên quãng giây đầu của nó là $|a| \cdot 1^2/2 = 0,5 \text{ m}$, suy ra $|a| = 1 \text{ m/s}^2$.
Last second: viewed backwards in time, the body speeds up from rest, so its first second covers $|a| \cdot 1^2/2 = 0.5 \text{ m}$, giving $|a| = 1 \text{ m/s}^2$.
2. Giây đầu theo (2.9) với $\tau = 1 \text{ s}$, $n = 1$: $s_1 = v_0 - |a|/2 = 15$, nên $v_0 = 15 + 0,5 = 15,5 \text{ m/s}$.
First second by (2.9) with $\tau = 1 \text{ s}$, $n = 1$: $s_1 = v_0 - |a|/2 = 15$, so $v_0 = 15 + 0.5 = 15.5 \text{ m/s}$.

3. Thời gian dừng: $T = v_0/|a| = 15,5$ s (lớn hơn 1 s nên giây đầu và giây cuối không chồng nhau). Quãng đường: $v_0^2/(2|a|) = 240,25/2 \approx 120,1$ m.
Stopping time: $T = v_0/|a| = 15.5$ s (more than 1 s, so the first and last seconds do not overlap). Distance: $v_0^2/(2|a|) = 240.25/2 \approx 120.1$ m.

Vậy gia tốc -1 m/s², vật chuyển động 15,5 s và đi tổng cộng khoảng 120,1 m.

Hence the acceleration is -1 m/s², the body moves for 15.5 s and covers about 120.1 m in all. ■

Bài 2.7 — Problem 2.7

- Gốc ở O, chiều dương theo chuyển động, t tính từ lúc A khởi hành: $x_A = 0,75t^2$, $x_B = v(t - 6)$ với $t \geq 6$ s. Hiệu $d = x_A - x_B = 0,75t^2 - v(t - 6)$.
Origin at O, positive along the motion, t from the start of A: $x_A = 0.75t^2$, $x_B = v(t - 6)$ for $t \geq 6$ s. The difference $d = x_A - x_B = 0.75t^2 - v(t - 6)$.
- (a) Với $v = 15$: $0,75t^2 - 15t + 90 = 0$ có biệt thức $225 - 270 = -45 < 0$, nên không gặp. Khoảng cách nhỏ nhất khi vận tốc tương đối bằng 0, tức $1,5t = 15$, $t = 10$ s; khi đó $d = 0,75 \cdot 100 - 15 \cdot 4 = 15$ m.
(a) For $v = 15$: $0.75t^2 - 15t + 90 = 0$ has discriminant $225 - 270 = -45 < 0$, so they never meet. The minimum separation occurs when the relative velocity is zero, $1.5t = 15$, $t = 10$ s; then $d = 0.75 \cdot 100 - 15 \cdot 4 = 15$ m.
- (b) Điều kiện có nghiệm: biệt thức của $0,75t^2 - vt + 6v = 0$ là $v^2 - 4 \cdot 0,75 \cdot 6v = v^2 - 18v \geq 0$, nên $v \geq 18$ m/s.
(b) Condition for a root: the discriminant of $0.75t^2 - vt + 6v = 0$ is $v^2 - 4 \cdot 0.75 \cdot 6v = v^2 - 18v \geq 0$, so $v \geq 18$ m/s.
- Với $v = 18$ nghiệm kép $t = v/(2 \cdot 0,75) = 12$ s, tại $x = 18 \cdot 6 = 108$ m (và $0,75 \cdot 144 = 108$ m, khớp). Lúc ấy vận tốc A là $1,5 \cdot 12 = 18$ m/s bằng vận tốc B, đúng như tính chất 2.23.
With $v = 18$ the double root is $t = v/(2 \cdot 0.75) = 12$ s, at $x = 18 \cdot 6 = 108$ m (and $0.75 \cdot 144 = 108$ m, consistent). A's velocity is then $1.5 \cdot 12 = 18$ m/s, equal to B's, as property 2.23 says.

Vậy (a) không gặp, khoảng cách nhỏ nhất 15 m lúc $t = 10$ s; (b) v nhỏ nhất là 18 m/s, gặp nhau lúc $t = 12$ s ở cách O 108 m.

Hence (a) they do not meet, the minimum separation is 15 m at $t = 10$ s; (b) the smallest v is 18 m/s, and they meet at $t = 12$ s, 108 m from O. ■

Bài 2.8 — Problem 2.8

- Quãng đường là diện tích hình thang của đồ thị $v-t$, tổng thời gian $T = 80$ s. Thời gian tăng tốc $v/1$, hãm $v/2$, đều $T - 1,5v$. Diện tích bằng hình chữ nhật vT trừ hai tam giác thiếu:
The distance is the trapezium area of the $v-t$ graph, total time $T = 80$ s. Speeding up takes $v/1$, braking $v/2$, cruising $T - 1.5v$. The area equals the rectangle vT minus two missing triangles:

$$S = vT - v^2/(2a_1) - v^2/(2a_2)$$

- Thay số: $1800 = 80v - 0,5v^2 - 0,25v^2 = 80v - 0,75v^2$, tức $0,75v^2 - 80v + 1800 = 0$. Biệt thức $6400 - 5400 = 1000$, $\sqrt{1000} \approx 31,62$.

Substituting: $1800 = 80v - 0.5v^2 - 0.25v^2 = 80v - 0.75v^2$, i.e. $0.75v^2 - 80v + 1800 = 0$. The discriminant is $6400 - 5400 = 1000$, $\sqrt{1000} \approx 31.62$.

3. $v = (80 \pm 31.62)/1.5$, cho $v \approx 32.25$ m/s hoặc $v \approx 74.4$ m/s. Với 74.4 m/s thì tăng tốc và hãm đã mất $1.5 \cdot 74.4 \approx 111.6$ s > 80 s, vô lý, loại.

$v = (80 \pm 31.62)/1.5$, giving $v \approx 32.25$ m/s or $v \approx 74.4$ m/s. For 74.4 m/s, speeding up and braking alone would take $1.5 \cdot 74.4 \approx 111.6$ s > 80 s, absurd, so reject it.

4. Với $v = 32.25$ m/s: tăng tốc 32.25 s, hãm 16.13 s, chạy đều $80 - 48.38 \approx 31.6$ s (dương, hợp lệ).

For $v = 32.25$ m/s: speeding up 32.25 s, braking 16.13 s, cruising $80 - 48.38 \approx 31.6$ s (positive, valid).

Vậy tốc độ chạy đều khoảng 32.3 m/s (khoảng 116 km/h); các giai đoạn kéo dài 32.3 s; 31.6 s; 16.1 s.

Hence the cruising speed is about 32.3 m/s (roughly 116 km/h); the stages last 32.3 s, 31.6 s and 16.1 s. ■

Bài 2.9 — Problem 2.9

1. Mỗi đoạn có a không đổi theo thời gian, nên áp dụng (2.7) trong từng đoạn: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, thời gian $t = \Delta v/a$.

In each stretch a is constant in time, so apply (2.7) within it: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, and the time is $t = \Delta v/a$.

2. Đoạn 1 (0–100 m): $v^2 = 2 \cdot 2 \cdot 100 = 400$ nên $v = 20$ m/s, $t_1 = 20/2 = 10$ s.

Stretch 1 (0–100 m): $v^2 = 2 \cdot 2 \cdot 100 = 400$ so $v = 20$ m/s, $t_1 = 20/2 = 10$ s.

3. Đoạn 2 (100–250 m): $v^2 = 400 - 2 \cdot 1 \cdot 150 = 100$ nên $v = 10$ m/s, $t_2 = (20 - 10)/1 = 10$ s.

Stretch 2 (100–250 m): $v^2 = 400 - 2 \cdot 1 \cdot 150 = 100$ so $v = 10$ m/s, $t_2 = (20 - 10)/1 = 10$ s.

4. Đoạn 3 (250–350 m): $v^2 = 100 + 2 \cdot 1.5 \cdot 100 = 400$ nên $v = 20$ m/s, $t_3 = (20 - 10)/1.5 \approx 6.67$ s.

Stretch 3 (250–350 m): $v^2 = 100 + 2 \cdot 1.5 \cdot 100 = 400$ so $v = 20$ m/s, $t_3 = (20 - 10)/1.5 \approx 6.67$ s.

5. Tổng thời gian $10 + 10 + 6.67 = 26.67$ s; tốc độ trung bình $350/26.67 \approx 13.1$ m/s.

Kiểm tra: tốc độ trung bình từng đoạn là $(v_{\text{đầu}} + v_{\text{cuối}})/2 = 10; 15; 15$ m/s, lấy trung bình theo thời gian $(10 \cdot 10 + 15 \cdot 10 + 15 \cdot 6.67)/26.67 \approx 13.1$ m/s.

Total time $10 + 10 + 6.67 = 26.67$ s; average speed $350/26.67 \approx 13.1$ m/s. Check: the average speed in each stretch is $(v_{\text{start}} + v_{\text{end}})/2 = 10, 15, 15$ m/s, and weighting by time gives $(10 \cdot 10 + 15 \cdot 10 + 15 \cdot 6.67)/26.67 \approx 13.1$ m/s.

6. Tốc độ 15 m/s: ở đoạn 1 khi $225 = 2 \cdot 2 \cdot x$, $x = 56.25$ m (lần 1, lúc $t = 7.5$ s). Ở đoạn 2 khi $225 = 400 - 2(x - 100)$, $x = 187.5$ m (lần 2, lúc $t = 10 + 5 = 15$ s). Ở đoạn 3 tốc độ chỉ từ 10 tới 20 m/s: $225 = 100 + 3(x - 250)$, $x \approx 291.7$ m (lần 3).

Speed 15 m/s: in stretch 1 when $225 = 2 \cdot 2 \cdot x$, $x = 56.25$ m (first time, at $t = 7.5$ s). In stretch 2 when $225 = 400 - 2(x - 100)$, $x = 187.5$ m (second time, at $t = 10 + 5 = 15$ s). In stretch 3 the speed rises from 10 to 20 m/s: $225 = 100 + 3(x - 250)$, $x \approx 291.7$ m (third time).

Vận tốc độ tại các nút là 20; 10; 20 m/s tại 100; 250; 350 m, các thời điểm 10; 20; 26,67 s, tốc độ trung bình khoảng 13,1 m/s, và tốc độ 15 m/s xảy ra tại $x = 56,25$ m; 187,5 m; 291,7 m.

Hence the speeds at the nodes are 20, 10, 20 m/s at 100, 250, 350 m, at times 10, 20, 26.67 s; the average speed is about 13.1 m/s; and the speed is 15 m/s at $x = 56.25$ m, 187.5 m, 291.7 m. ■

Bài 2.10 — Problem 2.10

1. Gốc ở mặt đất, Oy lên, t tính từ lúc ném A. $y_A = v_0t - gt^2/2$, $y_B = v_0(t - \tau) - g(t - \tau)^2/2$.
Origin at the ground, Oy up, t measured from the throw of A. $y_A = v_0t - gt^2/2$, $y_B = v_0(t - \tau) - g(t - \tau)^2/2$.

2. (b) Cho $y_A = y_B$: $v_0\tau - g(2t\tau - \tau^2)/2 = 0$, các số hạng t^2 triệt tiêu nên:

(b) Setting $y_A = y_B$: $v_0\tau - g(2t\tau - \tau^2)/2 = 0$, the t^2 terms cancel, so:

$$t = v_0/g + \tau/2, \quad h = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$$

3. Độ cao h suy ra bằng cách thay t vào y_A : $h = v_0t - gt^2/2 = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$. Hai vật chỉ gặp khi cả hai còn bay: B được ném lúc $t = \tau$ và A chạm đất lúc $2v_0/g$, nên cần $\tau \leq t \leq 2v_0/g$. Cả hai bất đẳng thức cho cùng điều kiện $\tau \leq 2v_0/g = 6$ s.

The height follows by putting t into y_A : $h = v_0t - gt^2/2 = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$. The bodies meet only while both are in flight: B is thrown at $t = \tau$ and A lands at $2v_0/g$, so we need $\tau \leq t \leq 2v_0/g$. Both inequalities give the same condition $\tau \leq 2v_0/g = 6$ s.

4. (a) Với $v_0 = 29,4$ m/s: $v_0/g = 3$ s, $H = v_0^2/(2g) = 44,1$ m. Thay $\tau = 2$: $t = 3 + 1 = 4$ s, $h = 44,1 - 9,8 \cdot 4/8 = 44,1 - 4,9 = 39,2$ m.

(a) With $v_0 = 29.4$ m/s: $v_0/g = 3$ s, $H = v_0^2/(2g) = 44.1$ m. For $\tau = 2$: $t = 3 + 1 = 4$ s, $h = 44.1 - 9.8 \cdot 4/8 = 44.1 - 4.9 = 39.2$ m.

5. Vận tốc lúc gặp: $v_A = 29,4 - 9,8 \cdot 4 = -9,8$ m/s (xuống), $v_B = 29,4 - 9,8 \cdot 2 = +9,8$ m/s (lên): cùng tốc độ, ngược chiều, đúng với tính đối xứng quanh đỉnh của quỹ đạo.

Velocities at the meeting: $v_A = 29.4 - 9.8 \cdot 4 = -9.8$ m/s (down), $v_B = 29.4 - 9.8 \cdot 2 = +9.8$ m/s (up): equal speeds, opposite directions, as the symmetry about the top of the path demands.

6. (c) Nửa độ cao cực đại: $h = H/2$ nên $g\tau^2/8 = H/2$, $\tau^2 = 4H/g = 4 \cdot 44,1/9,8 = 18$, $\tau = 3\sqrt{2} \approx 4,24$ s (nhỏ hơn 6 s, hợp lệ).

(c) Half the maximum height: $h = H/2$, so $g\tau^2/8 = H/2$, $\tau^2 = 4H/g = 4 \cdot 44.1/9.8 = 18$, $\tau = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ s (less than 6 s, valid).

Vậy (a) gặp lúc $t = 4$ s ở độ cao 39,2 m với vận tốc $\mp 9,8$ m/s; (b) $t = v_0/g + \tau/2$, $h = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$, điều kiện $0 < \tau \leq 6$ s; (c) $\tau \approx 4,24$ s.

Hence (a) they meet at $t = 4$ s at a height of 39.2 m with velocities ∓ 9.8 m/s; (b) $t = v_0/g + \tau/2$, $h = v_0^2/(2g) - g\tau^2/8$, with condition $0 < \tau \leq 6$ s; (c) $\tau \approx 4.24$ s. ■

Bài 2.11 — Problem 2.11

1. Đo tốc độ bằng đơn vị 'bậc trên giây'. Thang chạy lên với tốc độ w, người đi với tốc độ u đối với thang, N là số bậc nhìn thấy. Đối với mặt đất người đi với tốc độ u + w nên mất thời gian $N/(u + w)$; số bậc người bước là u nhân thời gian đó:

Measure speeds in steps per second. The escalator runs up at w, the person walks at u

relative to it, and N is the number of visible steps. Relative to the ground the person moves at $u + w$ and takes $N/(u + w)$; the number of steps counted is u times that time:

$$n = uN/(u + w) = N/(1 + r), \quad r = w/u$$

2. (a) Lần 1: $40 = N/(1 + r)$ nên $N = 40(1 + r)$. Lần 2 (tốc độ $2u$): $48 = 2N/(2 + r)$. Thay N : $48(2 + r) = 80(1 + r)$, tức $96 + 48r = 80 + 80r$, $r = 0,5$ và $N = 40 \cdot 1,5 = 60$ bậc.
 (a) Trip 1: $40 = N/(1 + r)$, so $N = 40(1 + r)$. Trip 2 (speed $2u$): $48 = 2N/(2 + r)$. Substituting N : $48(2 + r) = 80(1 + r)$, i.e. $96 + 48r = 80 + 80r$, $r = 0.5$ and $N = 40 \cdot 1.5 = 60$ steps.
3. (b) Đi xuống ngược chiều thang, tốc độ đối với mặt đất là $u - w = u(1 - r) = 0,5u > 0$, nên người tới được chân thang, mất thời gian $N/(u - w)$. Số bậc đếm là $u \cdot N/(u - w) = N/(1 - r) = 60/0,5 = 120$.
 (b) Walking down against the escalator, the speed relative to the ground is $u - w = u(1 - r) = 0.5u > 0$, so the person does reach the bottom, taking $N/(u - w)$. The count is $u \cdot N/(u - w) = N/(1 - r) = 60/0.5 = 120$.

Vậy thang có 60 bậc nhìn thấy, và đi ngược chiều người đó đếm được 120 bậc.

Hence the escalator shows 60 steps, and walking against it the person counts 120 steps. ■

Bài 2.12 — Problem 2.12

1. Thời gian rơi lần đầu $t_0 = \sqrt{2h/g} = \sqrt{(10/9,8)} \approx 1,010$ s, tốc độ lúc chạm $v_0 = gt_0$. Sau lần chạm k , tốc độ bật lên là $e^k v_0$ với $e = 0,8$, nên lần bay lên rồi rơi xuống tiếp theo kéo dài $2e^k v_0/g = 2e^k t_0$.
 The first fall takes $t_0 = \sqrt{2h/g} = \sqrt{(10/9.8)} \approx 1.010$ s, with impact speed $v_0 = gt_0$. After impact k the rebound speed is $e^k v_0$ with $e = 0.8$, so the next flight up and down lasts $2e^k v_0/g = 2e^k t_0$.
2. Chạm lần thứ ba: $t = t_0(1 + 2e + 2e^2) = 1,010 \cdot (1 + 1,6 + 1,28) = 1,010 \cdot 3,88 \approx 3,92$ s.
 Third impact: $t = t_0(1 + 2e + 2e^2) = 1.010 \cdot (1 + 1.6 + 1.28) = 1.010 \cdot 3.88 \approx 3.92$ s.
3. Tổng thời gian là t_0 cộng cấp số nhân vô hạn $2t_0(e + e^2 + \dots) = 2t_0 e/(1 - e)$, vậy:
 The total time is t_0 plus the infinite geometric series $2t_0(e + e^2 + \dots) = 2t_0 e/(1 - e)$, thus:
- $$T = t_0(1 + e)/(1 - e)$$
4. Thay $e = 0,8$: $T = 9t_0 \approx 9,09$ s (hữu hạn dù có vô số lần nảy).
 With $e = 0.8$: $T = 9t_0 \approx 9.09$ s (finite despite infinitely many bounces).
5. Quãng đường: sau lần chạm k , bóng lên cao $e^{2k}h$ rồi rơi lại cùng đoạn ấy. Tổng $s = h + 2h(e^2 + e^4 + \dots) = h(1 + e^2)/(1 - e^2) = 5 \cdot 1,64/0,36 \approx 22,8$ m.
 Distance: after impact k the ball rises to $e^{2k}h$ and falls back through the same stretch. Total $s = h + 2h(e^2 + e^4 + \dots) = h(1 + e^2)/(1 - e^2) = 5 \cdot 1.64/0.36 \approx 22.8$ m.

Vậy bóng chạm nền lần thứ ba lúc khoảng 3,92 s, nảy trong tổng cộng khoảng 9,09 s và đi quãng đường khoảng 22,8 m.

Hence the ball hits the floor the third time at about 3.92 s, bounces for about 9.09 s in all, and travels about 22.8 m. ■

Chương 3. Chuyển động trong mặt phẳng và tính tương đối — Chapter 3. Motion in a plane and relative motion

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Tách chuyển động trong mặt phẳng thành hai chuyển động độc lập theo hai trục và giải trọn vẹn bài toán ném ngang, ném xiên, ném từ độ cao, ném lên mặt nghiêng.
Split motion in a plane into two independent motions along two axes and solve horizontal, oblique, elevated and inclined-plane projectile problems completely.
- Dùng parabol an toàn để tìm tầm xa lớn nhất, góc ném tối ưu và vận tốc nhỏ nhất để vượt vật cản.
Use the safety parabola to find the greatest range, the best launch angle and the least speed that clears an obstacle.
- Cộng vận tốc theo Galileo và vẽ tam giác vận tốc cho bài toán qua sông, gió với máy bay, mưa rơi xiên.
Add velocities in the Galilean way and draw velocity triangles for river crossings, aircraft in wind and slanting rain.
- Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai vật chuyển động thẳng đều bằng cách chuyển sang hệ quy chiếu gắn với một vật.
Find the closest approach of two bodies in uniform motion by switching to the frame of one of them.
- Lập liên hệ vận tốc giữa các vật nối bằng thanh cứng, dây không giãn, ròng rọc.
Relate the velocities of bodies joined by rigid rods, inextensible strings and pulleys.

3.1. Vector vị trí, vận tốc, gia tốc trong mặt phẳng — Position, velocity and acceleration vectors in a plane

Chuyển động trong mặt phẳng được mô tả bằng hệ trục Oxy gắn với mặt đất: Ox nằm ngang, Oy hướng lên trên. Chất điểm ở vị trí (x, y) có vector vị trí $\vec{r}$ nối gốc O tới chất điểm. Chỉ số của đại lượng trung bình viết tb trong câu tiếng Việt và av trong câu tiếng Anh; công thức trong khối chung dùng ký hiệu trung tính. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ nếu đề không cho khác, và bỏ qua lực cản của không khí trừ khi đề nói.

Motion in a plane is described in axes Oxy fixed to the ground: Ox horizontal, Oy pointing up. A particle at (x, y) has position vector $\vec{r}$ joining the origin O to the particle. The subscript of an average quantity is written tb in Vietnamese sentences and av in English ones; formulas in shared blocks use neutral symbols. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ unless the problem says otherwise, and neglect air resistance unless it is mentioned.

ĐỊNH NGHĨA 3.1 (Vận tốc trong mặt phẳng) / DEFINITION 3.1 (Velocity in a plane)

— Độ dịch chuyển của chất điểm trong khoảng thời gian Δt là vector $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ nối vị trí đầu tới vị trí cuối. Vận tốc trung bình $\vec{v}_{tb} = \Delta \vec{r} / \Delta t$ cùng hướng với $\Delta \vec{r}$. Vận tốc tức thời $\vec{v}$ là giá trị mà $\vec{v}_{tb}$ tiến tới khi Δt dần tới 0; vector này tiếp tuyến với quỹ đạo và có độ lớn là tốc độ tức thời $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

The displacement over a time interval Δt is the vector $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ from the initial to the final

position. The average velocity $\vec{v}_{av} = \Delta\vec{r}/\Delta t$ points along $\Delta\vec{r}$. The instantaneous velocity $\vec{v}$ is the value that $\vec{v}_{av}$ approaches as Δt tends to 0; it is tangent to the path and its magnitude is the instantaneous speed $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

ĐỊNH NGHĨA 3.2 (Gia tốc trong mặt phẳng) / DEFINITION 3.2 (Acceleration in a plane) — Gia tốc trung bình $\vec{a}_{tb} = \Delta\vec{v}/\Delta t$, với $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ là hiệu hai vector vận tốc. Gia tốc tức thời $\vec{a}$ là giá trị của $\vec{a}_{tb}$ khi Δt dần tới 0. Gia tốc cùng hướng với $\Delta\vec{v}$, nên nói chung không cùng hướng với $\vec{v}$.

The average acceleration $\vec{a}_{av} = \Delta\vec{v}/\Delta t$, where $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ is the difference of two velocity vectors.

The instantaneous acceleration $\vec{a}$ is the value of $\vec{a}_{av}$ as Δt tends to 0. It points along $\Delta\vec{v}$, so in general it does not point along $\vec{v}$.

Thành phần của gia tốc song song với $\vec{v}$ làm đổi độ lớn vận tốc, thành phần vuông góc với $\vec{v}$ làm đổi hướng vận tốc. Vì vậy một chất điểm chuyển động đều (tốc độ không đổi) trên đường cong vẫn có gia tốc.

The component of acceleration parallel to $\vec{v}$ changes the speed; the component perpendicular to $\vec{v}$ changes the direction. A particle moving at constant speed along a curve therefore still accelerates.

ĐỊNH LUẬT 3.3 (Nguyên lý độc lập của các chuyển động) / LAW 3.3 (Principle of independence of motions) — Chuyển động của chất điểm trong mặt phẳng là tổng hợp của hai chuyển động độc lập theo hai trục vuông góc. Tọa độ và vận tốc theo mỗi trục chỉ phụ thuộc vào gia tốc và điều kiện đầu theo trục đó. Phạm vi: hệ quy chiếu quán tính, hai trục cố định.

The motion of a particle in a plane is the combination of two independent motions along two perpendicular axes. The coordinate and velocity along each axis depend only on the acceleration and initial conditions along that axis. Scope: an inertial frame with two fixed axes.

Cơ sở thực nghiệm: thả rơi một viên bi và bắn ngang một viên khác từ cùng độ cao ở cùng lúc, hai viên chạm đất cùng lúc. Chuyển động theo phương ngang không làm thay đổi chuyển động theo phương thẳng đứng.

Experimental basis: drop one ball and fire another horizontally from the same height at the same instant; both reach the ground together. Motion along the horizontal does not alter motion along the vertical.

Khi vector gia tốc không đổi, mỗi trục là một chuyển động thẳng biến đổi đều (Chương 2). Hai trục hợp thành dạng vector:

When the acceleration vector is constant, each axis is uniformly accelerated motion (Chapter 2). The two axes combine into vector form:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + (1/2)\vec{a}t^2 \quad (3.1)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (3.2)$$

VÍ DỤ 3.1 (Vận tốc trung bình khác tốc độ trung bình) / EXAMPLE 3.1 (Average velocity versus average speed) — Một thiết bị bay không người lái ở độ cao không đổi, xuất phát lúc $t = 0$ tại A(20 ; -10) m. Nó bay thẳng đều tới B(68 ; 26) m trong 8 s, rồi bay thẳng

đều tới C(68 ; -34) m trong 12 s. Tính: a) vận tốc trên mỗi đoạn; b) vận tốc trung bình và tốc độ trung bình trên cả hành trình AC; c) độ lớn gia tốc trung bình nếu vận tốc đổi từ đoạn AB sang đoạn BC trong 2 s.

A drone at constant height starts at $t = 0$ from $A(20, -10)$ m. It flies in a straight line at constant speed to $B(68, 26)$ m in 8 s, then in a straight line at constant speed to $C(68, -34)$ m in 12 s. Find: a) the velocity on each leg; b) the average velocity and average speed over the whole path AC; c) the magnitude of the average acceleration if the velocity changes from leg AB to leg BC in 2 s.

Lời giải. / Solution.

1. Đoạn AB: $\Delta \vec{r} = (48 ; 36)$ m, nên $\vec{v}_{AB} = (6 ; 4,5)$ m/s, độ lớn 7,5 m/s. Đoạn BC: $\Delta \vec{r} = (0 ; -60)$ m, nên $\vec{v}_{BC} = (0 ; -5)$ m/s, độ lớn 5 m/s.

Leg AB: $\Delta \vec{r} = (48, 36)$ m, so $\vec{v}_{AB} = (6, 4.5)$ m/s, magnitude 7.5 m/s. Leg BC: $\Delta \vec{r} = (0, -60)$ m, so $\vec{v}_{BC} = (0, -5)$ m/s, magnitude 5 m/s.

2. Toàn hành trình: $\Delta \vec{r} = \overrightarrow{AC} = (48 ; -24)$ m trong 20 s, nên $\vec{v}_{tb} = (2,4 ; -1,2)$ m/s, độ lớn $\sqrt{(2,4^2 + 1,2^2)} \approx 2,68$ m/s, hướng xuống dưới trục Ox một góc $26,6^\circ$. Quãng đường là $60 + 60 = 120$ m, tốc độ trung bình $120/20 = 6$ m/s.

Whole path: $\Delta \vec{r} = \overrightarrow{AC} = (48, -24)$ m in 20 s, so $\vec{v}_{av} = (2.4, -1.2)$ m/s, magnitude $\sqrt{(2.4^2 + 1.2^2)} \approx 2.68$ m/s, directed 26.6° below the Ox axis. The distance travelled is $60 + 60 = 120$ m, so the average speed is $120/20 = 6$ m/s.

3. $\Delta \vec{v} = \vec{v}_{BC} - \vec{v}_{AB} = (-6 ; -9,5)$ m/s, $|\Delta \vec{v}| = \sqrt{(36 + 90,25)} \approx 11,2$ m/s, nên độ lớn gia tốc trung bình là $11,2/2 \approx 5,6$ m/s².

$\Delta \vec{v} = \vec{v}_{BC} - \vec{v}_{AB} = (-6, -9.5)$ m/s, $|\Delta \vec{v}| = \sqrt{(36 + 90.25)} \approx 11.2$ m/s, so the magnitude of the average acceleration is $11.2/2 \approx 5.6$ m/s².

Vậy vận tốc trung bình $\approx 2,68$ m/s trong khi tốc độ trung bình là 6 m/s; độ lớn gia tốc trung bình $\approx 5,6$ m/s².

Hence the average velocity is ≈ 2.68 m/s while the average speed is 6 m/s; the magnitude of the average acceleration is ≈ 5.6 m/s². ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy tốc độ trung bình bằng độ lớn vận tốc trung bình. Hai số này chỉ bằng nhau khi chất điểm đi theo đường thẳng và không đổi chiều; ở Ví dụ 3.1 chúng là 2,68 m/s và 6 m/s.

Equating the average speed with the magnitude of the average velocity. The two agree only for straight-line motion without reversal; in Example 3.1 they are 2.68 m/s and 6 m/s.

3.2. Chuyển động ném ngang — Horizontal projectile motion

Vật được ném từ độ cao h so với mặt đất với vận tốc đầu $\vec{v}_0$ nằm ngang. Chọn gốc O ở điểm ném, Ox theo hướng ném, Oy hướng lên. Theo Nguyên lý độc lập, theo Ox vật chuyển động thẳng đều ($a_x = 0$), theo Oy vật rơi tự do không vận tốc đầu ($a_y = -g$).

A body is thrown from height h above the ground with a horizontal initial velocity $\vec{v}_0$. Take the origin O at the launch point, Ox along the throw and Oy upwards. By the Principle of independence, along Ox the body moves uniformly ($a_x = 0$) and along Oy it falls freely from rest ($a_y = -g$).

ĐỊNH LÝ 3.4 (Ném ngang) / THEOREM 3.4 (Horizontal projection) — Vật ném ngang từ độ cao h với vận tốc đầu v_0 có: tọa độ $x = v_0 t$, $y = -gt^2/2$; quỹ đạo là nửa parabol $y = -gx^2/(2v_0^2)$; thời gian rơi $t = \sqrt{2h/g}$; tầm xa $L = v_0 \sqrt{2h/g}$; khi chạm đất vận tốc có độ lớn $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ và tạo với phương ngang góc φ thỏa $\tan \varphi = \sqrt{2gh}/v_0$.

A body thrown horizontally from height h with initial speed v_0 has coordinates $x = v_0 t$, $y = -gt^2/2$; its path is a half parabola $y = -gx^2/(2v_0^2)$; the fall time is $t = \sqrt{2h/g}$; the range is $L = v_0 \sqrt{2h/g}$; on landing its speed is $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ and it makes with the horizontal an angle φ such that $\tan \varphi = \sqrt{2gh}/v_0$.

Chứng minh. / Proof.

Theo Ox: $x = v_0 t$ và $v_x = v_0$. Theo Oy: $y = -gt^2/2$ và $v_y = -gt$. Khử $t = x/v_0$ khỏi biểu thức của y ta được phương trình quỹ đạo.

Along Ox: $x = v_0 t$ and $v_x = v_0$. Along Oy: $y = -gt^2/2$ and $v_y = -gt$. Eliminating $t = x/v_0$ from y gives the equation of the path.

Chạm đất khi $y = -h$, tức $gt^2/2 = h$, suy ra $t = \sqrt{2h/g}$ và $L = v_0 t$.

The body lands when $y = -h$, i.e. $gt^2/2 = h$, so $t = \sqrt{2h/g}$ and $L = v_0 t$.

Lúc đó $|v_y| = gt = \sqrt{2gh}$, nên $v^2 = v_0^2 + 2gh$ và $\tan \varphi = |v_y|/v_x = \sqrt{2gh}/v_0$.

Then $|v_y| = gt = \sqrt{2gh}$, so $v^2 = v_0^2 + 2gh$ and $\tan \varphi = |v_y|/v_x = \sqrt{2gh}/v_0$. ■

$$L = v_0 \sqrt{2h/g} \quad (3.3)$$

HỆ QUẢ 3.5 (Ném ngang xuống dốc) / COROLLARY 3.5 (Horizontal throw down a slope) — Vật ném ngang từ đỉnh dốc nghiêng góc θ so với phương ngang (dốc đi xuống theo hướng ném) rơi xuống dốc sau thời gian $t = 2v_0 \tan \theta / g$, tại điểm cách chỗ ném đoạn $\ell = 2v_0^2 \tan \theta / (g \cos \theta)$ dọc dốc. Vận tốc chạm dốc luôn thỏa $\tan \varphi = 2 \tan \theta$, không phụ thuộc v_0 .

A body thrown horizontally from the top of a slope of angle θ to the horizontal (the slope falling away in the direction of the throw) strikes the slope after $t = 2v_0 \tan \theta / g$, at a distance $\ell = 2v_0^2 \tan \theta / (g \cos \theta)$ along the slope. The velocity at impact always satisfies $\tan \varphi = 2 \tan \theta$, whatever v_0 .

Chứng minh. / Proof.

Mặt dốc có phương trình $y = -x \tan \theta$. Tại điểm chạm, $y/x = -\tan \theta$, mà $y/x = (-gt^2/2)/(v_0 t) = -gt/(2v_0)$.

The slope has equation $y = -x \tan \theta$. At the point of impact $y/x = -\tan \theta$, while $y/x = (-gt^2/2)/(v_0 t) = -gt/(2v_0)$.

Suy ra $t = 2v_0 \tan \theta / g$. Khi đó $x = v_0 t = 2v_0^2 \tan \theta / g$ và $\ell = x / \cos \theta$.

Hence $t = 2v_0 \tan \theta / g$. Then $x = v_0 t = 2v_0^2 \tan \theta / g$ and $\ell = x / \cos \theta$.

Cuối cùng $\tan \varphi = gt/v_0 = 2 \tan \theta$.

Finally $\tan \varphi = gt/v_0 = 2 \tan \theta$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Đường kéo dài của vector vận tốc tại một điểm bất kỳ của quỹ đạo ném ngang cắt đường thẳng nằm ngang qua điểm ném tại điểm có hoành độ $x/2$, tức là giữa điểm ném và hình chiếu của vật lên đường đó. Tính chất này suy từ $\tan \varphi = gt/v_0$ và $y = -gt^2/2$: tiếp tuyến lồi một đoạn $|y|/\tan \varphi = v_0 t/2 = x/2$.

The backward extension of the velocity vector at any point of the horizontal-throw path meets the horizontal line through the launch point at abscissa $x/2$, midway between the launch point and the body's projection on that line. This follows from $\tan \varphi = gt/v_0$ and $y = -gt^2/2$: the tangent runs back a distance $|y|/\tan \varphi = v_0 t/2 = x/2$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Điểm rơi nằm trên mặt dốc chứ không phải trên mặt đất, nên điều kiện chạm là toạ độ của vật thỏa phương trình đường dốc. Chọn O ở đỉnh dốc, hai phương trình chuyển động cộng một phương trình dốc cho ba ẩn x, y, t . Khoảng cách phải tính dọc dốc, không phải theo phương ngang.

The landing point lies on the slope, not on level ground, so the condition for impact is that the body's coordinates satisfy the equation of the slope. With O at the top of the slope, two equations of motion plus the slope equation give three unknowns x, y, t . The distance is wanted along the slope, not horizontally.

VÍ DỤ 3.2 (Điểm chạm nằm trên mặt dốc) / EXAMPLE 3.2 (Impact point on a slope) — Từ đỉnh một dốc nghiêng 37° so với phương ngang, người ta ném ngang một viên đá với vận tốc 15 m/s, hướng ra phía dốc đi xuống. Tính: a) thời gian bay và khoảng cách từ chỗ ném tới chỗ rơi, đo dọc dốc; b) độ lớn vận tốc khi chạm dốc, góc của nó với phương ngang và với mặt dốc. Lấy $\tan 37^\circ \approx 0,754$.

From the top of a slope at 37° to the horizontal a stone is thrown horizontally at 15 m/s, out over the downhill side. Find: a) the time of flight and the distance from launch to landing, measured along the slope; b) the speed at impact and its angle with the horizontal and with the slope. Take $\tan 37^\circ \approx 0.754$.

Lời giải. / Solution.

1. Dùng Hệ quả 3.5 với $\theta = 37^\circ$: $t = 2 \cdot 15 \cdot 0,754 / 9,8 \approx 2,31$ s.

Use Corollary 3.5 with $\theta = 37^\circ$: $t = 2 \cdot 15 \cdot 0.754 / 9.8 \approx 2.31$ s.

2. Hoành độ $x = v_0 t \approx 15 \cdot 2,31 \approx 34,6$ m; dọc dốc $\ell = x / \cos 37^\circ \approx 34,6 / 0,799 \approx 43,3$ m.

The abscissa is $x = v_0 t \approx 15 \cdot 2.31 \approx 34.6$ m; along the slope $\ell = x / \cos 37^\circ \approx 34.6 / 0.799 \approx 43.3$ m.

3. Vận tốc: $v_x = 15$ m/s, $v_y = gt \approx 22,6$ m/s, nên $v = \sqrt{(15^2 + 22,6^2)} \approx 27,1$ m/s và $\tan \varphi = 22,6/15 \approx 1,51$, $\varphi \approx 56,4^\circ$. Kiểm tra: $2 \tan 37^\circ \approx 1,51$.

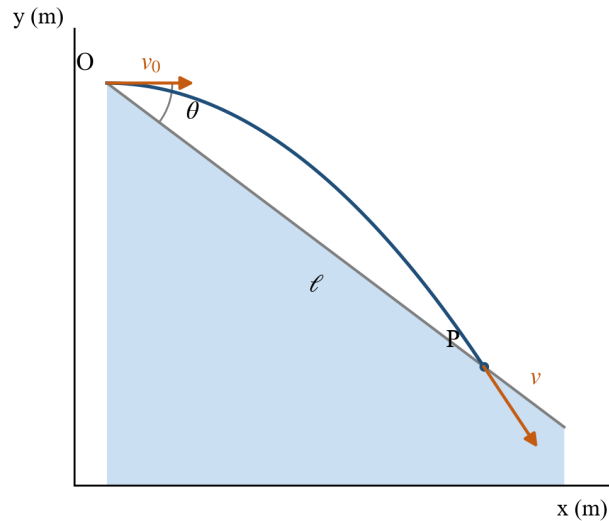
Velocity: $v_x = 15$ m/s, $v_y = gt \approx 22.6$ m/s, so $v = \sqrt{(15^2 + 22.6^2)} \approx 27.1$ m/s and $\tan \varphi = 22.6/15 \approx 1.51$, $\varphi \approx 56.4^\circ$. Check: $2 \tan 37^\circ \approx 1.51$.

4. Góc giữa vận tốc và mặt dốc là $\varphi - \theta \approx 56,4^\circ - 37^\circ = 19,4^\circ$.

The angle between the velocity and the slope is $\varphi - \theta \approx 56.4^\circ - 37^\circ = 19.4^\circ$.

Vậy viên đá bay 2,31 s, rơi cách chỗ ném $\approx 43,3$ m dọc dốc, chạm dốc với tốc độ $\approx 27,1$ m/s, nghiêng $56,4^\circ$ so với phương ngang và $19,4^\circ$ so với mặt dốc.

Hence the stone flies for 2.31 s, lands ≈ 43.3 m from the launch point along the slope, and strikes at ≈ 27.1 m/s, 56.4° below the horizontal and 19.4° to the slope. ■



Hình 3.1. Ném ngang từ đỉnh dốc 37° với $v_0 = 15 \text{ m/s}$: viên đá rơi tại P, cách O đoạn $\ell \approx 43,3 \text{ m}$ dọc dốc.

Figure 3.1. Horizontal throw from the top of a 37° slope at $v_0 = 15 \text{ m/s}$: the stone lands at P, a distance $\ell \approx 43.3 \text{ m}$ from O along the slope.

3.3. Chuyển động ném xiên — Oblique projectile motion

Vật được ném từ mặt đất với vận tốc đầu $\vec{v}_0$ hợp với phương ngang góc α ($0 < \alpha < 90^\circ$). Chọn O ở điểm ném. Thành phần đầu: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Theo Ox chuyển động thẳng đều, theo Oy chuyển động thẳng biến đổi đều với gia tốc $-g$.

A body is thrown from the ground with initial velocity $\vec{v}_0$ at an angle α to the horizontal ($0 < \alpha < 90^\circ$). Take O at the launch point. Initial components: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Along Ox the motion is uniform; along Oy it is uniformly accelerated with acceleration $-g$.

ĐỊNH LÝ 3.6 (Ném xiên) / THEOREM 3.6 (Oblique projection) — Vật ném xiên từ mặt đất có: $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$, $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2$; quỹ đạo $y = x \tan \alpha - gx^2/(2v_0^2 \cos^2 \alpha)$; thời gian bay $T = 2v_0 \sin \alpha / g$; độ cao cực đại $H = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$; tầm xa $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$.
A body thrown obliquely from the ground has $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$, $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2$; path $y = x \tan \alpha - gx^2/(2v_0^2 \cos^2 \alpha)$; time of flight $T = 2v_0 \sin \alpha / g$; maximum height $H = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$; range $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$.

Chứng minh. / Proof.

Hai phương trình tọa độ có ngay từ Nguyên lý độc lập. Thay $t = x/(v_0 \cos \alpha)$ vào y được phương trình quỹ đạo.

The two coordinate equations follow at once from the Principle of independence. Substituting $t = x/(v_0 \cos \alpha)$ into y gives the equation of the path.

Vật trở về mặt đất khi $y = 0$, $t \neq 0$: $v_0 \sin \alpha = gt/2$, tức $T = 2v_0 \sin \alpha / g$.

The body returns to the ground when $y = 0$, $t \neq 0$: $v_0 \sin \alpha = gt/2$, i.e. $T = 2v_0 \sin \alpha / g$.

Ở điểm cao nhất $v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0$, tức $t = T/2$. Thay vào y: $H = v_0 \sin \alpha \cdot T/2 - g(T/2)^2/2 = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$.

At the highest point $v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0$, i.e. $t = T/2$. Substituting in y : $H = v_0 \sin \alpha \cdot T/2 - g(T/2)^2/2 = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$.

Tầm xa $L = v_0 \cos \alpha \cdot T = 2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g$.

The range is $L = v_0 \cos \alpha \cdot T = 2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g$. ■

$$T = 2v_0 \sin \alpha / g, \quad H = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g), \quad L = v_0^2 \sin 2\alpha / g \quad (3.4)$$

$$y = x \tan \alpha - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha) \quad (3.5)$$

HỆ QUẢ 3.7 (Góc ném xa nhất trên mặt đất) / COROLLARY 3.7 (Best angle on level ground) — Với v_0 cho trước, tầm xa trên mặt đất lớn nhất là v_0^2/g , đạt khi $\alpha = 45^\circ$. Hai góc ném phụ nhau α và $90^\circ - \alpha$ cho cùng tầm xa.

For a given v_0 the greatest range on level ground is v_0^2/g , reached at $\alpha = 45^\circ$. Two complementary launch angles α and $90^\circ - \alpha$ give the same range.

Chứng minh. / Proof.

$L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ và $\sin 2\alpha \leq 1$, dấu bằng khi $2\alpha = 90^\circ$.

$L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ and $\sin 2\alpha \leq 1$, with equality when $2\alpha = 90^\circ$.

Vì $\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$ nên thay α bằng $90^\circ - \alpha$ thì L không đổi.

Since $\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$, replacing α by $90^\circ - \alpha$ leaves L unchanged. ■

TÍNH CHẤT 3.8 (Tốc độ theo độ cao) / PROPERTY 3.8 (Speed against height) — Tốc độ của vật ném (xiên, ngang hay thẳng đứng) ở độ cao y so với điểm ném thỏa $v^2 = v_0^2 - 2gy$, không phụ thuộc góc ném và không phụ thuộc vật đang đi lên hay đi xuống.

The speed of a projectile (oblique, horizontal or vertical) at height y above the launch point satisfies $v^2 = v_0^2 - 2gy$, independent of the launch angle and of whether the body is rising or falling.

Chứng minh. / Proof.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2 = v_0^2 - 2g(v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2) = v_0^2 - 2gy.$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2 = v_0^2 - 2g(v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2) = v_0^2 - 2gy. \quad \blacksquare$$

TÍNH CHẤT 3.9 (Chuyển động tương đối khi chỉ có trọng lực) / PROPERTY 3.9 (Relative motion under gravity alone) — Hai vật cùng chuyển động chỉ dưới tác dụng của trọng lực (cùng g) và còn đang bay: vector vị trí của vật 2 đối với vật 1 thay đổi đều, $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{21}(0) + (\vec{v}_{02} - \vec{v}_{01})t$, với $\vec{v}_{01}$, $\vec{v}_{02}$ là các vận tốc đầu.

Two bodies moving under gravity alone (the same g) and still in flight: the position vector of body 2 relative to body 1 changes uniformly, $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{21}(0) + (\vec{v}_{02} - \vec{v}_{01})t$, where $\vec{v}_{01}$, $\vec{v}_{02}$ are the initial velocities.

Chứng minh. / Proof.

Với mỗi vật, $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(0) + \vec{v}_{0i}t + (1/2)\vec{g}t^2$. Lấy hiệu hai vật, số hạng $(1/2)\vec{g}t^2$ triệt tiêu.

For each body, $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(0) + \vec{v}_{0i}t + (1/2)\vec{g}t^2$. Subtracting, the term $(1/2)\vec{g}t^2$ cancels. ■

Trong hệ quy chiếu rơi tự do, mọi vật chỉ chịu trọng lực đều chuyển động thẳng đều; nhiều bài ném đồng thời quy về chuyển động thẳng đều theo cách đó.

In a freely falling frame every body under gravity alone moves in a straight line at constant velocity, which reduces many simultaneous-throw problems to uniform motion.

NHẬN XÉT / REMARK — Hai góc phụ nhau cho cùng tầm xa nhưng thời gian bay khác nhau: $T \propto \sin \alpha$, nên $T(\alpha)/T(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$. Với $\alpha = 30^\circ$ và 60° , thời gian bay tỉ lệ $1 : \sqrt{3}$ và độ cao cực đại tỉ lệ $1 : 3$ (Hình 3.3).

Complementary angles give the same range but different flight times: $T \propto \sin \alpha$, so $T(\alpha)/T(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$. At $\alpha = 30^\circ$ and 60° the flight times are in the ratio $1 : \sqrt{3}$ and the maximum heights in the ratio $1 : 3$ (Figure 3.3).

VÍ DỤ 3.3 (Công thức ném xiên) / EXAMPLE 3.3 (Oblique-projection formulas) — Cầu thủ đá quả bóng từ mặt đất với vận tốc 20 m/s, hướng 53° so với phương ngang. Tính: a) thời gian bay, độ cao cực đại, tầm xa; b) vận tốc (độ lớn) và độ cao của bóng sau 1,0 s; c) tốc độ của bóng khi ở độ cao 5,0 m.

A player kicks a ball from the ground at 20 m/s, 53° above the horizontal. Find: a) the time of flight, maximum height and range; b) the speed and height of the ball after 1.0 s; c) the speed of the ball when it is 5.0 m high.

Lời giải. / Solution.

- $v_{0x} = 20 \cos 53^\circ \approx 12,0$ m/s, $v_{0y} = 20 \sin 53^\circ \approx 16,0$ m/s. Theo Định lý 3.6: $T = 2 \cdot 16,0 / 9,8 \approx 3,26$ s; $H = 16,0^2 / (2 \cdot 9,8) \approx 13,0$ m; $L = 20^2 \cdot \sin 106^\circ / 9,8 \approx 39,2$ m.
 $v_{0x} = 20 \cos 53^\circ \approx 12.0$ m/s, $v_{0y} = 20 \sin 53^\circ \approx 16.0$ m/s. By Theorem 3.6: $T = 2 \cdot 16.0 / 9.8 \approx 3.26$ s; $H = 16.0^2 / (2 \cdot 9.8) \approx 13.0$ m; $L = 20^2 \cdot \sin 106^\circ / 9.8 \approx 39.2$ m.
- Tại $t = 1,0$ s: $v_x = 12,0$ m/s, $v_y = 16,0 - 9,8 = 6,2$ m/s, nên $v \approx 13,5$ m/s; độ cao $y = 16,0 \cdot 1,0 - 4,9 \approx 11,1$ m.
At $t = 1.0$ s: $v_x = 12.0$ m/s, $v_y = 16.0 - 9.8 = 6.2$ m/s, so $v \approx 13.5$ m/s; the height is $y = 16.0 \cdot 1.0 - 4.9 \approx 11.1$ m.
- Theo Tính chất 3.8: $v = \sqrt{(20^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 5,0)} = \sqrt{302} \approx 17,4$ m/s, bất kể bóng đang lên hay xuống.
By Property 3.8: $v = \sqrt{(20^2 - 2 \cdot 9.8 \cdot 5.0)} = \sqrt{302} \approx 17.4$ m/s, whether the ball is rising or falling.

Vậy $T \approx 3,26$ s, $H \approx 13,0$ m, $L \approx 39,2$ m; sau 1,0 s bóng có tốc độ $\approx 13,5$ m/s ở độ cao $\approx 11,1$ m; ở độ cao 5,0 m tốc độ $\approx 17,4$ m/s.

Hence $T \approx 3.26$ s, $H \approx 13.0$ m, $L \approx 39.2$ m; after 1.0 s the ball moves at ≈ 13.5 m/s at a height ≈ 11.1 m; at 5.0 m height its speed is ≈ 17.4 m/s. ■

VÍ DỤ 3.4 (Hệ quy chiếu rơi tự do) / EXAMPLE 3.4 (Freely falling frame) — Từ cùng một điểm trên mặt đất, cùng lúc ném hai quả bóng: quả 1 với 20 m/s, góc 60° ; quả 2 với 15 m/s, góc 30° , cả hai về cùng một phía. Tính khoảng cách giữa hai quả bóng sau 1,0 s và sau 1,5 s, và góc mà đường nối chúng hợp với phương ngang.

From the same point on the ground two balls are thrown at once, both to the same side: ball 1 at 20 m/s, 60° ; ball 2 at 15 m/s, 30° . Find the distance between the balls after 1.0 s and after 1.5 s, and the angle the line joining them makes with the horizontal.

Lời giải. / Solution.

Tính thời gian bay của quả 2: $T_2 = 2 \cdot 15 \cdot \sin 30^\circ / 9,8 \approx 1,53$ s, nên cả hai còn bay ở $t = 1,0$ s và $t = 1,5$ s; Tính chất 3.9 dùng được.

The flight time of ball 2 is $T_2 = 2 \cdot 15 \cdot \sin 30^\circ / 9.8 \approx 1.53$ s, so both balls are still airborne at $t = 1.0$ s and $t = 1.5$ s; Property 3.9 applies.

1. Hiệu vận tốc đầu: $\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02} = (10,0 - 13,0 ; 17,3 - 7,5) = (-3,0 ; 9,8)$ m/s, độ lớn $\approx 10,3$ m/s.

Difference of initial velocities: $\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02} = (10.0 - 13.0, 17.3 - 7.5) = (-3.0, 9.8)$ m/s, magnitude ≈ 10.3 m/s.

2. Vì $\vec{r}_{12} = (\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02})t$ nên khoảng cách $d = 10,3t$: $\approx 10,3$ m khi $t = 1,0$ s và $\approx 15,4$ m khi $t = 1,5$ s.

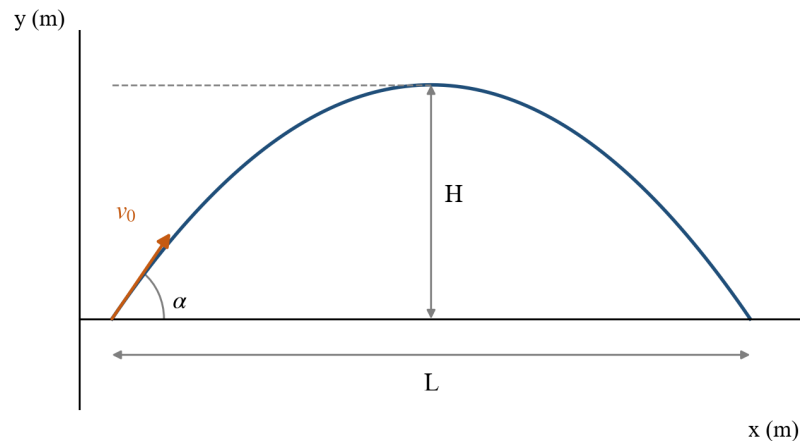
Since $\vec{r}_{12} = (\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02})t$, the distance is $d = 10.3t$: ≈ 10.3 m at $t = 1.0$ s and ≈ 15.4 m at $t = 1.5$ s.

3. Đường nối luôn song song với $(-3,0 ; 9,8)$: $\tan \beta = 9,8/3,0$, $\beta \approx 73^\circ$ so với phương ngang; quả 1 ở phía trên và hơi lùi so với quả 2.

The line joining the balls is always parallel to $(-3.0, 9.8)$: $\tan \beta = 9.8/3.0$, $\beta \approx 73^\circ$ to the horizontal; ball 1 is above and slightly behind ball 2.

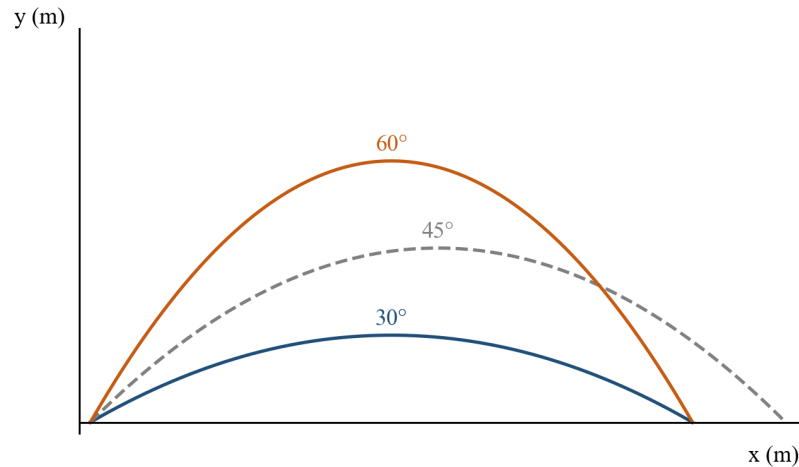
Vậy hai quả cách nhau $\approx 10,3$ m sau 1,0 s và $\approx 15,4$ m sau 1,5 s; đường nối giữ nguyên phương, hợp với phương ngang góc $\approx 73^\circ$.

Hence the balls are ≈ 10.3 m apart after 1.0 s and ≈ 15.4 m after 1.5 s; the line joining them keeps its direction, at $\approx 73^\circ$ to the horizontal. ■



Hình 3.2. Ném xiên với $v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 53^\circ$: độ cao cực đại $H \approx 13,0$ m, tầm xa $L \approx 39,2$ m.

Figure 3.2. Oblique projection with $v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 53^\circ$: maximum height $H \approx 13.0$ m, range $L \approx 39.2$ m.



Hình 3.3. Ném với $v_0 = 25 \text{ m/s}$: $\alpha = 30^\circ$ và 60° cho cùng tầm xa $\approx 55,2 \text{ m}$; $\alpha = 45^\circ$ (nét đứt) cho tầm xa lớn nhất $\approx 63,8 \text{ m}$.

Figure 3.3. Launch at $v_0 = 25 \text{ m/s}$: $\alpha = 30^\circ$ and 60° give the same range $\approx 55.2 \text{ m}$; $\alpha = 45^\circ$ (dashed) gives the greatest range $\approx 63.8 \text{ m}$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng $T = 2v_0 \sin \alpha / g$ và $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ khi điểm rơi không cùng độ cao với điểm ném. Hai công thức này chỉ đúng khi vật về lại đúng độ cao lúc ném; ném từ độ cao h phải giải $y = -h$.

Using $T = 2v_0 \sin \alpha / g$ and $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ when the landing point is not level with the launch point. These hold only when the body returns to its launch height; for a throw from height h solve $y = -h$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho rằng ở điểm cao nhất vận tốc và gia tốc đều bằng 0. Ở điểm cao nhất chỉ có $v_y = 0$; $v_x = v_0 \cos \alpha$ vẫn khác 0 và gia tốc vẫn bằng g , hướng xuống.

Believing that at the highest point both velocity and acceleration are zero. At the top only $v_y = 0$; $v_x = v_0 \cos \alpha$ is still non-zero and the acceleration is still g , pointing down.

3.4. Parabol an toàn, ném từ độ cao và ném lên mặt nghiêng — *Safety parabola, elevated throws and throws onto a slope*

Bài toán cực trị của chuyển động ném hỏi: với tốc độ v_0 cho trước và góc ném tùy chọn, những điểm nào của mặt phẳng đến được, và đến điểm nào đó bằng cách nào tiết kiệm nhất. Phương trình quỹ đạo theo $\tan \alpha$ cho một lối giải không dùng đạo hàm: coi $t = \tan \alpha$ là ẩn, dùng $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$.

Extremal projectile problems ask: for a given speed v_0 and a free launch angle, which points of the plane can be reached, and how to reach a given point most economically. The equation of the path in terms of $\tan \alpha$ gives a method that needs no calculus: treat $t = \tan \alpha$ as the unknown and use $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$.

ĐỊNH LÝ 3.10 (Parabol an toàn) / THEOREM 3.10 (Safety parabola) — Với tốc độ ném v_0 , điểm (x, y) với $x > 0$ đến được khi và chỉ khi $y \leq v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$. Đường cong $y = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$ là parabol an toàn, đường bao của mọi quỹ đạo cùng tốc độ ném. Điểm nằm trong parabol đến được bằng hai góc ném, điểm trên parabol bằng đúng một góc với $\tan \alpha = v_0^2/(gx)$, điểm ngoài parabol không đến được.

For launch speed v_0 , a point (x, y) with $x > 0$ can be reached if and only if $y \leq v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$. The curve $y = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$ is the safety parabola, the envelope of all paths of the same launch speed. A point inside the parabola is reached by two launch angles, a point on it by exactly one, with $\tan \alpha = v_0^2/(gx)$, and a point outside cannot be reached.

Chứng minh. / Proof.

Điểm (x, y) nằm trên quỹ đạo góc α khi $y = x \tan \alpha - gx^2(1 + \tan^2 \alpha)/(2v_0^2)$. Đặt $t = \tan \alpha$, $A = gx^2/(2v_0^2)$, phương trình thành bậc hai theo t :

The point (x, y) lies on the path of angle α when $y = x \tan \alpha - gx^2(1 + \tan^2 \alpha)/(2v_0^2)$. Put $t = \tan \alpha$ and $A = gx^2/(2v_0^2)$; the equation becomes a quadratic in t :

$$At^2 - xt + (y + A) = 0$$

Có góc ném khi và chỉ khi phương trình có nghiệm thực: $x^2 - 4A(y + A) \geq 0$, tức $y \leq x^2/(4A) - A = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$.

A launch angle exists if and only if the equation has a real root: $x^2 - 4A(y + A) \geq 0$, i.e. $y \leq x^2/(4A) - A = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$.

Dấu bằng cho nghiệm kép $t = x/(2A) = v_0^2/(gx)$; dấu nhỏ hơn cho hai nghiệm phân biệt có tổng $2v_0^2/(gx)$.

Equality gives a double root $t = x/(2A) = v_0^2/(gx)$; strict inequality gives two distinct roots with sum $2v_0^2/(gx)$. ■

$$y_{\max}(x) = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2) \quad (3.6)$$

HỆ QUẢ 3.11 (Ném từ độ cao) / COROLLARY 3.11 (Throw from a height) — Ném từ độ cao h xuống mặt đất nằm ngang với tốc độ v_0 : tầm xa lớn nhất là $L_{\max} = (v_0/g)\sqrt{v_0^2 + 2gh}$, đạt khi $\tan \alpha = v_0/\sqrt{v_0^2 + 2gh} < 1$, tức $\alpha < 45^\circ$. Tại tầm xa lớn nhất, vận tốc lúc chạm đất vuông góc với vận tốc lúc ném.

Throwing from height h to level ground at speed v_0 : the greatest range is $L_{\max} = (v_0/g)\sqrt{v_0^2 + 2gh}$, reached when $\tan \alpha = v_0/\sqrt{v_0^2 + 2gh} < 1$, i.e. $\alpha < 45^\circ$. At the greatest range the velocity at impact is perpendicular to the launch velocity.

Chứng minh. / Proof.

Mặt đất ứng với điểm $(x, -h)$. Theo Định lý 3.10 điểm này đến được khi $-h \leq v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$, tức $x^2 \leq v_0^2(v_0^2 + 2gh)/g^2$. Vậy $x_{\max} = (v_0/g)\sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

The ground corresponds to the point $(x, -h)$. By Theorem 3.10 it is reachable when $-h \leq v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2)$, i.e. $x^2 \leq v_0^2(v_0^2 + 2gh)/g^2$. Hence $x_{\max} = (v_0/g)\sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

Với điểm biên, $\tan \alpha = v_0^2/(g \cdot x_{\max}) = v_0/\sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Đặt $V = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ là tốc độ lúc chạm đất (Tính chất 3.8); khi đó $\sin \alpha = v_0/\sqrt{v_0^2 + V^2}$, $\cos \alpha = V/\sqrt{v_0^2 + V^2}$.

At the boundary point, $\tan \alpha = v_0^2/(g \cdot x_{\max}) = v_0/\sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Let $V = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ be the landing speed (Property 3.8); then $\sin \alpha = v_0/\sqrt{v_0^2 + V^2}$ and $\cos \alpha = V/\sqrt{v_0^2 + V^2}$.

Tích vô hướng của hai vận tốc là $v_0^2 \cos^2 \alpha - v_0 \sin \alpha \cdot \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}$. Thay vào: số hạng đầu là $v_0^2 V^2/(v_0^2 + V^2)$; vì $v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh = V^4/(v_0^2 + V^2)$ nên số hạng sau cũng bằng $v_0^2 V^2/(v_0^2 + V^2)$. Hiệu bằng 0.

The dot product of the two velocities is $v_0^2 \cos^2 \alpha - v_0 \sin \alpha \cdot \sqrt{(v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh)}$. Substituting: the first term is $v_0^2 V^2 / (v_0^2 + V^2)$; since $v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh = V^4 / (v_0^2 + V^2)$ the second term equals $v_0^2 V^2 / (v_0^2 + V^2)$ as well. The difference is 0. ■

ĐỊNH LÝ 3.12 (Ném trên mặt nghiêng) / THEOREM 3.12 (Throw on an inclined plane)

— Vật ném từ điểm O trên mặt phẳng nghiêng góc β so với phương ngang ($\beta > 0$ dốc lên, $\beta < 0$ dốc xuống) với tốc độ v_0 , hướng hợp với phương ngang góc α , rơi lại mặt nghiêng tại điểm cách O đoạn $\ell = 2v_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) / (g \cos^2 \beta)$. Giá trị lớn nhất $\ell_{\max} = v_0^2 / (g(1 + \sin \beta))$ đạt khi $\alpha = 45^\circ + \beta/2$, tức $\vec{v}_0$ là phân giác của góc giữa mặt nghiêng và phương thẳng đứng hướng lên.

A body thrown from a point O on a plane inclined at β to the horizontal ($\beta > 0$ uphill, $\beta < 0$ downhill) with speed v_0 at angle α to the horizontal lands on the plane at a distance $\ell = 2v_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) / (g \cos^2 \beta)$ from O. The maximum $\ell_{\max} = v_0^2 / (g(1 + \sin \beta))$ is reached when $\alpha = 45^\circ + \beta/2$, that is, when $\vec{v}_0$ bisects the angle between the plane and the upward vertical.

Chứng minh. / Proof.

Chọn trục theo mặt nghiêng: gia tốc $g \sin \beta$ xuống dốc, $g \cos \beta$ vuông góc mặt. Đặt $u = \alpha - \beta$ là góc giữa $\vec{v}_0$ và mặt nghiêng; thành phần đầu $v_0 \cos u$ dọc mặt, $v_0 \sin u$ vuông góc mặt.

Take axes along the plane: acceleration $g \sin \beta$ down the slope and $g \cos \beta$ into the plane. Let $u = \alpha - \beta$ be the angle between $\vec{v}_0$ and the plane; the initial components are $v_0 \cos u$ along the plane and $v_0 \sin u$ perpendicular to it.

Vật rời và trở lại mặt nghiêng khi toạ độ vuông góc bằng 0: $T = 2v_0 \sin u / (g \cos \beta)$.

The body leaves and returns to the plane when the perpendicular coordinate is 0: $T = 2v_0 \sin u / (g \cos \beta)$.

Dọc mặt: $\ell = v_0 \cos u \cdot T - (g \sin \beta) T^2 / 2$. Thay T:

Along the plane: $\ell = v_0 \cos u \cdot T - (g \sin \beta) T^2 / 2$. Substituting T:

$$\ell = 2v_0^2 \sin u (\cos u \cos \beta - \sin u \sin \beta) / (g \cos^2 \beta) = 2v_0^2 \sin u \cos(u + \beta) / (g \cos^2 \beta)$$

Vì $u + \beta = \alpha$, đây là công thức cần chứng minh. Dùng $2 \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) = \sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta \leq 1 - \sin \beta$, dấu bằng khi $2\alpha - \beta = 90^\circ$, ta có $\ell_{\max} = v_0^2 (1 - \sin \beta) / (g \cos^2 \beta) = v_0^2 / (g(1 + \sin \beta))$.

Since $u + \beta = \alpha$ this is the stated formula. Using $2 \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) = \sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta \leq 1 - \sin \beta$, with equality when $2\alpha - \beta = 90^\circ$, we get $\ell_{\max} = v_0^2 (1 - \sin \beta) / (g \cos^2 \beta) = v_0^2 / (g(1 + \sin \beta))$. ■

$$\ell_{\max} = v_0^2 / (g(1 + \sin \beta)), \quad \alpha = 45^\circ + \beta/2 \quad (3.7)$$

HỆ QUẢ 3.13 (Vượt vật cản với tốc độ nhỏ nhất) / COROLLARY 3.13 (Clearing an obstacle with the least speed)

— Để ném từ mặt đất vượt qua đỉnh một bức tường cao h , cách điểm ném d theo phương ngang, tốc độ cần có thỏa $v_0^2 \geq g(h + \sqrt{h^2 + d^2})$. Tốc độ nhỏ nhất ứng với góc tan $\alpha = v_0^2 / (gd) = (h + \sqrt{h^2 + d^2}) / d$.

To throw from the ground over the top of a wall of height h at horizontal distance d , the speed must

satisfy $v_0^2 \geq g(h + \sqrt{h^2 + d^2})$. The least speed corresponds to the angle $\tan \alpha = v_0^2/(gd) = (h + \sqrt{h^2 + d^2})/d$.

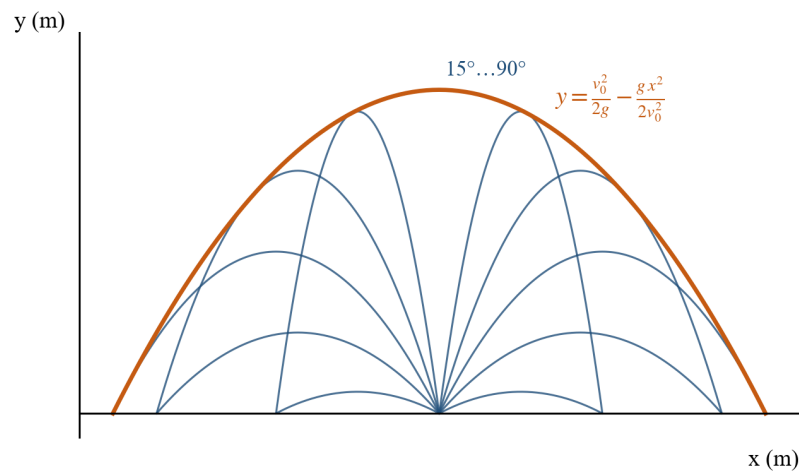
Chứng minh. / Proof.

Đỉnh tường (d, h) phải nằm trong hoặc trên parabol an toàn: $h \leq v_0^2/(2g) - gd^2/(2v_0^2)$. Đặt $Q = v_0^2/g > 0$, bất đẳng thức thành $Q^2 - 2hQ - d^2 \geq 0$, nghĩa là $Q \geq h + \sqrt{h^2 + d^2}$.

The top of the wall (d, h) must lie inside or on the safety parabola: $h \leq v_0^2/(2g) - gd^2/(2v_0^2)$. Put $Q = v_0^2/g > 0$; the inequality becomes $Q^2 - 2hQ - d^2 \geq 0$, that is $Q \geq h + \sqrt{h^2 + d^2}$.

Giá trị nhỏ nhất ứng với điểm nằm đúng trên parabol, khi đó $\tan \alpha = v_0^2/(gd)$ theo Định lý 3.10.

The least value corresponds to the point lying exactly on the parabola, where $\tan \alpha = v_0^2/(gd)$ by Theorem 3.10. ■



Hình 3.4. Các quỹ đạo ném với $v_0 = 20$ m/s ở góc $15^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ (về hai phía) và đường bao của chúng, parabol an toàn.

Figure 3.4. Paths with $v_0 = 20$ m/s at $15^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ (to both sides) and their envelope, the safety parabola.

NHẬN XÉT / REMARK — Khi $h = 0$, Hệ quả 3.11 cho $L_{\max} = v_0^2/g$ và $\alpha = 45^\circ$, khớp Hệ quả 3.7. Khi h tăng, góc tối ưu giảm dần: từ độ cao lớn, thời gian bay đã dài sẵn nhờ độ cao, nên thành phần ngang của vận tốc đầu có lợi hơn thành phần đứng.

For $h = 0$, Corollary 3.11 gives $L_{\max} = v_0^2/g$ and $\alpha = 45^\circ$, agreeing with Corollary 3.7. As h grows the best angle decreases: from a great height the flight is already long because of the height, so the horizontal component of the initial velocity pays off more than the vertical one.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Có cả độ cao h lẫn tầm xa cần cực đại, và đề không cho góc: đây là dấu hiệu dùng parabol an toàn thay vì viết T và L theo α rồi tìm cực trị. Điểm rơi $(x, -h)$ chạm biên parabol, nên chỉ cần giải một bất đẳng thức theo x .

The height h and a maximum range are both present and no angle is given: the cue to use the safety parabola instead of writing T and L in terms of α and optimising. The landing point $(x, -h)$ touches the parabola boundary, so one inequality in x is all that must be solved.

VÍ DỤ 3.5 (Góc tối ưu khi ném từ độ cao) / EXAMPLE 3.5 (Best angle from a height) —

Từ ban công cao 10 m, một người ném quả bóng với tốc độ 14 m/s, góc ném tùy chọn. Tính: a) tầm xa lớn nhất trên mặt đất và góc ném tương ứng; b) tầm xa khi ném ở 45°; c) thời gian bay và tốc độ lúc chạm đất trong trường hợp a).

From a balcony 10 m high a person throws a ball at 14 m/s, at any chosen angle. Find: a) the greatest range on the ground and the corresponding launch angle; b) the range when thrown at 45°; c) the flight time and impact speed in case a).

Lời giải. / Solution.

1. $V = \sqrt{(14^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 10)} = 14\sqrt{2} \approx 19,8 \text{ m/s}$. Hệ quả 3.11: $L_{\max} = 14 \cdot 19,8 / 9,8 = 20\sqrt{2} \approx 28,3 \text{ m}$; $\tan \alpha = 14/19,8 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha \approx 35,3^\circ$.
 $V = \sqrt{(14^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 10)} = 14\sqrt{2} \approx 19,8 \text{ m/s}$. Corollary 3.11: $L_{\max} = 14 \cdot 19,8 / 9,8 = 20\sqrt{2} \approx 28,3 \text{ m}$; $\tan \alpha = 14/19,8 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha \approx 35,3^\circ$.
2. Ở 45°: $v_{0y} = 14/\sqrt{2} \approx 9,90 \text{ m/s}$. Giải $y = -10$: $9,90t - 4,9t^2 = -10$, được $t \approx 2,76 \text{ s}$; tầm xa $9,90 \cdot 2,76 \approx 27,3 \text{ m}$, nhỏ hơn 28,3 m khoảng 1,0 m.
At 45°: $v_{0y} = 14/\sqrt{2} \approx 9,90 \text{ m/s}$. Solving $y = -10$: $9,90t - 4,9t^2 = -10$ gives $t \approx 2,76 \text{ s}$; the range is $9,90 \cdot 2,76 \approx 27,3 \text{ m}$, about 1.0 m less than 28.3 m.
3. Với $\alpha \approx 35,3^\circ$: $v_x = 14 \cos \alpha \approx 11,4 \text{ m/s}$ nên $t = L/v_x \approx 28,3/11,4 \approx 2,47 \text{ s}$; tốc độ chạm đất bằng $V \approx 19,8 \text{ m/s}$.
At $\alpha \approx 35,3^\circ$: $v_x = 14 \cos \alpha \approx 11,4 \text{ m/s}$, so $t = L/v_x \approx 28,3/11,4 \approx 2,47 \text{ s}$; the impact speed is $V \approx 19,8 \text{ m/s}$.

Vậy tầm xa lớn nhất $\approx 28,3 \text{ m}$ khi ném ở $\approx 35,3^\circ$; ném ở 45° chỉ được $\approx 27,3 \text{ m}$; trường hợp tối ưu bay $\approx 2,47 \text{ s}$ và chạm đất với tốc độ $\approx 19,8 \text{ m/s}$.

Hence the greatest range is $\approx 28,3 \text{ m}$ at $\approx 35,3^\circ$; a 45° throw gives only $\approx 27,3 \text{ m}$; the optimal throw flies $\approx 2,47 \text{ s}$ and lands at $\approx 19,8 \text{ m/s}$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Bài hỏi cực đại của một đại lượng đo dọc mặt nghiêng, nên chọn trục theo mặt nghiêng: khi đó gia tốc có hai thành phần không đổi và chuyển động là hai chuyển động thẳng biến đổi đều. Công thức của Định lý 3.12 xử lý cả dốc lên ($\beta > 0$) lẫn dốc xuống ($\beta < 0$).

The problem asks for a maximum of a quantity measured along an inclined plane, so choose axes along the plane: the acceleration then has two constant components and the motion splits into two uniformly accelerated motions. Theorem 3.12 covers both uphill ($\beta > 0$) and downhill ($\beta < 0$).

VÍ DỤ 3.6 (Trục dọc mặt nghiêng) / EXAMPLE 3.6 (Axes along the slope) — Một khẩu súng nén bắn bi từ điểm O trên sườn nghiêng 30° so với phương ngang, tốc độ bi 12 m/s, hướng bắn tùy chọn trong mặt phẳng thẳng đứng chứa đường dốc nhất. Tìm: a) khoảng cách lớn nhất tới điểm rơi và góc bắn so với phương ngang nếu bắn lên dốc; b) các đại lượng tương ứng nếu bắn xuống dốc; c) thời gian bay của viên bi ở câu a).

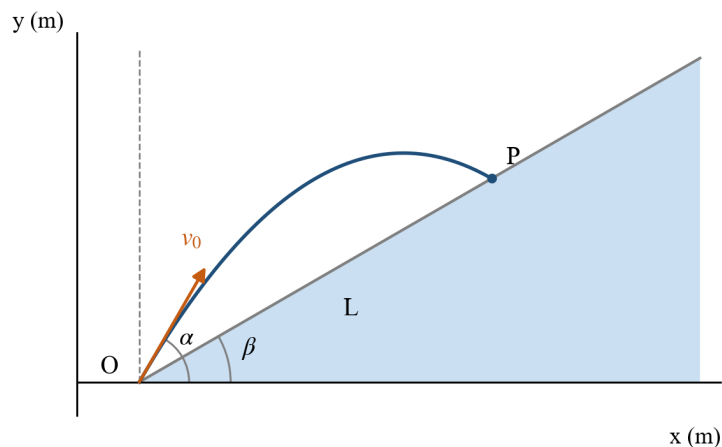
A pellet gun at a point O on a hillside inclined at 30° to the horizontal fires at 12 m/s in any direction in the vertical plane containing the line of steepest slope. Find: a) the greatest distance to the landing point and the angle of fire to the horizontal when firing uphill; b) the corresponding quantities when firing downhill; c) the flight time of the pellet in part a).

Lời giải. / Solution.

1. Bắn lên dốc ($\beta = 30^\circ$): $\ell_{\max} = 12^2 / (9,8 \cdot (1 + 0,5)) \approx 9,80 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$.
Uphill ($\beta = 30^\circ$): $\ell_{\max} = 12^2 / (9.8 \cdot (1 + 0.5)) \approx 9.80 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$.
2. Bắn xuống dốc ($\beta = -30^\circ$): $\ell_{\max} = 12^2 / (9,8 \cdot (1 - 0,5)) \approx 29,4 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ so với phương ngang, hướng xuống dưới theo chiều dốc đi xuống, hướng bắn nghiêng lên 30° trên đường ngang.
Downhill ($\beta = -30^\circ$): $\ell_{\max} = 12^2 / (9.8 \cdot (1 - 0.5)) \approx 29.4 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ to the horizontal, measured above the horizontal on the downhill side.
3. Với câu a): góc giữa vận tốc đầu và mặt dốc $u = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, nên $T = 2 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ / (9,8 \cdot \cos 30^\circ) \approx 1,41 \text{ s}$.
For part a): the angle between the launch velocity and the slope is $u = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, so $T = 2 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ / (9.8 \cdot \cos 30^\circ) \approx 1.41 \text{ s}$.

Vậy bắn lên dốc xa nhất $\approx 9,80 \text{ m}$ với góc 60° ; bắn xuống dốc xa nhất $\approx 29,4 \text{ m}$ với góc 30° trên phương ngang; thời gian bay ở câu a) $\approx 1,41 \text{ s}$.

Hence the greatest uphill distance is $\approx 9.80 \text{ m}$ at 60° ; downhill $\approx 29.4 \text{ m}$ at 30° above the horizontal; the flight time in part a) is $\approx 1.41 \text{ s}$. ■



Hình 3.5. Ném lên mặt nghiêng $\beta = 30^\circ$ với $v_0 = 12 \text{ m/s}$ ở $\alpha = 60^\circ$: vector v_0 là phân giác góc giữa mặt nghiêng và phương thẳng đứng, viên bi rơi tại P cách O đoạn $L \approx 9,80 \text{ m}$.

Figure 3.5. Throw onto an incline $\beta = 30^\circ$ at $v_0 = 12 \text{ m/s}$ and $\alpha = 60^\circ$: the vector v_0 bisects the angle between the slope and the vertical, and the pellet lands at P, a distance $L \approx 9.80 \text{ m}$ from O.

VÍ DỤ 3.7 (Điểm cao hơn mặt đất) / EXAMPLE 3.7 (A target above the ground) — Vòi chữa cháy đặt trên mặt đất phun nước với tốc độ 16 m/s , người điều khiển chọn được góc phun. Một ngọn lửa ở độ cao $8,0 \text{ m}$ trên mặt tường thẳng đứng. Tìm: a) tầm phun xa nhất trên mặt đất; b) khoảng cách lớn nhất từ chân tường tới vòi mà nước vẫn tới được ngọn lửa, và góc phun khi đó.

A fire hose on the ground sprays water at 16 m/s with a selectable angle. A fire burns at a height of 8.0 m on a vertical wall. Find: a) the greatest range of the jet on the ground; b) the greatest distance from the foot of the wall to the hose at which the water still reaches the fire, and the spray angle then.

Lời giải. / Solution.

1. Trên mặt đất, $L_{\max} = v_0^2/g = 256/9,8 \approx 26,1$ m (Hệ quả 3.7).
On the ground, $L_{\max} = v_0^2/g = 256/9.8 \approx 26.1$ m (Corollary 3.7).
2. Điểm cần tới có tung độ $y = 8,0$ m. Theo Định lý 3.10: $8,0 \leq 256/19,6 - 9,8x^2/512$, tức $9,8x^2/512 \leq 13,06 - 8,0 = 5,06$.
The target has $y = 8.0$ m. By Theorem 3.10: $8.0 \leq 256/19.6 - 9.8x^2/512$, i.e. $9.8x^2/512 \leq 13.06 - 8.0 = 5.06$.
3. $x^2 \leq 5,06 \cdot 512/9,8 \approx 264$, $x_{\max} \approx 16,3$ m. Góc: $\tan \alpha = v_0^2/(g \cdot x_{\max}) = 26,1/16,3 \approx 1,61$, $\alpha \approx 58,1^\circ$.
 $x^2 \leq 5.06 \cdot 512/9.8 \approx 264$, $x_{\max} \approx 16.3$ m. Angle: $\tan \alpha = v_0^2/(g \cdot x_{\max}) = 26.1/16.3 \approx 1.61$, $\alpha \approx 58.1^\circ$.

Vậy tầm phun xa nhất trên mặt đất $\approx 26,1$ m; người cứu hoả đứng cách tường tối đa $\approx 16,3$ m, phun ở góc $\approx 58,1^\circ$.

Hence the greatest range on the ground is ≈ 26.1 m; the firefighter may stand at most ≈ 16.3 m from the wall, spraying at $\approx 58.1^\circ$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Tốc độ nhỏ nhất để vượt vật cản có hai vế: tìm giá trị nhỏ nhất của v_0 và tìm góc ứng với nó. Đỉnh tường là một điểm cố định (d, h); điều kiện vượt tường là quỹ đạo đi qua phía trên điểm đó, nên chỉ cần xét điểm này trong hoặc trên parabol an toàn.

Least speed to clear an obstacle has two parts: find the smallest v_0 and the angle that goes with it. The top of the wall is a fixed point (d, h); clearing it means the path passes above that point, so it is enough to require the point to lie inside or on the safety parabola.

VÍ DỤ 3.8 (Tốc độ nhỏ nhất qua vật cản) / EXAMPLE 3.8 (Least speed over an obstacle)

— Từ mặt đất, một người ném quả bóng qua bức tường cao 6,0 m, cách chỗ ném 10 m. a) Tính tốc độ ném nhỏ nhất và góc ném tương ứng; b) với tốc độ 15 m/s, tìm khoảng góc ném để bóng qua được tường.

From the ground a person throws a ball over a wall 6.0 m high, 10 m from the throwing point. a) Find the least launch speed and the corresponding angle; b) at a speed of 15 m/s find the range of launch angles that clears the wall.

Lời giải. / Solution.

1. Hệ quả 3.13 với $h = 6,0$ m, $d = 10$ m: $v_0^2 \geq 9,8 \cdot (6 + \sqrt{136}) = 9,8 \cdot 17,66 \approx 173,1$, $v_{0,\min} \approx 13,2$ m/s.
Corollary 3.13 with $h = 6.0$ m, $d = 10$ m: $v_0^2 \geq 9.8 \cdot (6 + \sqrt{136}) = 9.8 \cdot 17.66 \approx 173.1$, $v_{0,\min} \approx 13.2$ m/s.
2. $\tan \alpha = (6 + \sqrt{136})/10 \approx 1,766$, $\alpha \approx 60,5^\circ$.
 $\tan \alpha = (6 + \sqrt{136})/10 \approx 1.766$, $\alpha \approx 60.5^\circ$.
3. Với $v_0 = 15$ m/s: $A = gd^2/(2v_0^2) = 9,8 \cdot 100/450 \approx 2,178$. Quỹ đạo đi qua (10 ; 6) khi $2,178t^2 - 10t + 8,178 = 0$, biệt thức $10^2 - 4 \cdot 2,178 \cdot 8,178 \approx 28,8$, hai nghiệm $t \approx 1,06$ và $t \approx 3,53$, tương ứng $46,8^\circ$ và $74,2^\circ$.
With $v_0 = 15$ m/s: $A = gd^2/(2v_0^2) = 9.8 \cdot 100/450 \approx 2.178$. The path passes through (10, 6)

when $2.178t^2 - 10t + 8.178 = 0$; the discriminant is $10^2 - 4 \cdot 2.178 \cdot 8.178 \approx 28.8$, with roots $t \approx 1.06$ and $t \approx 3.53$, i.e. 46.8° and 74.2° .

4. Tại $x = 10$ m, độ cao của quỹ đạo là hàm bậc hai của $t = \tan \alpha$ với hệ số cao nhất âm: $-A t^2 + 10t - A$. Độ cao đó ≥ 6 m khi t nằm giữa hai nghiệm.

At $x = 10$ m the height of the path is a quadratic in $t = \tan \alpha$ with negative leading coefficient: $-A t^2 + 10t - A$. It is ≥ 6 m when t lies between the two roots.

Vậy tốc độ nhỏ nhất $\approx 13,2$ m/s với góc $\approx 60,5^\circ$; với 15 m/s, bóng qua tường khi góc ném nằm trong khoảng từ $\approx 46,8^\circ$ tới $\approx 74,2^\circ$.

Hence the least speed is ≈ 13.2 m/s at $\approx 60.5^\circ$; at 15 m/s the ball clears the wall for launch angles between $\approx 46.8^\circ$ and $\approx 74.2^\circ$. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Ném lên mặt nghiêng mà vẫn lấy tầm xa theo phương ngang $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$, hoặc đo khoảng cách OP bằng hoành độ x . Điểm rơi nằm trên mặt nghiêng, nên $\ell = x / \cos \beta$ và thời gian bay phải tính từ điều kiện chạm mặt nghiêng.

Throwing onto an incline but still using the horizontal range $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$, or measuring OP by the abscissa x . The landing point lies on the slope, so $\ell = x / \cos \beta$ and the flight time must come from the condition of meeting the slope.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ném xiên từ mặt đất: $T = 2v_0 \sin \alpha / g$, $H = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$, $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$; quỹ đạo $y = x \tan \alpha - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha)$; $v^2 = v_0^2 - 2gy$.

Oblique projection from the ground: $T = 2v_0 \sin \alpha / g$, $H = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$, $L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$; path $y = x \tan \alpha - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha)$; $v^2 = v_0^2 - 2gy$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Parabol an toàn $y = v_0^2 / (2g) - gx^2 / (2v_0^2)$; tại điểm trên parabol $\tan \alpha = v_0^2 / (gx)$. Ném lên mặt nghiêng β : $\ell_{\max} = v_0^2 / (g(1 + \sin \beta))$.

Safety parabola $y = v_0^2 / (2g) - gx^2 / (2v_0^2)$; at a point on it $\tan \alpha = v_0^2 / (gx)$. Throw onto a slope β : $\ell_{\max} = v_0^2 / (g(1 + \sin \beta))$.

3.5. Cộng vận tốc: qua sông, gió, mưa — Adding velocities: river crossings, wind and rain

Vận tốc phụ thuộc hệ quy chiếu. Ký hiệu $\vec{v}_{12}$ là vận tốc của vật 1 đối với vật 2 (đo trong hệ gắn với vật 2). Từ $\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{21}$, đổi chiều chỉ số thì đổi dấu vector. Với thuyền, nước và bờ, tiếng Việt dùng chỉ số t, n, b ($\vec{v}_{tn}$, $\vec{v}_{nb}$, $\vec{v}_{tb}$), tiếng Anh dùng b, w, s (boat, water, shore): $\vec{v}_{bw}$, $\vec{v}_{ws}$, $\vec{v}_{bs}$.

Velocity depends on the reference frame. Write $\vec{v}_{12}$ for the velocity of body 1 relative to body 2 (measured in the frame attached to body 2). From $\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{21}$, swapping the subscripts reverses the vector. For boat, water and shore, Vietnamese text uses the subscripts t, n, b ($\vec{v}_{tn}$, $\vec{v}_{nb}$, $\vec{v}_{tb}$) and English text uses b, w, s (boat, water, shore): $\vec{v}_{bw}$, $\vec{v}_{ws}$, $\vec{v}_{bs}$.

ĐỊNH LUẬT 3.14 (Công thức cộng vận tốc Galileo) / LAW 3.14 (Galilean velocity addition) — Vận tốc của vật 1 đối với vật 3 bằng tổng vector của vận tốc vật 1 đối với vật 2 và vận tốc vật 2 đối với vật 3: $\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}$. Phạm vi: các vận tốc nhỏ so với tốc độ ánh sáng, và vật 2 chuyển động tịnh tiến đối với vật 3. Nếu vật 2 chuyển động thẳng đều đối với vật 3 thì gia tốc của vật 1 như nhau trong hai hệ.

The velocity of body 1 relative to body 3 equals the vector sum of the velocity of 1 relative to 2 and the velocity of 2 relative to 3: $\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}$. Scope: speeds small compared with the speed of light, and body 2 moving without rotation relative to body 3. If body 2 moves uniformly relative to 3, the acceleration of body 1 is the same in both frames.

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}, \quad \vec{v}_{12} = -\vec{v}_{21} \quad (3.8)$$

Trong bài toán qua sông, gọi u là tốc độ nước đối với bờ, v là tốc độ thuyền đối với nước (độ lớn cố định, hướng tùy chọn), d là bề rộng sông. Vận tốc thuyền đối với bờ là tổng $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$. Độ trôi là khoảng dịch dọc bờ, tính từ điểm đối diện điểm xuất phát tới điểm đến.

In a river-crossing problem, let u be the speed of the water relative to the shore, v the speed of the boat relative to the water (fixed magnitude, free direction) and d the width of the river. The velocity of the boat relative to the shore is the sum $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$. The drift is the displacement along the bank from the point opposite the start to the landing point.

ĐỊNH LÝ 3.15 (Bài toán qua sông) / THEOREM 3.15 (River-crossing problem) — a)

Thời gian qua sông ngắn nhất là d/v , khi $\vec{v}$ vuông góc với bờ; độ trôi khi đó là ud/v . b) Nếu $v > u$, thuyền đi thẳng tới điểm đối diện (độ trôi 0) khi $\sin \theta = u/v$, với θ là góc giữa $\vec{v}$ và đường vuông góc bờ nghiêng ngược dòng; thời gian là $d/\sqrt{(v^2 - u^2)}$. c) Nếu $v < u$, độ trôi nhỏ nhất là $d\sqrt{(u^2 - v^2)}/v$, đồng thời là lúc quãng đường nhỏ nhất, bằng ud/v ; đạt khi $\vec{v}$ vuông góc với $\vec{V}$, tức $\vec{v}$ hợp với chiều ngược dòng góc γ có $\cos \gamma = v/u$, và thời gian là $du/(v\sqrt{(u^2 - v^2)})$.

a) The shortest crossing time is d/v , when $\vec{v}$ is perpendicular to the bank; the drift is then ud/v . b) If $v > u$, the boat reaches the point directly opposite (zero drift) when $\sin \theta = u/v$, where θ is the angle between $\vec{v}$ and the perpendicular to the bank, tilted upstream; the time is $d/\sqrt{(v^2 - u^2)}$. c) If $v < u$, the least drift is $d\sqrt{(u^2 - v^2)}/v$, which is also the least path length, equal to ud/v ; it occurs when $\vec{v}$ is perpendicular to $\vec{V}$, i.e. $\vec{v}$ makes with the upstream direction an angle γ with $\cos \gamma = v/u$, and the time is $du/(v\sqrt{(u^2 - v^2)})$.

Chứng minh. / Proof.

Chọn Ox dọc bờ theo chiều dòng chảy, Oy vuông góc bờ. Nếu $\vec{v}$ nghiêng ngược dòng góc θ so với Oy thì thành phần ngang bờ của vận tốc đối với bờ là $V_x = u - v \sin \theta$, thành phần vuông góc bờ là $V_y = v \cos \theta$.

Take Ox along the bank in the direction of the current and Oy perpendicular to the bank. If $\vec{v}$ is tilted upstream by θ from Oy , the component of the velocity relative to the shore along the bank is $V_x = u - v \sin \theta$ and across the bank $V_y = v \cos \theta$.

a) Thời gian $t = d/V_y = d/(v \cos \theta)$ nhỏ nhất khi $\cos \theta$ lớn nhất, tức $\theta = 0$; khi đó $t = d/v$ và độ trôi $V_{xt} = ud/v$.

a) The time $t = d/V_y = d/(v \cos \theta)$ is least when $\cos \theta$ is greatest, i.e. $\theta = 0$; then $t = d/v$ and the drift is $V_{xt} = ud/v$.

b) Độ trôi bằng 0 khi $V_x = 0$, tức $\sin \theta = u/v$, thực hiện được khi $v > u$. Khi đó $V_y = \sqrt{(v^2 - u^2)}$ và $t = d/V_y$.

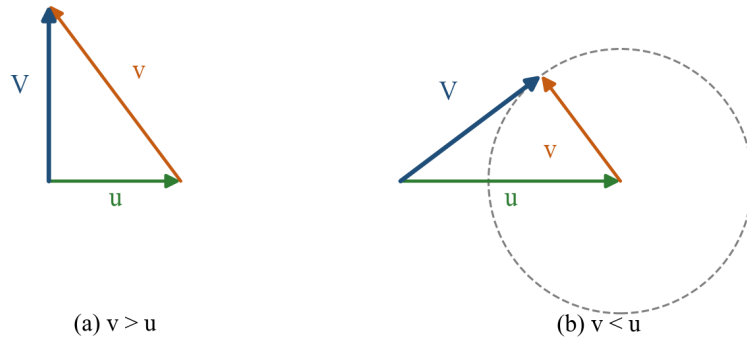
b) The drift is zero when $V_x = 0$, i.e. $\sin \theta = u/v$, possible when $v > u$. Then $V_y = \sqrt{v^2 - u^2}$ and $t = d/V_y$.

c) Độ trôi bằng $d \cdot \tan \psi$, với ψ là góc giữa $\vec{V}$ và Oy. Mút của $\vec{V}$ luôn nằm trên đường tròn tâm ở mút $\vec{u}$, bán kính v (Hình 3.6b). Nếu $v < u$, đường tròn nằm trọn bên phải gốc; tia từ gốc tiến sát Oy nhất là tiếp tuyến của đường tròn. Tại đó $\vec{V}$ vuông góc với $\vec{v}$, tam giác vuông có cạnh huyền u , cạnh góc vuông v và $V = \sqrt{u^2 - v^2}$.

c) The drift is $d \cdot \tan \psi$, where ψ is the angle between $\vec{V}$ and Oy. The tip of $\vec{V}$ always lies on the circle centred at the tip of $\vec{u}$ with radius v (Figure 3.6b). If $v < u$ the circle lies entirely to the right of the origin; the ray from the origin that comes closest to Oy is the tangent to the circle. There $\vec{V}$ is perpendicular to $\vec{v}$, and the right triangle has hypotenuse u , leg v and $V = \sqrt{u^2 - v^2}$.

Góc giữa $\vec{V}$ và bờ có sin bằng v/u , nên $\cos \psi = v/u$, $\tan \psi = \sqrt{u^2 - v^2}/v$. Độ trôi nhỏ nhất $d\sqrt{u^2 - v^2}/v$, quãng đường $d/\cos \psi = du/v$, thời gian bằng quãng đường chia V .

The angle between $\vec{V}$ and the bank has sine v/u , so $\cos \psi = v/u$ and $\tan \psi = \sqrt{u^2 - v^2}/v$. The least drift is $d\sqrt{u^2 - v^2}/v$, the path length is $d/\cos \psi = du/v$ and the time is the path length divided by V . ■



Hình 3.6. Tam giác vận tốc khi qua sông, u là vận tốc nước, v là vận tốc thuyền đối với nước, V là vận tốc đối với bờ. (a) $v > u$: V vuông góc bờ. (b) $v < u$: V là tiếp tuyến của đường tròn bán kính v , vuông góc với v .

Figure 3.6. Velocity triangles for a river crossing: u is the water velocity, v the boat velocity relative to the water, V the velocity relative to the shore. (a) $v > u$: V is perpendicular to the bank. (b) $v < u$: V is tangent to the circle of radius v , perpendicular to v .

$$t_{\min} = d/v; \quad v > u: \sin \theta = u/v; \quad v < u: s_{\min} = d\sqrt{u^2 - v^2}/v, \quad \ell_{\min} = du/v \quad (3.9)$$

NHẬN XÉT / REMARK — Thời gian ngắn nhất và độ trôi nhỏ nhất không đạt cùng lúc: hướng cho thời gian ngắn nhất (vuông góc bờ) cho độ trôi ud/v , lớn hơn độ trôi nhỏ nhất. Khi $v < u$, độ trôi không bao giờ về 0, dù mũi thuyền hướng ngược dòng thế nào.

The shortest time and the least drift do not occur together: the heading for the shortest time (perpendicular to the bank) gives drift ud/v , larger than the least drift. When $v < u$ the drift can never be reduced to 0, however the bow is pointed upstream.

VÍ DỤ 3.9 (Tam giác vận tốc qua sông) / EXAMPLE 3.9 (Velocity triangle for a crossing)

— Sông rộng 120 m, nước chảy song song bờ với 3,0 m/s. Ca nô chạy với tốc độ 5,0 m/s đối với nước. Tìm: a) thời gian qua sông ngắn nhất và độ trôi tương ứng; b) hướng mũi và thời gian để ca nô tới đúng điểm đối diện; c) vào mùa lũ nước chảy 5,0 m/s, ca nô chỉ chạy 3,0 m/s đối với nước: độ trôi nhỏ nhất, quãng đường tương ứng và thời gian.

A river 120 m wide has water flowing parallel to the banks at 3.0 m/s. A motorboat travels at 5.0 m/s relative to the water. Find: a) the shortest crossing time and the corresponding drift; b) the heading and the time for the boat to reach the point directly opposite; c) in flood the water runs at 5.0 m/s and the boat does only 3.0 m/s relative to the water: the least drift, the corresponding path length and the time.

Lời giải. / Solution.

1. Câu a): mũi vuông góc bờ, $t = d/v = 120/5,0 = 24$ s, độ trôi $ud/v = 3,0 \cdot 24 = 72$ m.

Part a): bow perpendicular to the bank, $t = d/v = 120/5.0 = 24$ s, drift $ud/v = 3.0 \cdot 24 = 72$ m.

2. Câu b): $v > u$, $\sin \theta = u/v = 0,6$, $\theta \approx 36,9^\circ$ nghiêng ngược dòng; $V_y = \sqrt{(25 - 9)} = 4,0$ m/s, $t = 120/4,0 = 30$ s.

Part b): $v > u$, $\sin \theta = u/v = 0.6$, $\theta \approx 36.9^\circ$ tilted upstream; $V_y = \sqrt{(25 - 9)} = 4.0$ m/s, $t = 120/4.0 = 30$ s.

3. Câu c): $u = 5,0$ m/s $>$ $v = 3,0$ m/s. Độ trôi nhỏ nhất $d\sqrt{(u^2 - v^2)}/v = 120 \cdot 4,0/3,0 = 160$ m; quãng đường $du/v = 120 \cdot 5,0/3,0 = 200$ m; $V = \sqrt{(25 - 9)} = 4,0$ m/s nên $t = 200/4,0 = 50$ s. Mũi hợp với chiều ngược dòng góc γ , $\cos \gamma = 3/5$, $\gamma \approx 53,1^\circ$.

Part c): $u = 5.0$ m/s $>$ $v = 3.0$ m/s. The least drift is $d\sqrt{(u^2 - v^2)}/v = 120 \cdot 4.0/3.0 = 160$ m; the path is $du/v = 120 \cdot 5.0/3.0 = 200$ m; $V = \sqrt{(25 - 9)} = 4.0$ m/s, so $t = 200/4.0 = 50$ s. The bow makes with the upstream direction an angle γ with $\cos \gamma = 3/5$, $\gamma \approx 53.1^\circ$.

Vậy: a) 24 s, trôi 72 m; b) mũi nghiêng ngược dòng $36,9^\circ$ so với đường vuông góc bờ, mất 30 s; c) trôi nhỏ nhất 160 m, đi 200 m trong 50 s.

Hence: a) 24 s, drift 72 m; b) bow 36.9° upstream of the perpendicular, taking 30 s; c) least drift 160 m, a path of 200 m in 50 s. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai chuyến bay trên cùng quãng đường AB, một lượt đi và một lượt về. Gió theo phương AB làm lượt đi nhanh, lượt về chậm; gió vuông góc AB phải bù bằng cách chệch mũi máy bay. Cần so sánh ba trường hợp: không gió, gió dọc, gió ngang. Vận tốc đối với mặt đất phải nằm theo AB, nên tam giác vận tốc có một cạnh biết trước hướng.

Two flights over the same distance AB, out and back. A wind along AB speeds the outbound leg and slows the return; a wind perpendicular to AB must be offset by crabbing the aircraft. Three cases must be compared: no wind, a headwind-tailwind pair, a crosswind. The velocity relative to the ground must lie along AB, so the velocity triangle has one side of known direction.

VÍ DỤ 3.10 (Gió dọc và gió ngang) / EXAMPLE 3.10 (Along-track wind and crosswind)

— Máy bay có tốc độ 250 km/h đối với không khí, bay từ A tới B cách 600 km rồi bay về A. Tính tổng thời gian bay và so sánh trong ba trường hợp: a) không có gió; b) gió tốc độ 60 km/h thổi dọc theo đường AB; c) gió 60 km/h thổi vuông góc với đường AB (máy bay luôn bay đúng theo đường AB).

An aircraft with airspeed 250 km/h flies from A to B, 600 km away, and back to A. Find the total flying

time and compare three cases: a) no wind; b) a wind of 60 km/h blowing along the line AB; c) a wind of 60 km/h blowing perpendicular to AB (the aircraft always flies exactly along AB).

Lời giải. / Solution.

1. Không gió: $t = 2 \cdot 600 / 250 = 4,80$ h.

No wind: $t = 2 \cdot 600 / 250 = 4.80$ h.

2. Gió dọc: một lượt tốc độ $250 + 60 = 310$ km/h, lượt kia $250 - 60 = 190$ km/h; $t = 600 / 310 + 600 / 190 \approx 1,94 + 3,16 \approx 5,09$ h.

Wind along AB: one leg at $250 + 60 = 310$ km/h, the other at $250 - 60 = 190$ km/h; $t = 600 / 310 + 600 / 190 \approx 1.94 + 3.16 \approx 5.09$ h.

3. Gió ngang: máy bay chệch mũi góc φ với $\sin \varphi = 60 / 250$, $\varphi \approx 13,9^\circ$; tốc độ đối với mặt đất $\sqrt{(250^2 - 60^2)} \approx 242,7$ km/h cả hai lượt; $t = 2 \cdot 600 / 242,7 \approx 4,94$ h.

Crosswind: the aircraft crabs by φ with $\sin \varphi = 60 / 250$, $\varphi \approx 13.9^\circ$; its ground speed is $\sqrt{(250^2 - 60^2)} \approx 242.7$ km/h on both legs; $t = 2 \cdot 600 / 242.7 \approx 4.94$ h.

Vậy 4,80 h (không gió), 5,09 h (gió dọc), 4,94 h (gió ngang): gió dọc làm chuyến khứ hồi lâu nhất, gió ngang lâu hơn không gió nhưng ít hơn gió dọc.

Hence 4.80 h (no wind), 5.09 h (along-track wind), 4.94 h (crosswind): the along-track wind makes the round trip longest, and a crosswind lengthens the trip too but less. ■

VÍ DỤ 3.11 (Hai quan sát đủ để xác định vận tốc) / EXAMPLE 3.11 (Two observations fix the velocity) — Một người đi xe đạp thẳng về phía Đông trong cơn mưa. Khi xe chạy 6,0 m/s, người ấy thấy hạt mưa lệch 30° so với phương thẳng đứng và đến từ phía trước; khi xe chạy 10 m/s, hạt mưa lệch 45° so với phương thẳng đứng, cũng từ phía trước. Tìm vận tốc của hạt mưa đối với mặt đất.

A cyclist rides due east in rain. At 6.0 m/s the cyclist sees the raindrops slanted 30° from the vertical and coming from ahead; at 10 m/s the raindrops are slanted 45° from the vertical, also from ahead. Find the velocity of the raindrops relative to the ground.

Lời giải. / Solution.

1. Gọi vận tốc mưa đối với mặt đất là $(w ; -c)$, w về phía Đông, c hướng xuống. Với xe tốc độ V về phía Đông, vận tốc mưa đối với xe là $(w - V ; -c)$. Mưa đến từ phía trước nghĩa là $V > w$, độ lệch thỏa $\tan \theta = (V - w) / c$.

Let the rain velocity relative to the ground be $(w, -c)$, w eastwards, c downwards. For a cycle moving east at V , the rain velocity relative to the cycle is $(w - V, -c)$. Rain from ahead means $V > w$, and the slant satisfies $\tan \theta = (V - w) / c$.

2. Hai phương trình: $(6 - w) / c = \tan 30^\circ \approx 0,577$ và $(10 - w) / c = \tan 45^\circ = 1$. Trừ vế: $4 / c = 1 - 0,577 = 0,423$, $c \approx 9,46$ m/s.

Two equations: $(6 - w) / c = \tan 30^\circ \approx 0.577$ and $(10 - w) / c = \tan 45^\circ = 1$. Subtracting: $4 / c = 1 - 0.577 = 0.423$, $c \approx 9.46$ m/s.

3. $w = 10 - c \approx 0,54$ m/s. Tốc độ mưa $\sqrt{(9,46^2 + 0,54^2)} \approx 9,48$ m/s, lệch khỏi phương thẳng đứng góc $\arctan(0,54 / 9,46) \approx 3,2^\circ$ về phía Đông.

$w = 10 - c \approx 0.54$ m/s. The rain speed is $\sqrt{(9.46^2 + 0.54^2)} \approx 9.48$ m/s, off the vertical by $\arctan(0.54 / 9.46) \approx 3.2^\circ$ towards the east.

Vậy hạt mưa rơi với tốc độ $\approx 9,48$ m/s, gần như thẳng đứng, lệch $\approx 3,2^\circ$ về phía Đông.

Hence the raindrops fall at ≈ 9.48 m/s, nearly vertically, tilted $\approx 3.2^\circ$ towards the east. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cộng độ lớn vận tốc thay vì cộng vector, hoặc viết sai thứ tự chỉ số. Quy tắc kiểm tra: ở vế phải, chỉ số trong liên kề nhau phải giống nhau ($v_{12} + v_{23}$) và chỉ số hai đầu cho chỉ số vế trái.

Adding speeds instead of vectors, or writing the subscripts in the wrong order. A check: on the right-hand side the inner subscripts must match ($v_{12} + v_{23}$) and the outer ones give the subscripts of the left-hand side.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho rằng mũi thuyền hướng tới điểm đối diện thì thuyền tới điểm đó. Mũi thuyền cho vận tốc đối với nước; hướng đi thực là vận tốc đối với bờ, đã cộng với vận tốc nước.

Assuming that a boat whose bow points at the opposite point arrives there. The bow gives the velocity relative to the water; the actual course is the velocity relative to the shore, which includes the water's velocity.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Qua sông: $t_{\min} = d/v$ (mũi vuông góc bờ). Nếu $v > u$:

không trôi khi $\sin \theta = u/v$. Nếu $v < u$: trôi nhỏ nhất $d\sqrt{(u^2 - v^2)}/v$, đạt khi $\vec{v} \perp \vec{V}$, $\cos \gamma = v/u$.

River crossing: $t_{\min} = d/v$ (bow perpendicular to the bank). If $v > u$: no drift when $\sin \theta = u/v$. If $v < u$: least drift $d\sqrt{(u^2 - v^2)}/v$, reached when $\vec{v} \perp \vec{V}$, $\cos \gamma = v/u$.

3.6. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai vật chuyển động — Closest approach of two moving bodies

Hai vật chuyển động thẳng đều nhưng không cùng hướng thì khoảng cách giữa chúng đổi theo thời gian, vì cả hai quỹ đạo đều chạy. Chuyển sang hệ quy chiếu gắn với vật 1 thì vật 1 đứng yên ở gốc, vật 2 chuyển động thẳng đều với vận tốc $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (Định luật 3.14). Bài toán hai vật thành bài toán một điểm đứng yên và một điểm chạy dọc một đường thẳng.

Two bodies in uniform motion in different directions change their separation with time because both of them move. In the frame attached to body 1, body 1 stays at the origin and body 2 moves uniformly with velocity $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (Law 3.14). The two-body problem becomes a fixed point and a point running along a straight line.

ĐỊNH LÝ 3.16 (Khoảng cách ngắn nhất) / THEOREM 3.16 (Closest approach) — Gọi $\vec{r}_0 = (x_0; y_0)$ là vị trí của vật 2 đối với vật 1 lúc $t = 0$ và $\vec{v}_{21} = (v_x; v_y)$ là vận tốc của vật 2 đối với vật 1. Khoảng cách giữa hai vật nhỏ nhất tại $t_m = -(x_0 v_x + y_0 v_y)/(v_x^2 + v_y^2)$ (nếu $t_m > 0$), và giá trị nhỏ nhất là $d_{\min} = |x_0 v_y - y_0 v_x|/\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$. Nếu $t_m \leq 0$, khoảng cách chỉ tăng với $t \geq 0$ và nhỏ nhất tại $t = 0$.

Let $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ be the position of body 2 relative to body 1 at $t = 0$ and $\vec{v}_{21} = (v_x, v_y)$ the velocity of body 2 relative to body 1. The separation is least at $t_m = -(x_0 v_x + y_0 v_y)/(v_x^2 + v_y^2)$ (if $t_m > 0$), and the least value is $d_{\min} = |x_0 v_y - y_0 v_x|/\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$. If $t_m \leq 0$ the separation only grows for $t \geq 0$ and is least at $t = 0$.

Chứng minh. / Proof.

Trong hệ gắn vật 1, vật 2 ở $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_{21}t$, chạy dọc một đường thẳng. Khoảng cách tới gốc nhỏ nhất ở chân H của đường vuông góc hạ từ gốc xuống đường thẳng, nơi $\vec{r}(t_m) \perp \vec{v}_{21}$.

In the frame of body 1, body 2 is at $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_{21}t$, running along a line. The distance to the origin is least at the foot H of the perpendicular dropped from the origin to the line, where $\vec{r}(t_m) \perp \vec{v}_{21}$.

Điều kiện vuông góc: $(x_0 + v_x t)v_x + (y_0 + v_y t)v_y = 0$, giải ra t_m .

The perpendicularity condition is $(x_0 + v_x t)v_x + (y_0 + v_y t)v_y = 0$; solving gives t_m .

Hình bình hành dựng trên $\vec{r}_0$ và $\vec{v}_{21}$ có diện tích $|x_0 v_y - y_0 v_x|$, cũng bằng đáy $|\vec{v}_{21}|$ nhân đường cao $d_{\min}$. Chia hai vế cho $|\vec{v}_{21}|$.

The parallelogram on $\vec{r}_0$ and $\vec{v}_{21}$ has area $|x_0 v_y - y_0 v_x|$, which also equals the base $|\vec{v}_{21}|$ times the height $d_{\min}$. Divide by $|\vec{v}_{21}|$. ■

$$d_{\min} = |x_0 v_y - y_0 v_x| / \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.10)$$

NHẬN XÉT / REMARK — Hai vật va chạm khi $d_{\min} = 0$ và $t_m > 0$, nghĩa là $\vec{r}_0$ cùng phương, ngược chiều với $\vec{v}_{21}$: vật 2 nhìn thẳng vào vật 1 mà tiến lại. Hai tàu có hướng nhìn nhau không đổi theo thời gian (góc phương vị cố định) mà khoảng cách giảm đang trên đường va chạm.

The bodies collide when $d_{\min} = 0$ and $t_m > 0$, that is, $\vec{r}_0$ is parallel and opposite to $\vec{v}_{21}$: body 2 looks straight at body 1 as it closes in. Two ships whose line of sight keeps a fixed bearing while the range shrinks are on a collision course.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Khoảng cách nhỏ nhất của hai vật tại cùng một thời điểm khác với khoảng cách giữa hai đường đi. Hai điểm chạy; chuyển về hệ gắn với một vật để chỉ còn một điểm chạy. Hình dung đường thẳng của vật 2 và chân đường vuông góc từ vật 1 (Hình 3.7).

The least distance between two bodies at the same instant is not the distance between their two paths. Two points are moving; switch to the frame of one body so that only one point moves. Picture the line of body 2 and the foot of the perpendicular from body 1 (Figure 3.7).

VÍ DỤ 3.12 (Hệ gắn một vật) / EXAMPLE 3.12 (Frame attached to one body) — Hai thiết bị bay không người lái cùng độ cao. Lúc $t = 0$, A ở gốc O bay về hướng Đông với tốc độ 15 m/s; B ở cách A 400 m về phía Đông và 300 m về phía Bắc, bay về hướng Nam với tốc độ 20 m/s. Tìm: a) khoảng cách nhỏ nhất giữa chúng và thời điểm đó; b) hai thiết bị có vi phạm khoảng cách an toàn 150 m không; c) vị trí của A và B tại thời điểm gần nhau nhất.

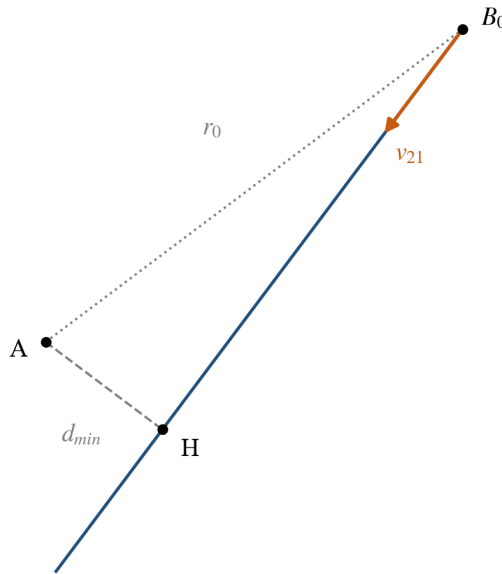
Two drones fly at the same height. At $t = 0$, A is at the origin O flying east at 15 m/s; B is 400 m east and 300 m north of A, flying south at 20 m/s. Find: a) the least distance between them and when it occurs; b) whether they violate a 150 m safety separation; c) the positions of A and B at the moment of closest approach.

Lời giải. / Solution.

1. Trong hệ gắn A: $\vec{r}_0 = (400 ; 300) \text{ m}$, $\vec{v}_{21} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (0 ; -20) - (15 ; 0) = (-15 ; -20) \text{ m/s}$, $|\vec{v}_{21}| = 25 \text{ m/s}$.
In the frame of A: $\vec{r}_0 = (400, 300) \text{ m}$, $\vec{v}_{21} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (0, -20) - (15, 0) = (-15, -20) \text{ m/s}$, $|\vec{v}_{21}| = 25 \text{ m/s}$.
2. Thời điểm gần nhất: $t_m = -(400 \cdot (-15) + 300 \cdot (-20)) / 625 = 12000 / 625 = 19,2 \text{ s} > 0$.
Time of closest approach: $t_m = -(400 \cdot (-15) + 300 \cdot (-20)) / 625 = 12000 / 625 = 19.2 \text{ s} > 0$.
3. $d_{\min} = |400 \cdot (-20) - 300 \cdot (-15)| / 25 = |-8000 + 4500| / 25 = 140 \text{ m}$.
 $d_{\min} = |400 \cdot (-20) - 300 \cdot (-15)| / 25 = |-8000 + 4500| / 25 = 140 \text{ m}$.
4. Tại $t = 19,2 \text{ s}$: A ở $(288 ; 0) \text{ m}$, B ở $(400 ; 300 - 20 \cdot 19,2) = (400 ; -84) \text{ m}$. Hiệu $(112 ; -84)$ có độ dài $\sqrt{(112^2 + 84^2)} = 140 \text{ m}$, khớp với kết quả ở trên.
At $t = 19.2 \text{ s}$: A is at $(288, 0) \text{ m}$, B at $(400, 300 - 20 \cdot 19.2) = (400, -84) \text{ m}$. The difference $(112, -84)$ has length $\sqrt{(112^2 + 84^2)} = 140 \text{ m}$, matching the result above.

Vậy khoảng cách nhỏ nhất là 140 m vào lúc 19,2 s, nhỏ hơn 150 m nên có vi phạm khoảng cách an toàn; lúc đó A ở $(288 ; 0) \text{ m}$, B ở $(400 ; -84) \text{ m}$.

Hence the least distance is 140 m at 19.2 s, below 150 m, so the safety separation is violated; at that moment A is at $(288, 0) \text{ m}$ and B at $(400, -84) \text{ m}$. ■



Hình 3.7. Trong hệ gắn với A: B chạy dọc đường thẳng từ B_0 với vận tốc $v_{21} = (-15 ; -20) \text{ m/s}$; chân đường vuông góc H cho khoảng cách nhỏ nhất $d_{\min} = 140 \text{ m}$.

Figure 3.7. In the frame of A: B runs along a straight line from B_0 with velocity $v_{21} = (-15, -20) \text{ m/s}$; the foot H of the perpendicular gives the least distance $d_{\min} = 140 \text{ m}$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính khoảng cách nhỏ nhất bằng cách tìm khoảng cách giữa hai đường đi (hai đường thẳng) rồi kết luận hai vật cách nhau gần nhất như thế. Hai vật không nhất thiết đi qua điểm gần nhau cùng lúc; đại lượng cần là $|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|$ tại cùng t.

Finding the least distance by taking the distance between the two paths (two lines) and concluding

that the bodies come that close. The bodies need not pass the near points at the same time; the quantity needed is $|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|$ at the same t .

3.7. Liên kết động học: thanh cứng, dây không dẫn, ròng rọc — Kinematic constraints: rigid rods, inextensible strings, pulleys

Khi các vật nối với nhau bằng thanh cứng hoặc dây không dẫn, chiều dài nối không đổi, và điều đó ràng buộc vận tốc của chúng. Các ràng buộc này gọi là liên kết động học; chúng cho quan hệ vận tốc trước khi xét lực.

When bodies are joined by rigid rods or inextensible strings, the connecting length is fixed, which constrains their velocities. These constraints are kinematic constraints; they give relations between velocities before any force is considered.

TÍNH CHẤT 3.17 (Vận tốc dọc thanh) / PROPERTY 3.17 (Velocity along a rod) — Hai điểm A, B của một thanh cứng có hình chiếu vận tốc lên đường thẳng AB bằng nhau.
Two points A, B of a rigid rod have equal projections of their velocities onto the line AB.

Chứng minh. / Proof.

Trong hệ quy chiếu tịnh tiến theo A, điểm A đứng yên, B luôn cách A đoạn L không đổi nên chuyển động trên đường tròn tâm A. Vận tốc của B trong hệ này, $\vec{v}_B - \vec{v}_A$, tiếp tuyến với đường tròn, nên vuông góc với AB.

In the frame translating with A, point A is at rest and B stays a fixed distance L from A, so it moves on a circle centred at A. The velocity of B in this frame, $\vec{v}_B - \vec{v}_A$, is tangent to the circle and therefore perpendicular to AB.

Hình chiếu của $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ lên AB bằng 0, tức hình chiếu của $\vec{v}_B$ và $\vec{v}_A$ lên AB bằng nhau.

The projection of $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ onto AB is 0, so the projections of $\vec{v}_B$ and $\vec{v}_A$ onto AB are equal. ■

TÍNH CHẤT 3.18 (Tốc độ rút dây) / PROPERTY 3.18 (Rate of drawing in string) — Đầu dây gắn vào vật, đoạn dây thẳng từ vật tới ròng rọc cố định hợp với phương chuyển động của vật góc φ : tốc độ rút dây bằng hình chiếu vận tốc của vật lên đoạn dây, $w = v \cos \varphi$. Dây không dẫn nên mọi điểm của dây có cùng tốc độ dọc dây.

For a string fixed to a body, the straight string segment from the body to a fixed pulley making angle φ with the body's line of motion: the speed at which string is drawn in equals the projection of the body's velocity onto the segment, $w = v \cos \varphi$. Because the string is inextensible every point of it has the same speed along the string.

Chứng minh. / Proof.

Cho vật chạy trên đường ngang, ròng rọc ở độ cao h so với điểm buộc, vật cách chân ròng rọc x, độ dài đoạn dây ℓ , $\ell^2 = x^2 + h^2$. Trong Δt , x thành $x + \Delta x$, ℓ thành $\ell + \Delta \ell$: $(\ell + \Delta \ell)^2 = (x + \Delta x)^2 + h^2$.

Let the body run on a horizontal line, the pulley at height h above the attachment point, the body at distance x from the foot of the pulley and the string segment of length ℓ , $\ell^2 = x^2 + h^2$. In Δt , x becomes $x + \Delta x$ and ℓ becomes $\ell + \Delta \ell$: $(\ell + \Delta \ell)^2 = (x + \Delta x)^2 + h^2$.

Trừ vế, bỏ các số hạng bậc hai $(\Delta\ell)^2$, $(\Delta x)^2$ khi Δt dần tới 0: $2\ell\Delta\ell \approx 2x\Delta x$, nên $\Delta\ell/\Delta t \approx (x/\ell) \cdot \Delta x/\Delta t$. Mà $x/\ell = \cos \varphi$, nên $w = v \cos \varphi$.

Subtract, dropping the second-order terms $(\Delta\ell)^2$, $(\Delta x)^2$ as Δt tends to 0: $2\ell\Delta\ell \approx 2x\Delta x$, so $\Delta\ell/\Delta t \approx (x/\ell) \cdot \Delta x/\Delta t$. Since $x/\ell = \cos \varphi$, $w = v \cos \varphi$. ■

$$w = v \cos \varphi \quad (3.11)$$

TÍNH CHẤT 3.19 (Ròng rọc động) / PROPERTY 3.19 (Movable pulley) — Vật treo ở ròng rọc động, hai nhánh dây thẳng đứng ôm ròng rọc (một đầu cố định, đầu kia dẫn qua ròng rọc cố định): tốc độ vật bằng một nửa tốc độ dây được kéo ra ở đầu tự do.

A body hung from a movable pulley with two vertical string branches around it (one end fixed, the other leading over a fixed pulley): the body's speed is half the speed at which string is drawn out at the free end.

Chứng minh. / Proof.

Gọi a là chiều dài mỗi nhánh thẳng đứng, ℓ là đoạn dây còn lại. Dây không giãn nên $2a + \ell$ không đổi, suy ra $2\Delta a = -\Delta\ell$.

Let a be the length of each vertical branch and ℓ the remaining length of string. The string is inextensible, so $2a + \ell$ is constant, giving $2\Delta a = -\Delta\ell$.

Vậy ròng rọc động (và vật) dịch chuyển $|\Delta a| = |\Delta\ell|/2$, tốc độ bằng một nửa tốc độ rút dây.

Hence the movable pulley (and the body) moves $|\Delta a| = |\Delta\ell|/2$, at half the speed at which string is drawn. ■

VÍ DỤ 3.13 (Hình chiếu vận tốc lên dây) / EXAMPLE 3.13 (Projection of velocity on the string) — Xe nhỏ chạy thẳng trên mặt bàn ngang, ra xa chân ròng rọc, với tốc độ 0,80 m/s.

Dây không giãn buộc vào xe, vắt qua ròng rọc nhỏ ở độ cao 0,60 m so với điểm buộc, đầu kia treo một vật nặng (Hình 3.8). a) Khi xe cách chân ròng rọc 0,80 m, tìm tốc độ nâng vật. b) Nếu thay vào đó vật được kéo lên đều với 0,48 m/s thì xe tiến lại gần ròng rọc với tốc độ nào khi $x = 0,45$ m và khi $x = 0,80$ m?

A small cart runs straight along a horizontal table, away from the foot of a pulley, at 0.80 m/s. An inextensible string tied to the cart passes over a small pulley 0.60 m above the attachment point and carries a weight at the other end (Figure 3.8). a) When the cart is 0.80 m from the foot of the pulley, find the speed at which the weight rises. b) If instead the weight is raised steadily at 0.48 m/s, what is the cart's speed as it approaches the pulley when $x = 0.45$ m and when $x = 0.80$ m?

Lời giải. / Solution.

1. $\ell = \sqrt{(0,80^2 + 0,60^2)} = 1,00$ m, $\cos \varphi = x/\ell = 0,80$. Theo Tính chất 3.18 tốc độ rút dây là $0,80 \cdot 0,80 = 0,64$ m/s; vật nặng lên với tốc độ đó.

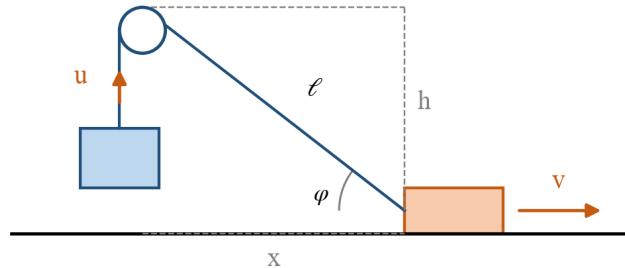
$\ell = \sqrt{(0.80^2 + 0.60^2)} = 1.00$ m, $\cos \varphi = x/\ell = 0.80$. By Property 3.18 the string is drawn at $0.80 \cdot 0.80 = 0.64$ m/s; the weight rises at that speed.

2. Câu b): $v_{xe} \cos \varphi = 0,48$ nên $v_{xe} = 0,48/\cos \varphi$. Với $x = 0,45$ m: $\ell = 0,75$ m, $\cos \varphi = 0,60$, $v_{xe} = 0,80$ m/s. Với $x = 0,80$ m: $\cos \varphi = 0,80$, $v_{xe} = 0,60$ m/s.

Part b): $v_{cart} \cos \varphi = 0.48$, so $v_{cart} = 0.48/\cos \varphi$. With $x = 0.45$ m: $\ell = 0.75$ m, $\cos \varphi = 0.60$, $v_{cart} = 0.80$ m/s. With $x = 0.80$ m: $\cos \varphi = 0.80$, $v_{cart} = 0.60$ m/s.

Vậy vật nặng lên với 0,64 m/s ở câu a); ở câu b) xe chạy 0,80 m/s khi $x = 0,45$ m và 0,60 m/s khi $x = 0,80$ m.

Hence the weight rises at 0.64 m/s in part a); in part b) the cart moves at 0.80 m/s when $x = 0.45$ m and 0.60 m/s when $x = 0.80$ m. ■



Hình 3.8. Xe trên bàn kéo dây vắt qua ròng rọc nâng vật nặng: tốc độ nâng vật là $u = v \cos \varphi$.

Figure 3.8. A cart on a table draws a string over a pulley and lifts a weight: the weight rises at $u = v \cos \varphi$.

NHẬN XÉT / REMARK — Khi x tăng, $\cos \varphi$ tiến tới 1 và tốc độ nâng vật tiến tới tốc độ xe. Ngược lại khi xe tới gần chân ròng rọc (x tiến tới 0) mà vật được kéo đều, $v_{xe} = u/\cos \varphi$ tăng không giới hạn: mô hình dây thẳng không dẫn không còn dùng được gần đó.

As x grows, $\cos \varphi$ tends to 1 and the lifting speed tends to the cart's speed. Conversely, as the cart nears the foot of the pulley (x tends to 0) while the weight is raised steadily, $v_{cart} = u/\cos \varphi$ grows without bound: the model of a straight inextensible string fails near there.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Thanh trượt hai đầu dọc hai thành vuông góc: biết v_A , cần v_B và vận tốc điểm giữa. Hai ẩn v_B và tốc độ góc quay của thanh, nhưng Tính chất 3.17 cho thẳng một phương trình giữa v_A và v_B nhờ chiếu lên thanh. Điểm giữa M có tọa độ là trung bình tọa độ A và B .

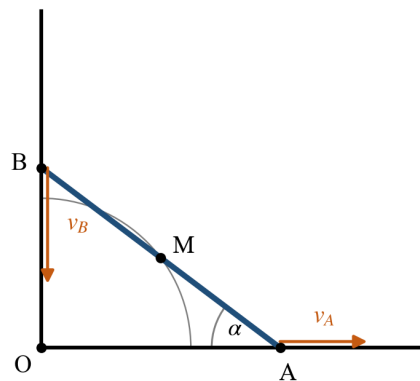
A rod with its two ends sliding along two perpendicular walls: v_A is known, v_B and the velocity of the midpoint are wanted. There are two unknowns, v_B and the angular speed of the rod, but Property 3.17 gives one equation between v_A and v_B at once by projecting onto the rod. The midpoint M has coordinates that are the average of those of A and B .

VÍ DỤ 3.14 (Vận tốc dọc thanh) / EXAMPLE 3.14 (Velocity along the rod) — Thanh AB dài 2,4 m, đầu A trượt trên sàn ngang với tốc độ không đổi 0,50 m/s rời xa tường, đầu B trượt xuống dọc tường thẳng đứng (Hình 3.9). Khi thanh hợp với sàn góc $\alpha = 37^\circ$, tìm: a) tốc độ của B ; b) tốc độ của trung điểm M và dạng quỹ đạo của M ; c) góc α mà tại đó tốc độ của B bằng tốc độ của A . Lấy $\tan 37^\circ \approx 0,754$, $\sin 37^\circ \approx 0,602$.

A rod AB of length 2.4 m has end A sliding on a horizontal floor at a steady 0.50 m/s away from a wall, and end B sliding down the vertical wall (Figure 3.9). When the rod makes angle $\alpha = 37^\circ$ with the floor, find: a) the speed of B ; b) the speed of the midpoint M and the shape of the path of M ; c) the angle α at which the speed of B equals that of A . Take $\tan 37^\circ \approx 0.754$, $\sin 37^\circ \approx 0.602$.

Lời giải. / Solution.

- Hướng từ A tới B hợp với phương ngang góc $180^\circ - \alpha$. Chiếu lên AB: $v_A \cos \alpha = v_B \sin \alpha$, nên $v_B = v_A / \tan \alpha = 0,50 / 0,754 \approx 0,663$ m/s.
The direction from A to B is at $180^\circ - \alpha$ to the horizontal. Projecting onto AB: $v_A \cos \alpha = v_B \sin \alpha$, so $v_B = v_A / \tan \alpha = 0.50 / 0.754 \approx 0.663$ m/s.
 - $M = (x_A/2; y_B/2)$ nên vận tốc của M là $(v_A/2; -v_B/2) = (0,25; -0,332)$ m/s, độ lớn $\approx 0,415$ m/s. Cũng có thể viết $v_M = v_A / (2 \sin \alpha) \approx 0,50 / (2 \cdot 0,602) \approx 0,415$ m/s.
 $M = (x_A/2, y_B/2)$, so the velocity of M is $(v_A/2, -v_B/2) = (0.25, -0.332)$ m/s, magnitude ≈ 0.415 m/s. Equivalently $v_M = v_A / (2 \sin \alpha) \approx 0.50 / (2 \cdot 0.602) \approx 0.415$ m/s.
 - Tam giác OAB vuông tại góc tường–sàn O với cạnh huyền AB = 2,4 m, nên trung tuyến OM = AB/2 = 1,2 m không đổi: M chạy trên cung tròn tâm O bán kính 1,2 m.
Triangle OAB has a right angle at the wall-floor corner O with hypotenuse AB = 2.4 m, so the median OM = AB/2 = 1.2 m is constant: M runs on a circular arc centred at O of radius 1.2 m.
 - Câu c): $v_B = v_A$ khi $\tan \alpha = 1$, tức $\alpha = 45^\circ$.
Part c): $v_B = v_A$ when $\tan \alpha = 1$, i.e. $\alpha = 45^\circ$.
- Vậy $v_B \approx 0,663$ m/s; $v_M \approx 0,415$ m/s và M chuyển động trên cung tròn bán kính 1,2 m; $v_B = v_A$ khi $\alpha = 45^\circ$.
Hence $v_B \approx 0.663$ m/s; $v_M \approx 0.415$ m/s and M moves on a circular arc of radius 1.2 m; $v_B = v_A$ when $\alpha = 45^\circ$. ■



Hình 3.9. Thanh AB trượt hai đầu dọc sàn và tường: $v_A \cos \alpha = v_B \sin \alpha$; trung điểm M chạy trên cung tròn tâm O bán kính AB/2.

Figure 3.9. Rod AB sliding on the floor and wall: $v_A \cos \alpha = v_B \sin \alpha$; the midpoint M runs on an arc centred at O of radius AB/2.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho vận tốc vật bằng tốc độ rút dây ($v_{\text{vật}} = w$) khi dây không song song với phương chuyển động. Phải chiếu vận tốc của vật lên phương đoạn dây trước: $w = v \cos \varphi$.

Setting the body's velocity equal to the rate of drawing in string ($v_{\text{body}} = w$) when the string is not parallel to the line of motion. The body's velocity must first be projected onto the string: $w = v \cos \varphi$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Khoảng cách ngắn nhất: $d_{\min} = |x_0 v_y - y_0 v_x| / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ trong hệ gắn một vật. Vận tốc dọc thanh cứng bằng nhau; dây không giãn: $w = v \cos \varphi$.
Closest approach: $d_{\min} = |x_0 v_y - y_0 v_x| / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ in the frame of one body. Velocities along a rigid rod are equal; inextensible string: $w = v \cos \varphi$.

3.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — Strategy table and glossary

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Vật ném ngang, rơi xuống đất hoặc xuống mặt dốc <i>Horizontal throw landing on level ground or on a slope</i>	Hai chuyển động độc lập; điểm rơi thỏa phương trình mặt chạm (Định lý 3.4, Hệ quả 3.5) <i>Two independent motions; the landing point satisfies the equation of the surface (Theorem 3.4, Corollary 3.5)</i>	3.2
Cho v_0 và α , hỏi thời gian bay, độ cao, tầm xa, tốc độ ở độ cao y <i>Given v_0 and α, ask flight time, height, range, speed at height y</i>	Định lý 3.6, Tính chất 3.8 <i>Theorem 3.6, Property 3.8</i>	3.3
Hai vật ném cùng lúc, hỏi khoảng cách hay phương nối <i>Two bodies thrown together, ask distance or direction of the line joining them</i>	Hiệu vị trí đổi đều (Tính chất 3.9) <i>Position difference changes uniformly (Property 3.9)</i>	3.4
“Xa nhất”, “góc tối ưu”, “vận tốc nhỏ nhất để vượt” <i>“Farthest”, “best angle”, “least speed to clear”</i>	Parabol an toàn, coi $\tan \alpha$ là ẩn bậc hai (Định lý 3.10, Hệ quả 3.11 và 3.13) <i>Safety parabola, treat $\tan \alpha$ as a quadratic unknown (Theorem 3.10, Corollaries 3.11 and 3.13)</i>	3.5, 3.7, 3.8
Ném từ hoặc lên mặt nghiêng <i>Throw from or onto a slope</i>	Trục dọc mặt nghiêng (Định lý 3.12) <i>Axes along the slope (Theorem 3.12)</i>	3.6
Thuyền, máy bay, hạt mưa: vận tốc “đối với nước, gió, xe” <i>Boat, aircraft, raindrop: velocity “relative to water, wind, vehicle”</i>	Cộng vận tốc, vẽ tam giác vận tốc (Định luật 3.14, Định lý 3.15) <i>Add velocities, draw the velocity triangle (Law 3.14, Theorem 3.15)</i>	3.9, 3.10, 3.11
Khoảng cách nhỏ nhất, hai vật có va chạm không <i>Least distance, whether two bodies collide</i>	Chuyển sang hệ gắn một vật; chân đường vuông góc (Định lý 3.16) <i>Switch to the frame of one body; foot of the perpendicular (Theorem 3.16)</i>	3.12
Thanh cứng, dây không giãn nối hai vật <i>Rigid rod or inextensible string joining two bodies</i>	Hình chiếu vận tốc lên thanh, lên dây (Tính chất 3.17, 3.18) <i>Project velocities onto the rod or the string (Properties 3.17, 3.18)</i>	3.13, 3.14

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Ròng rọc động <i>Movable pulley</i>	Tổng chiều dài dây không đổi (Tính chất 3.19) <i>Total string length constant (Property 3.19)</i>	Bài 3.7

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Vector vị trí	Position vector	vector nối gốc tọa độ tới chất điểm <i>vector from the origin to the particle</i>
Độ dịch chuyển	Displacement	vector nối vị trí đầu với vị trí cuối <i>vector from initial to final position</i>
Vận tốc tức thời	Instantaneous velocity	giới hạn của vận tốc trung bình khi Δt dần tới 0 <i>limit of average velocity as Δt tends to 0</i>
Gia tốc trung bình	Average acceleration	độ biến thiên vận tốc chia cho thời gian <i>change of velocity divided by time</i>
Quỹ đạo	Path (trajectory)	đường mà chất điểm vạch ra <i>the curve traced by the particle</i>
Ném ngang	Horizontal projection	ném với vận tốc đầu nằm ngang <i>launch with horizontal initial velocity</i>
Ném xiên	Oblique projection	ném với vận tốc đầu hợp góc với phương ngang <i>launch with initial velocity at an angle to the horizontal</i>
Góc ném	Launch angle	góc giữa vận tốc đầu và phương ngang <i>angle between the initial velocity and the horizontal</i>
Tầm xa	Range	khoảng cách ngang từ điểm ném tới điểm rơi <i>horizontal distance from launch point to landing point</i>
Độ cao cực đại	Maximum height	độ cao lớn nhất của vật so với điểm ném <i>greatest height of the body above the launch point</i>
Thời gian bay	Time of flight	thời gian từ lúc ném tới lúc chạm <i>time from launch to impact</i>
Parabol an toàn	Safety parabola	đường bao các quỹ đạo cùng tốc độ ném <i>envelope of paths with the same launch speed</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Đường bao	Envelope	đường cong tiếp xúc với mọi đường của một họ <i>curve touching every member of a family of curves</i>
Hệ quy chiếu	Reference frame	vật làm mốc cùng hệ trục và đồng hồ <i>reference body with axes and a clock</i>
Vận tốc tương đối	Relative velocity	vận tốc của vật đo trong hệ gắn với vật khác <i>velocity of a body measured in the frame of another body</i>
Công thức cộng vận tốc	Velocity addition formula	$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}$
Độ trôi	Drift	khoảng dịch dọc bờ khi qua sông <i>displacement along the bank when crossing a river</i>
Khoảng cách ngắn nhất	Closest approach	giá trị nhỏ nhất của khoảng cách hai vật theo thời gian <i>least separation of two bodies over time</i>
Hệ rơi tự do	Freely falling frame	hệ gắn với vật chỉ chịu trọng lực <i>frame attached to a body under gravity alone</i>
Liên kết động học	Kinematic constraint	ràng buộc vận tốc do chiều dài nối không đổi <i>velocity constraint from a fixed connecting length</i>
Thanh cứng	Rigid rod	thanh có độ dài không đổi <i>rod of fixed length</i>
Dây không giãn	Inextensible string	dây có độ dài không đổi <i>string of fixed length</i>
Ròng rọc động	Movable pulley	ròng rọc có trục dịch chuyển cùng vật treo <i>pulley whose axle moves with the hanging body</i>

3.9. Bài tự luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 3.1 / Problem 3.1 — Một học sinh đứng ở cửa sổ tầng ba cao 20 m so với sân, ném ngang một quả cầu nhỏ; quả cầu chạm sân tại điểm cách chân tường 15 m. Tính tốc độ ném, thời gian bay, tốc độ và góc nghiêng so với mặt sân của vận tốc lúc chạm sân. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A student at a third-floor window 20 m above the yard throws a small ball horizontally; it lands 15 m

from the foot of the wall. Find the launch speed, the flight time, and the speed and the angle to the ground of the velocity at impact. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 3.2 / Problem 3.2 — Sông rộng 200 m, nước chảy song song bờ với 2,0 m/s. Một thuyền máy chạy 4,0 m/s đối với nước. a) Để tới đúng điểm đối diện, mũi thuyền phải hướng thế nào và mất bao lâu? b) Nếu muốn qua sông nhanh nhất thì mất bao lâu và trôi bao xa?

A river 200 m wide has water flowing parallel to the banks at 2.0 m/s. A motor boat travels at 4.0 m/s relative to the water. a) To reach the point directly opposite, how must the bow be pointed and how long does the crossing take? b) For the fastest crossing, how long does it take and how far does the boat drift?

Bài 3.3 / Problem 3.3 — Một vật được ném từ mặt đất với tốc độ 25 m/s. Tính tầm xa, độ cao cực đại và thời gian bay khi góc ném là 30° và khi là 60° ; nhận xét kết quả. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A body is thrown from the ground at 25 m/s. Find the range, maximum height and time of flight for a launch angle of 30° and of 60° , and comment. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 3.4 / Problem 3.4 — Lúc $t = 0$, tàu A ở gốc O chạy về hướng Đông với 10 km/h; tàu B ở cách O 20 km về phía Đông và 15 km về phía Nam, chạy về hướng Bắc với 8 km/h. Tìm khoảng cách nhỏ nhất giữa hai tàu và thời điểm đó. Hai tàu có tới gần nhau dưới 1 km không?

At $t = 0$, ship A is at the origin O sailing east at 10 km/h; ship B is 20 km east and 15 km south of O, sailing north at 8 km/h. Find the least distance between the ships and when it occurs. Do the ships come within 1 km of each other?

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 3.5 / Problem 3.5 — Một quả bóng được ném từ mặt đất với tốc độ 16 m/s, góc 45° , về phía một bức tường thẳng đứng cao, nhẵn, cách điểm ném 18 m. Bóng va đàn hồi vào tường (thành phần vận tốc vuông góc tường đổi chiều và giữ độ lớn, thành phần song song tường không đổi). Tính: a) thời gian và độ cao bóng đập vào tường; b) điểm bóng chạm đất, đo từ điểm ném và từ tường. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A ball is thrown from the ground at 16 m/s, 45° , towards a tall smooth vertical wall 18 m from the throwing point. The ball bounces elastically off the wall (the velocity component perpendicular to the wall reverses and keeps its magnitude; the component parallel to the wall is unchanged). Find: a) the time and height at which the ball strikes the wall; b) where the ball lands, measured from the throwing point and from the wall. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 3.6 / Problem 3.6 — Quả bóng được ném từ mặt đất với tốc độ 20 m/s để trúng một cửa sổ ở độ cao 5,0 m, cách điểm ném 30 m theo phương ngang. a) Tìm hai góc ném có thể dùng. b) Tính thời gian bay tới cửa sổ ứng với từng góc. c) So sánh tốc độ lúc tới cửa sổ. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A ball is thrown from the ground at 20 m/s to hit a window 5.0 m high, 30 m away horizontally. a) Find the two launch angles that work. b) Find the flight time to the window for each angle. c) Compare the speeds on reaching the window. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 3.7 / Problem 3.7 — Dây không giãn buộc vào xe, chạy lên vắt qua ròng rọc cố định P ở độ cao 0,90 m so với điểm buộc, rồi đi xuống ôm ròng rọc động treo vật A, đầu dây kia buộc cố định vào trần (hai nhánh dây ở ròng rọc động thẳng đứng). Xe chạy ra xa chân P với tốc độ 1,5 m/s. a) Khi xe cách chân P 1,2 m, tìm tốc độ nâng A. b) Muốn A được nâng đều 0,30 m/s thì xe phải chạy với tốc độ nào khi $x = 0,90 \text{ m}$?

An inextensible string is tied to a cart, runs up over a fixed pulley P at a height 0.90 m above the

attachment point, then goes down around a movable pulley carrying a body A, and its other end is fixed to the ceiling (the two string branches at the movable pulley are vertical). The cart moves away from the foot of P at 1.5 m/s. a) When the cart is 1.2 m from the foot of P, find the speed at which A rises. b) For A to rise steadily at 0.30 m/s, at what speed must the cart move when $x = 0.90$ m?

Bài 3.8 / Problem 3.8 — Xe tải chạy thẳng đều với 5,0 m/s trên đường ngang. Người trên xe ném quả bóng với tốc độ 13 m/s đối với xe, về phía sau xe, hướng chệch lên góc α so với phương ngang với $\tan \alpha = 12/5$ ($\alpha \approx 67,4^\circ$). Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính: a) vận tốc đầu của bóng đối với mặt đường và dạng quỹ đạo nhìn từ mặt đường; b) độ cao cực đại, và khoảng cách giữa bóng và xe lúc bóng chạm đường; c) các thời điểm vận tốc của bóng đối với xe hợp với phương ngang góc 45° .

A lorry moves in a straight line at a steady 5.0 m/s on level road. A person on the lorry throws a ball at 13 m/s relative to the lorry, towards the back, at an angle α above the horizontal with $\tan \alpha = 12/5$ ($\alpha \approx 67.4^\circ$). Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Find: a) the initial velocity of the ball relative to the road and the shape of its path seen from the road; b) the maximum height, and the distance between the ball and the lorry when the ball reaches the road; c) the instants at which the velocity of the ball relative to the lorry makes 45° with the horizontal.

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 3.9 / Problem 3.9 — Quả bóng được ném từ mặt đất với tốc độ 10 m/s, góc 45° . Mỗi lần chạm đất, thành phần vận tốc ngang giữ nguyên còn thành phần đứng giảm còn 0,8 lần độ lớn cũ và đổi chiều. Tính: a) tầm xa và thời gian bay của lần bay đầu; b) tổng quãng đường ngang và tổng thời gian cho tới khi bóng dừng nảy; c) tầm xa của lần bay thứ mấy lần đầu nhỏ hơn 1 m. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A ball is thrown from the ground at 10 m/s, 45° . At each impact the horizontal component of velocity is unchanged and the vertical component is reduced to 0.8 times its old magnitude and reversed. Find: a) the range and flight time of the first flight; b) the total horizontal distance and total time until the ball stops bouncing; c) the first flight whose range is below 1 m. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 3.10 / Problem 3.10 — Một khẩu pháo bắn đạn từ mặt đất với tốc độ 40 m/s theo mọi hướng có thể (mọi góc, mọi phương ngang). Coi mặt đất nằm ngang. a) Tính diện tích mặt đất có thể bị đạn rơi tới. b) Tính độ cao lớn nhất đạn có thể đạt. c) Ở độ cao 50 m, vùng có thể có đạn là hình tròn bán kính bao nhiêu? Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A gun fires shells from the ground at 40 m/s in every possible direction (every angle, every horizontal bearing). Take the ground as level. a) Find the area of ground that shells can reach. b) Find the greatest height a shell can reach. c) At a height of 50 m, what is the radius of the circle where shells can be found? Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 3.11 / Problem 3.11 — Từ O (mặt đất) ném quả bóng 1 với vận tốc đầu (15 ; 20) m/s, và cùng lúc ném quả bóng 2 từ điểm cách O 30 m theo phương ngang với vận tốc đầu (-12 ; 16) m/s (cùng mặt phẳng thẳng đứng). Tìm khoảng cách nhỏ nhất giữa hai quả bóng khi cả hai còn bay, và thời điểm đó. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

From O (on the ground) ball 1 is thrown with initial velocity (15, 20) m/s, and at the same instant ball 2 is thrown from a point 30 m horizontally from O with initial velocity (-12, 16) m/s (in the same vertical plane). Find the least distance between the balls while both are in flight, and when it occurs. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 3.12 / Problem 3.12 — Một quả pháo hoa nổ ở độ cao 30 m so với mặt đất nằm ngang; ngay sau khi nổ, các mảnh bay ra mọi hướng với cùng tốc độ 20 m/s đối với điểm nổ. Bỏ qua

của không khí, lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. a) Chứng minh rằng tại thời điểm t mọi mảnh đang bay nằm trên một mặt cầu; tìm tâm và bán kính. b) Mảnh nào chạm đất đầu tiên và lúc nào? c) Mảnh nào chạm đất cuối cùng và lúc nào? d) Các mảnh rơi xuống mặt đất trong hình tròn bán kính bao nhiêu?

A firework shell bursts 30 m above level ground; just after the burst the fragments fly out in every direction at the same speed 20 m/s relative to the burst point. Neglect air resistance and take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. a) Show that at time t all fragments still in flight lie on a sphere; find its centre and radius. b) Which fragment lands first, and when? c) Which fragment lands last, and when? d) Within what radius on the ground do the fragments land?

3.10. Lời giải bài tự luyện — Solutions to practice problems

Bài 3.1 — Problem 3.1

1. Thời gian rơi $t = \sqrt{2h/g} = \sqrt{40/9,8} \approx 2,02 \text{ s}$.

Fall time $t = \sqrt{2h/g} = \sqrt{40/9.8} \approx 2.02 \text{ s}$.

2. Tốc độ ném $v_0 = L/t = 15/2,02 \approx 7,42 \text{ m/s}$.

Launch speed $v_0 = L/t = 15/2.02 \approx 7.42 \text{ m/s}$.

3. Lúc chạm: $v_y = gt \approx 19,8 \text{ m/s}$, $v = \sqrt{7,42^2 + 19,8^2} \approx 21,1 \text{ m/s}$; $\tan \varphi = 19,8/7,42 \approx 2,67$, $\varphi \approx 69,4^\circ$.

At impact: $v_y = gt \approx 19.8 \text{ m/s}$, $v = \sqrt{7.42^2 + 19.8^2} \approx 21.1 \text{ m/s}$; $\tan \varphi = 19.8/7.42 \approx 2.67$, $\varphi \approx 69.4^\circ$.

Vậy tốc độ ném $\approx 7,42 \text{ m/s}$, thời gian bay $\approx 2,02 \text{ s}$, tốc độ lúc chạm $\approx 21,1 \text{ m/s}$, nghiêng $\approx 69,4^\circ$ so với mặt sân.

Hence the launch speed is $\approx 7.42 \text{ m/s}$, the flight time $\approx 2.02 \text{ s}$, the impact speed $\approx 21.1 \text{ m/s}$, at $\approx 69.4^\circ$ to the ground. ■

Bài 3.2 — Problem 3.2

1. Câu a): $v = 4,0 > u = 2,0$ nên có thể không trôi. $\sin \theta = u/v = 0,5$, $\theta = 30^\circ$ nghiêng ngược dòng so với đường vuông góc bờ. $V_y = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ m/s}$, $t = 200/3,46 \approx 57,7 \text{ s}$.

Part a): $v = 4.0 > u = 2.0$, so zero drift is possible. $\sin \theta = u/v = 0.5$, $\theta = 30^\circ$ upstream of the perpendicular to the bank. $V_y = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \text{ m/s}$, $t = 200/3.46 \approx 57.7 \text{ s}$.

2. Câu b): mũi vuông góc bờ, $t = d/v = 200/4,0 = 50 \text{ s}$, độ trôi $ud/v = 2,0 \cdot 50 = 100 \text{ m}$.

Part b): bow perpendicular to the bank, $t = d/v = 200/4.0 = 50 \text{ s}$, drift $ud/v = 2.0 \cdot 50 = 100 \text{ m}$.

Vậy: a) mũi nghiêng 30° ngược dòng, mất $\approx 57,7 \text{ s}$; b) mất 50 s và trôi 100 m .

Hence: a) bow 30° upstream, taking $\approx 57.7 \text{ s}$; b) 50 s with a drift of 100 m . ■

Bài 3.3 — Problem 3.3

$$L = v_0^2 \sin 2\alpha / g, \quad H = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g), \quad T = 2v_0 \sin \alpha / g$$

1. $\alpha = 30^\circ$: $L = 625 \cdot \sin 60^\circ / 9,8 \approx 55,2 \text{ m}$; $H = 625 \cdot 0,25 / 19,6 \approx 7,97 \text{ m}$; $T = 2 \cdot 25 \cdot 0,5 / 9,8 \approx 2,55 \text{ s}$.

$\alpha = 30^\circ$: $L = 625 \cdot \sin 60^\circ / 9.8 \approx 55.2 \text{ m}$; $H = 625 \cdot 0.25 / 19.6 \approx 7.97 \text{ m}$; $T = 2 \cdot 25 \cdot 0.5 / 9.8 \approx 2.55 \text{ s}$.

2. $\alpha = 60^\circ$: $L = 625 \cdot \sin 120^\circ / 9.8 \approx 55.2 \text{ m}$; $H = 625 \cdot 0.75 / 19.6 \approx 23.9 \text{ m}$; $T = 2 \cdot 25 \cdot \sin 60^\circ / 9.8 \approx 4.42 \text{ s}$.
 $\alpha = 60^\circ$: $L = 625 \cdot \sin 120^\circ / 9.8 \approx 55.2 \text{ m}$; $H = 625 \cdot 0.75 / 19.6 \approx 23.9 \text{ m}$; $T = 2 \cdot 25 \cdot \sin 60^\circ / 9.8 \approx 4.42 \text{ s}$.

Vậy hai góc phụ nhau cho cùng tầm xa $\approx 55.2 \text{ m}$; góc 60° bay cao gấp 3 lần và lâu gấp $\sqrt{3}$ lần góc 30° .

Hence the two complementary angles give the same range $\approx 55.2 \text{ m}$; the 60° throw rises 3 times as high and flies $\sqrt{3}$ times as long as the 30° throw. ■

Bài 3.4 — Problem 3.4

1. Trong hệ gắn A: $\vec{r}_0 = (20; -15) \text{ km}$, $\vec{v}_{21} = (0; 8) - (10; 0) = (-10; 8) \text{ km/h}$, $|\vec{v}_{21}|^2 = 164$.

In the frame of A: $\vec{r}_0 = (20, -15) \text{ km}$, $\vec{v}_{21} = (0, 8) - (10, 0) = (-10, 8) \text{ km/h}$, $|\vec{v}_{21}|^2 = 164$.

2. $t_m = -(20 \cdot (-10) + (-15) \cdot 8) / 164 = 320 / 164 \approx 1.95 \text{ h} > 0$.

$t_m = -(20 \cdot (-10) + (-15) \cdot 8) / 164 = 320 / 164 \approx 1.95 \text{ h} > 0$.

3. $d_{\min} = |20 \cdot 8 - (-15) \cdot (-10)| / \sqrt{164} = |160 - 150| / 12.81 \approx 0.78 \text{ km}$.

$d_{\min} = |20 \cdot 8 - (-15) \cdot (-10)| / \sqrt{164} = |160 - 150| / 12.81 \approx 0.78 \text{ km}$.

Vậy hai tàu gần nhau nhất $\approx 0.78 \text{ km}$ sau $\approx 1.95 \text{ h}$, nhỏ hơn 1 km nên có tới gần nhau dưới 1 km.

Hence the ships are closest, $\approx 0.78 \text{ km}$ apart, after $\approx 1.95 \text{ h}$, which is under 1 km, so they do come within 1 km. ■

Bài 3.5 — Problem 3.5

1. Nếu không có tường, tầm xa $L = v_0^2 \sin 90^\circ / g = 256 / 9.8 \approx 26.1 \text{ m} > 18 \text{ m}$, nên bóng tới tường khi đang bay.

Without the wall the range would be $L = v_0^2 \sin 90^\circ / g = 256 / 9.8 \approx 26.1 \text{ m} > 18 \text{ m}$, so the ball reaches the wall in flight.

2. Tới tường: $v_x = 16 \cos 45^\circ \approx 11.3 \text{ m/s}$, $t = 18 / 11.3 \approx 1.59 \text{ s}$; độ cao $y = 18 \cdot \tan 45^\circ - 9.8 \cdot 18^2 / (2 \cdot 256 \cdot \cos^2 45^\circ) = 18 - 12.4 \approx 5.6 \text{ m}$.

At the wall: $v_x = 16 \cos 45^\circ \approx 11.3 \text{ m/s}$, $t = 18 / 11.3 \approx 1.59 \text{ s}$; height $y = 18 \cdot \tan 45^\circ - 9.8 \cdot 18^2 / (2 \cdot 256 \cdot \cos^2 45^\circ) = 18 - 12.4 \approx 5.6 \text{ m}$.

3. Sau va chạm chỉ v_x đổi chiều, v_y và tọa độ y giữ nguyên, nên quỹ đạo sau va chạm là ảnh đối xứng qua mặt phẳng tường của phần quỹ đạo nếu không có tường. Điểm rơi ảo ở $x = 26.1 \text{ m}$ đối xứng với điểm thật qua tường: $x_{\text{thật}} = 2 \cdot 18 - 26.1 \approx 9.9 \text{ m}$.

After the collision only v_x reverses; v_y and y are unchanged, so the path after the bounce is the mirror image in the plane of the wall of the path that would have continued without the wall. The imaginary landing point at $x = 26.1 \text{ m}$ mirrors the true one: $x_{\text{true}} = 2 \cdot 18 - 26.1 \approx 9.9 \text{ m}$.

Vậy bóng đập tường sau $\approx 1.59 \text{ s}$ ở độ cao $\approx 5.6 \text{ m}$, rồi rơi cách điểm ném $\approx 9.9 \text{ m}$, tức cách tường $\approx 8.1 \text{ m}$ (về phía điểm ném). Tường cần cao hơn 5.6 m.

Hence the ball strikes the wall after ≈ 1.59 s at a height ≈ 5.6 m, then lands ≈ 9.9 m from the throwing point, i.e. ≈ 8.1 m from the wall (on the throwing side). The wall must be higher than 5.6 m. ■

Bài 3.6 — Problem 3.6

1. Với $t = \tan \alpha$, $A = gx^2/(2v_0^2) = 9,8 \cdot 900/800 = 11,025$: $11,025t^2 - 30t + (5 + 11,025) = 0$, tức $11,025t^2 - 30t + 16,025 = 0$.
With $t = \tan \alpha$, $A = gx^2/(2v_0^2) = 9.8 \cdot 900/800 = 11.025$: $11.025t^2 - 30t + (5 + 11.025) = 0$, i.e. $11.025t^2 - 30t + 16.025 = 0$.
2. Biệt thức $900 - 4 \cdot 11,025 \cdot 16,025 \approx 193,3$, căn $\approx 13,90$. Nghiệm $t = (30 \pm 13,90)/22,05$: 0,730 và 1,991, tức $\alpha \approx 36,1^\circ$ hoặc $\alpha \approx 63,3^\circ$. (Điểm (30 ; 5) nằm trong parabol an toàn: $20,41 - 11,03 = 9,38 \geq 5$.)
Discriminant $900 - 4 \cdot 11.025 \cdot 16.025 \approx 193.3$, root ≈ 13.90 . $t = (30 \pm 13.90)/22.05$: 0.730 and 1.991, i.e. $\alpha \approx 36.1^\circ$ or $\alpha \approx 63.3^\circ$. (The point (30, 5) lies inside the safety parabola: $20.41 - 11.03 = 9.38 \geq 5$.)
3. Thời gian $t = x/(v_0 \cos \alpha)$: với $36,1^\circ$ là $30/(20 \cdot 0,808) \approx 1,86$ s; với $63,3^\circ$ là $30/(20 \cdot 0,449) \approx 3,34$ s.
Time $t = x/(v_0 \cos \alpha)$: for 36.1° it is $30/(20 \cdot 0.808) \approx 1.86$ s; for 63.3° it is $30/(20 \cdot 0.449) \approx 3.34$ s.
4. Tốc độ ở độ cao 5,0 m theo Tính chất 3.8: $v = \sqrt{400 - 2 \cdot 9,8 \cdot 5,0} \approx 17,4$ m/s, như nhau cho cả hai góc.
By Property 3.8 the speed at 5.0 m height is $v = \sqrt{400 - 2 \cdot 9.8 \cdot 5.0} \approx 17.4$ m/s, the same for both angles.

Vậy hai góc là $\approx 36,1^\circ$ (mất $\approx 1,86$ s) và $\approx 63,3^\circ$ (mất $\approx 3,34$ s); tốc độ tới cửa sổ đều $\approx 17,4$ m/s.

Hence the two angles are $\approx 36.1^\circ$ (taking ≈ 1.86 s) and $\approx 63.3^\circ$ (taking ≈ 3.34 s); the speed on arrival is ≈ 17.4 m/s for both. ■

Bài 3.7 — Problem 3.7

1. $\ell = \sqrt{1,2^2 + 0,9^2} = 1,5$ m, $\cos \varphi = 1,2/1,5 = 0,8$. Tốc độ rút dây ở đầu xe: $w = 1,5 \cdot 0,8 = 1,2$ m/s (Tính chất 3.18).
 $\ell = \sqrt{1.2^2 + 0.9^2} = 1.5$ m, $\cos \varphi = 1.2/1.5 = 0.8$. The rate of drawing in string at the cart end is $w = 1.5 \cdot 0.8 = 1.2$ m/s (Property 3.18).
2. Ở ròng rọc động, tốc độ A bằng một nửa w (Tính chất 3.19): 0,60 m/s.
At the movable pulley the speed of A is half of w (Property 3.19): 0.60 m/s.
3. Câu b): $w = 2 \cdot 0,30 = 0,60$ m/s. Khi $x = 0,90$ m: $\ell = 0,90\sqrt{2}$, $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$. Tốc độ xe $v = w/\cos \varphi = 0,60\sqrt{2} \approx 0,849$ m/s.
Part b): $w = 2 \cdot 0.30 = 0.60$ m/s. At $x = 0.90$ m: $\ell = 0.90\sqrt{2}$, $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$. The cart speed is $v = w/\cos \varphi = 0.60\sqrt{2} \approx 0.849$ m/s.

Vậy A được nâng với 0,60 m/s ở câu a); ở câu b) xe cần chạy $\approx 0,849$ m/s.

Hence A rises at 0.60 m/s in part a); in part b) the cart must move at ≈ 0.849 m/s. ■

Bài 3.8 — Problem 3.8

- Đối với xe: $(-13\cos \alpha ; 13\sin \alpha) = (-5 ; 12)$ m/s ($\cos \alpha = 5/13$, $\sin \alpha = 12/13$). Cộng vận tốc xe đối với đường $(5 ; 0)$: vận tốc đầu đối với đường là $(0 ; 12)$ m/s, tức bóng được ném thẳng đứng lên. Nhìn từ mặt đường quỹ đạo là đoạn thẳng đứng.
Relative to the lorry: $(-13\cos \alpha, 13\sin \alpha) = (-5, 12)$ m/s ($\cos \alpha = 5/13, \sin \alpha = 12/13$). Adding the lorry's velocity relative to the road $(5, 0)$: the initial velocity relative to the road is $(0, 12)$ m/s, so the ball is thrown vertically upwards. Seen from the road its path is a vertical segment.
- Độ cao cực đại $H = 12^2/(2 \cdot 9,8) \approx 7,35$ m. Thời gian bay $T = 2 \cdot 12/9,8 \approx 2,45$ s. Bóng rơi đúng chỗ ném trên đường, trong khi xe đi được $5,0 \cdot 2,45 \approx 12,2$ m, nên bóng ở sau xe 12,2 m.
Maximum height $H = 12^2/(2 \cdot 9.8) \approx 7.35$ m. Flight time $T = 2 \cdot 12/9.8 \approx 2.45$ s. The ball lands at the launch point on the road while the lorry travels $5.0 \cdot 2.45 \approx 12.2$ m, so the ball is 12.2 m behind the lorry.
- Vận tốc bóng đối với xe là $(0 - 5 ; v_y) = (-5 ; v_y)$ với $v_y = 12 - 9,8t$. Hợp góc 45° với phương ngang khi $|v_y| = 5$: $t = (12 - 5)/9,8 \approx 0,714$ s (bóng đang lên) và $t = (12 + 5)/9,8 \approx 1,73$ s (đang xuống).
The velocity of the ball relative to the lorry is $(0 - 5, v_y) = (-5, v_y)$ with $v_y = 12 - 9.8t$. It makes 45° with the horizontal when $|v_y| = 5$: $t = (12 - 5)/9.8 \approx 0.714$ s (rising) and $t = (12 + 5)/9.8 \approx 1.73$ s (falling).

Vậy bóng bay thẳng đứng với đường, cao tối đa $\approx 7,35$ m, rơi cách xe $\approx 12,2$ m phía sau; vận tốc đối với xe nghiêng 45° tại $\approx 0,714$ s và $\approx 1,73$ s.

Hence the ball moves vertically relative to the road, reaches ≈ 7.35 m, lands ≈ 12.2 m behind the lorry; its velocity relative to the lorry is at 45° at ≈ 0.714 s and ≈ 1.73 s. ■

Bài 3.9 — Problem 3.9

- Lần đầu: $L_1 = 100 \cdot \sin 90^\circ/9,8 \approx 10,2$ m; $T_1 = 2 \cdot 10 \cdot \sin 45^\circ/9,8 \approx 1,44$ s.
First flight: $L_1 = 100 \cdot \sin 90^\circ/9.8 \approx 10.2$ m; $T_1 = 2 \cdot 10 \cdot \sin 45^\circ/9.8 \approx 1.44$ s.
- Sau mỗi lần nảy thành phần đứng nhân 0,8 trong khi thành phần ngang không đổi, nên thời gian bay nhân 0,8 và tầm xa nhân 0,8: $L_n = L_1 \cdot 0,8^{n-1}$, $T_n = T_1 \cdot 0,8^{n-1}$.
After each bounce the vertical component is multiplied by 0.8 while the horizontal component is unchanged, so the flight time and the range are each multiplied by 0.8: $L_n = L_1 \cdot 0.8^{n-1}$, $T_n = T_1 \cdot 0.8^{n-1}$.
- Tổng cấp số nhân lùi vô hạn công bội 0,8: $\Sigma L = L_1/(1 - 0,8) = 5L_1 \approx 51,0$ m; $\Sigma T = 5T_1 \approx 7,22$ s.
Sum of an infinite geometric series with ratio 0.8: $\Sigma L = L_1/(1 - 0.8) = 5L_1 \approx 51.0$ m; $\Sigma T = 5T_1 \approx 7.22$ s.
- Câu c): $L_n < 1$ khi $0,8^{n-1} < 1/10,2 \approx 0,098$. Vì $0,8^{10} \approx 0,107$ và $0,8^{11} \approx 0,086$, nên $n - 1 = 11$, tức $n = 12$ ($L_{12} \approx 0,88$ m).
Part c): $L_n < 1$ when $0.8^{n-1} < 1/10.2 \approx 0.098$. Since $0.8^{10} \approx 0.107$ and $0.8^{11} \approx 0.086$, $n - 1 = 11$, i.e. $n = 12$ ($L_{12} \approx 0.88$ m).

Vậy lần đầu bay $\approx 10,2$ m trong $\approx 1,44$ s; tổng quãng đường ngang $\approx 51,0$ m, tổng thời gian $\approx 7,22$ s; lần bay thứ 12 là lần đầu có tầm xa nhỏ hơn 1 m.

Hence the first flight covers ≈ 10.2 m in ≈ 1.44 s; the total horizontal distance is ≈ 51.0 m and the total time ≈ 7.22 s; the 12th flight is the first with a range below 1 m. ■

Bài 3.10 — Problem 3.10

1. Mỗi mặt phẳng thẳng đứng qua họng pháo có parabol an toàn $y = v_0^2/(2g) - gr^2/(2v_0^2)$; toàn bộ vùng có thể có đạn là mặt tròn xoay quanh trục thẳng đứng (r là khoảng cách tới trục).

Every vertical plane through the muzzle has the safety parabola $y = v_0^2/(2g) - gr^2/(2v_0^2)$; the whole region where shells can be is the solid of revolution about the vertical axis (r is the distance from the axis).

2. Câu a): đặt $y = 0$, $r_{\max} = v_0^2/g = 1600/9.8 \approx 163,3$ m; diện tích $\pi r_{\max}^2 \approx 8,37 \cdot 10^4$ m².

Part a): set $y = 0$, $r_{\max} = v_0^2/g = 1600/9.8 \approx 163.3$ m; area $\pi r_{\max}^2 \approx 8.37 \cdot 10^4$ m².

3. Câu b): đặt $r = 0$, $y_{\max} = v_0^2/(2g) = 1600/19.6 \approx 81,6$ m (bắn thẳng đứng).

Part b): set $r = 0$, $y_{\max} = v_0^2/(2g) = 1600/19.6 \approx 81.6$ m (vertical fire).

4. Câu c): $r^2 = (v_0^2/g)(v_0^2/g - 2y) = 163,3 \cdot (163,3 - 100) \approx 10.330$, $r \approx 101,6$ m.

Part c): $r^2 = (v_0^2/g)(v_0^2/g - 2y) = 163.3 \cdot (163.3 - 100) \approx 10.330$, $r \approx 101.6$ m.

Vậy vùng rơi rộng $\approx 8,37 \cdot 10^4$ m², độ cao tối đa $\approx 81,6$ m, bán kính vùng ở độ cao 50 m $\approx 101,6$ m.

Hence the landing region is $\approx 8.37 \cdot 10^4$ m², the greatest height ≈ 81.6 m, and the radius of the region at 50 m height ≈ 101.6 m. ■

Bài 3.11 — Problem 3.11

1. Thời gian bay: $T_1 = 2 \cdot 20/9.8 \approx 4,08$ s, $T_2 = 2 \cdot 16/9.8 \approx 3,27$ s. Cả hai còn bay khi $t < 3,27$ s; Tính chất 3.9 dùng được.

Flight times: $T_1 = 2 \cdot 20/9.8 \approx 4.08$ s, $T_2 = 2 \cdot 16/9.8 \approx 3.27$ s. Both are airborne for $t < 3.27$ s; Property 3.9 applies.

2. Trong hệ rơi tự do (hệ gắn quả 1): $\vec{r}_0 = (30 ; 0)$ m, $\vec{v}_{21} = (-12 ; 16) - (15 ; 20) = (-27 ; -4)$ m/s, $|\vec{v}_{21}|^2 = 745$. Hệ này không phụ thuộc trọng lực nên dùng Định lý 3.16.

In the freely falling frame (attached to ball 1): $\vec{r}_0 = (30, 0)$ m, $\vec{v}_{21} = (-12, 16) - (15, 20) = (-27, -4)$ m/s, $|\vec{v}_{21}|^2 = 745$. This frame is independent of gravity, so Theorem 3.16 applies.

3. $t_m = -(30 \cdot (-27) + 0)/745 = 810/745 \approx 1,09$ s $< 3,27$ s. $d_{\min} = |30 \cdot (-4) - 0 \cdot (-27)|/\sqrt{745} = 120/27,3 \approx 4,40$ m.

$t_m = -(30 \cdot (-27) + 0)/745 = 810/745 \approx 1.09$ s < 3.27 s. $d_{\min} = |30 \cdot (-4) - 0 \cdot (-27)|/\sqrt{745} = 120/27.3 \approx 4.40$ m.

Vậy hai quả bóng gần nhau nhất $\approx 4,40$ m vào lúc $\approx 1,09$ s, trước khi quả 2 chạm đất.

Hence the balls are closest, ≈ 4.40 m apart, at ≈ 1.09 s, before ball 2 lands. ■

Bài 3.12 — Problem 3.12

1. Mỗi mảnh có $\vec{r} = \vec{v}_0 t + (1/2)\vec{g}t^2$ với $|\vec{v}_0| = 20$ m/s. Suy ra $|\vec{r} - (1/2)\vec{g}t^2| = 20t$: các mảnh nằm trên mặt cầu bán kính $20t$, tâm ở độ cao $30 - 4,9t^2$ ngay dưới điểm nổ (tâm rơi tự do).

Each fragment has $\vec{r} = \vec{v}_0 t + (1/2)\vec{g}t^2$ with $|\vec{v}_0| = 20$ m/s. Hence $|\vec{r} - (1/2)\vec{g}t^2| = 20t$: the

fragments lie on a sphere of radius $20t$ whose centre, at height $30 - 4.9t^2$ directly below the burst point, falls freely.

2. Mảnh đầu tiên chạm đất là mảnh ở cực dưới của mặt cầu, bay thẳng xuống: $30 - 4.9t^2 - 20t = 0$, $t = (-20 + \sqrt{(400 + 588)})/9.8 \approx 1.17$ s.

The first fragment to land is the one at the lowest point of the sphere, thrown straight down: $30 - 4.9t^2 - 20t = 0$, $t = (-20 + \sqrt{(400 + 588)})/9.8 \approx 1.17$ s.

3. Mảnh cuối cùng là mảnh ở cực trên, bay thẳng lên: $30 - 4.9t^2 + 20t = 0$, $t = (20 + \sqrt{(400 + 588)})/9.8 \approx 5.25$ s. Sau thời điểm này điểm cao nhất của mặt cầu đã ở dưới mặt đất, nên mọi mảnh đã rơi.

The last fragment is the one at the top of the sphere, thrown straight up: $30 - 4.9t^2 + 20t = 0$, $t = (20 + \sqrt{(400 + 588)})/9.8 \approx 5.25$ s. After this the highest point of the sphere is below the ground, so every fragment has landed.

4. Câu d): đây là bài ném từ độ cao 30 m với tốc độ 20 m/s; Hệ quả 3.11 cho bán kính $L_{\max} = (20/9.8) \cdot \sqrt{(400 + 588)} \approx 64.2$ m, ứng với mảnh bay chệch lên $\arctan(20/31.4) \approx 32.5^\circ$ so với phương ngang.

Part d): a throw from 30 m height at 20 m/s; Corollary 3.11 gives the radius $L_{\max} = (20/9.8) \cdot \sqrt{(400 + 588)} \approx 64.2$ m, for the fragment launched $\arctan(20/31.4) \approx 32.5^\circ$ above the horizontal.

Vậy mảnh bay xuống chạm đất đầu tiên sau ≈ 1.17 s, mảnh bay lên chạm đất cuối cùng sau ≈ 5.25 s, và các mảnh rơi trong hình tròn bán kính ≈ 64.2 m.

Hence the fragment thrown down lands first after ≈ 1.17 s, the one thrown up lands last after ≈ 5.25 s, and the fragments land within a circle of radius ≈ 64.2 m. ■

Chương 4. Động học chuyển động tròn và vật rắn — Chapter 4.

Kinematics of circular motion and rigid bodies

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Tách gia tốc của chuyển động tròn thành thành phần hướng tâm và thành phần tiếp tuyến, rồi viết gia tốc toàn phần.
Split the acceleration in circular motion into centripetal and tangential parts and write the total acceleration.
- Tính bán kính cong của một quỹ đạo bất kỳ từ gia tốc pháp tuyến, áp dụng cho ném xiên tại đỉnh và tại điểm ném.
Find the radius of curvature of any path from the normal acceleration, applied to a projectile at its peak and at launch.
- Tìm vận tốc mọi điểm của vật rắn bằng công thức cộng vận tốc và bằng tâm quay tức thời.
Find the velocity of every point of a rigid body with the velocity-addition formula and with the instantaneous centre of rotation.
- Giải bài lăn không trượt: bánh xe, con lăn giữa hai ván, bánh lăn trong vành, vận tốc và gia tốc điểm trên vành, đường cycloid.
Solve rolling-without-slipping problems: wheels, a roller between two boards, a wheel rolling inside a ring, velocity and acceleration of a rim point, the cycloid.
- Tính tỉ số truyền của bánh răng và dây curoa, và thời điểm gặp nhau của các vật chuyển động tròn đều, trong đó có các kim đồng hồ.
Compute the ratio of gear and belt drives, and the meeting times of bodies in uniform circular motion, clock hands included.

4.1. Góc quay, tốc độ góc, chu kỳ — Angle, angular speed, period

Ký hiệu thống nhất cho cả hai ngôn ngữ: θ góc quay (rad), ω tốc độ góc (rad/s), γ gia tốc góc (rad/s²), T chu kỳ (s), f tần số (Hz), a_n gia tốc pháp tuyến (hướng tâm), a_t gia tốc tiếp tuyến. Chiều dương của góc là chiều ngược kim đồng hồ.

The same symbols serve both languages: θ angle turned (rad), ω angular speed (rad/s), γ angular acceleration (rad/s²), T period (s), f frequency (Hz), a_n normal (centripetal) acceleration, a_t tangential acceleration. The positive sense of angle is anticlockwise.

ĐỊNH NGHĨA 4.1 (Radian) / DEFINITION 4.1 (Radian) — Góc quay θ của một điểm chuyển động trên đường tròn bán kính r , đi được cung dài s , đo bằng radian: $\theta = s/r$. Vòng tròn đầy đủ ứng với $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, nên $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$.

The angle θ turned by a point moving on a circle of radius r along an arc of length s is measured in radians: $\theta = s/r$. A full circle is $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, so $1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$.

$$\theta = s/r \quad (4.1)$$

ĐỊNH NGHĨA 4.2 (Tốc độ góc, chu kỳ, tần số) / DEFINITION 4.2 (Angular speed, period, frequency) — Tốc độ góc là góc quay trong một đơn vị thời gian: $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ khi Δt

dần tới 0. Chu kỳ T là thời gian đi hết một vòng, tần số $f = 1/T$ là số vòng trong một giây. Chuyển động tròn đều có ω không đổi.

Angular speed is the angle turned per unit time: $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ as Δt tends to 0. The period T is the time for one revolution, and the frequency $f = 1/T$ is the number of revolutions per second. Uniform circular motion has constant ω .

$$\omega = \Delta\theta/\Delta t = 2\pi/T = 2\pi f \quad (4.2)$$

ĐỊNH LÝ 4.3 (Vận tốc dài và tốc độ góc) / THEOREM 4.3 (Linear and angular velocity)

— Điểm cách trục quay khoảng r có vận tốc dài tiếp tuyến với đường tròn, độ lớn $v = \omega r$. Mọi điểm của một vật rắn quay quanh trục cố định có cùng ω ; điểm càng xa trục càng nhanh.

A point at distance r from the axis has a velocity tangent to its circle, of magnitude $v = \omega r$. All points of a rigid body turning about a fixed axis share the same ω ; the farther from the axis, the faster.

Chứng minh. / Proof.

Trong khoảng thời gian Δt điểm đi được cung $\Delta s = r\Delta\theta$ (định nghĩa radian). Chia hai vế cho Δt rồi cho Δt dần tới 0:

In a time Δt the point covers an arc $\Delta s = r\Delta\theta$ (definition of the radian). Divide by Δt and let Δt tend to 0:

$$v = \Delta s/\Delta t = r \cdot \Delta\theta/\Delta t = \omega r \quad (4.3)$$

Bán kính r của một điểm cố định trên vật không đổi, nên hệ thức áp dụng cho mọi thời điểm.

The radius r of a given point on the body does not change, so the relation holds at every instant.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho vòng/phút, chu kỳ hay số vòng: đổi sang rad/s trước, vì mọi công thức của chương đều viết cho ω đo bằng rad/s. Điểm ở vĩ độ φ trên Trái Đất vẽ đường tròn bán kính $R \cos \varphi$, nhỏ hơn bán kính Trái Đất R , nên chọn bán kính quỹ đạo của chính điểm đó.

When the data come as rpm, period or number of turns, convert to rad/s first, since every formula here is written for ω in rad/s. A point at latitude φ on the Earth traces a circle of radius $R \cos \varphi$, smaller than the Earth's radius R , so use the radius of that point's own path.

VÍ DỤ 4.1 (Đổi sang rad/s, chọn bán kính quỹ đạo) / EXAMPLE 4.1 (Convert to rad/s, pick the path radius)

— Trái Đất quay đều quanh trục, lấy chu kỳ 24 h và bán kính $R = 6370$ km. Tính tốc độ dài và gia tốc hướng tâm của một điểm ở vĩ độ 21° và của một điểm ở xích đạo.

The Earth turns uniformly about its axis; take the period as 24 h and the radius as $R = 6370$ km. Find the speed and the centripetal acceleration of a point at latitude 21° and of a point on the equator.

Lời giải. / Solution.

Tốc độ góc chung cho mọi điểm:

The angular speed is the same for every point:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \cdot 3600 \text{ s})$$

Ở vĩ độ 21° quỹ đạo là đường tròn bán kính $r = R \cos 21^\circ \approx 5946 \text{ km}$. Do đó $v = \omega r \approx 432 \text{ m/s}$ và $a_n = \omega^2 r \approx 0,0315 \text{ m/s}^2$.

At latitude 21° the path is a circle of radius $r = R \cos 21^\circ \approx 5946 \text{ km}$. Hence $v = \omega r \approx 432 \text{ m/s}$ and $a_n = \omega^2 r \approx 0.0315 \text{ m/s}^2$.

Ở xích đạo $r = R$: $v = \omega R \approx 463 \text{ m/s}$, $a_n = \omega^2 R \approx 0,0337 \text{ m/s}^2$, với $\omega \approx 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$.

On the equator $r = R$: $v = \omega R \approx 463 \text{ m/s}$, $a_n = \omega^2 R \approx 0.0337 \text{ m/s}^2$, with $\omega \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$.

Vậy điểm ở vĩ độ 21° có tốc độ khoảng 432 m/s và gia tốc hướng tâm khoảng $0,0315 \text{ m/s}^2$; điểm ở xích đạo có khoảng 463 m/s và $0,0337 \text{ m/s}^2$.

Hence the point at latitude 21° moves at about 432 m/s with centripetal acceleration about 0.0315 m/s^2 ; the equatorial point has about 463 m/s and 0.0337 m/s^2 . ■

NHẬN XÉT / REMARK — Gia tốc hướng tâm ở xích đạo chỉ bằng khoảng 0,34% của g . Vì vậy trọng lượng biểu kiến chỉ thay đổi nhẹ theo vĩ độ (xem hệ quy chiếu phi quán tính, Chương 6).

The centripetal acceleration at the equator is only about 0.34% of g , so apparent weight changes only slightly with latitude (see non-inertial frames, Chapter 6).

PHẢI THUỘC / MEMORISE — $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$; $v = \omega r$; 1 vòng/phút = $\pi/30 \text{ rad/s} \approx 0,105 \text{ rad/s}$.

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$; $v = \omega r$; 1 rev/min = $\pi/30 \text{ rad/s} \approx 0.105 \text{ rad/s}$.

4.2. Gia tốc hướng tâm, gia tốc tiếp tuyến và gia tốc toàn phần — Centripetal, tangential and total acceleration

Vận tốc là một vector. Trong chuyển động tròn đều độ lớn v không đổi nhưng hướng của $\vec{v}$ quay liên tục, nên vẫn có gia tốc. Khi độ lớn v cũng thay đổi, gia tốc có thêm thành phần dọc theo vận tốc.

Velocity is a vector. In uniform circular motion the magnitude v is constant but the direction of $\vec{v}$ keeps turning, so there is still an acceleration. When the magnitude v also changes, the acceleration gains a component along the velocity.

ĐỊNH LÝ 4.4 (Gia tốc hướng tâm) / THEOREM 4.4 (Centripetal acceleration) — Vật chuyển động tròn đều trên đường tròn bán kính r có gia tốc hướng vào tâm, độ lớn $a_n = v^2/r = \omega^2 r$.

A body in uniform circular motion on a circle of radius r has an acceleration directed to the centre, of magnitude $a_n = v^2/r = \omega^2 r$.

Chứng minh. / Proof.

Lấy hai vị trí A, B của vật cách nhau thời gian Δt , góc $AOB = \Delta\theta$. Vận tốc $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$ cùng độ lớn v , hợp nhau góc $\Delta\theta$ (mỗi vận tốc vuông góc với bán kính tương ứng). Độ biến thiên $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ là cạnh đáy của tam giác cân (Hình 4.1).

Take two positions A and B a time Δt apart, with angle $AOB = \Delta\theta$. The velocities $\vec{v}_A$ and $\vec{v}_B$ have equal magnitude v and make the angle $\Delta\theta$ with each other (each is perpendicular to its radius). The change $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ is the base of an isosceles triangle (Figure 4.1).

Tam giác vận tốc (hai cạnh bên v , góc đỉnh $\Delta\theta$) đồng dạng với tam giác OAB (hai cạnh bên r , góc đỉnh $\Delta\theta$). Suy ra $|\Delta\vec{v}|/AB = v/r$.

The velocity triangle (equal sides v , apex angle $\Delta\theta$) is similar to triangle OAB (equal sides r , apex angle $\Delta\theta$). Hence $|\Delta\vec{v}|/AB = v/r$.

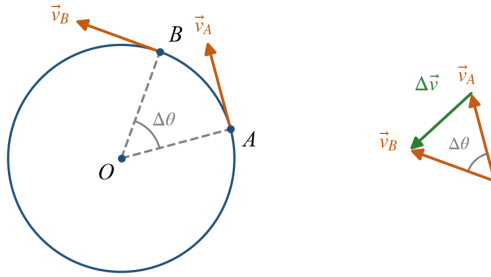
Khi Δt dần tới 0, dây AB dần tới cung $AB = v\Delta t$. Do đó $|\Delta\vec{v}| = (v/r) \cdot v\Delta t$ và gia tốc có độ lớn:

As Δt tends to 0, the chord AB tends to the arc $AB = v\Delta t$. Therefore $|\Delta\vec{v}| = (v/r) \cdot v\Delta t$ and the acceleration has magnitude:

$$a_n = |\Delta\vec{v}|/\Delta t = v^2/r = \omega^2 r \quad (4.4)$$

Góc ở đáy của tam giác cân bằng $(\pi - \Delta\theta)/2$ dần tới $\pi/2$, nên $\Delta\vec{v}$ dần tới vuông góc với $\vec{v}$, tức hướng về tâm O.

The base angle of the isosceles triangle, $(\pi - \Delta\theta)/2$, tends to $\pi/2$, so $\Delta\vec{v}$ tends to be perpendicular to $\vec{v}$, i.e. directed towards O. ■



Hình 4.1. Tam giác vận tốc: $\Delta\vec{v}$ hướng về tâm khi $\Delta\theta$ nhỏ

Figure 4.1. Velocity triangle: $\Delta\vec{v}$ points to the centre for small $\Delta\theta$

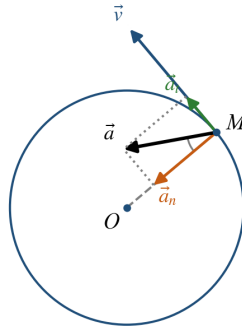
TÍNH CHẤT 4.5 / PROPERTY 4.5 — Khi độ lớn vận tốc thay đổi, thành phần của gia tốc dọc theo vận tốc là gia tốc tiếp tuyến $a_t = \Delta v/\Delta t = \gamma r$, với $\gamma = \Delta\omega/\Delta t$ là gia tốc góc. Gia tốc toàn phần là tổng vuông góc của hai thành phần:

When the magnitude of the velocity changes, the component of acceleration along the velocity is the tangential acceleration $a_t = \Delta v/\Delta t = \gamma r$, where $\gamma = \Delta\omega/\Delta t$ is the angular acceleration. The total acceleration is the perpendicular sum of the two parts:

$$a_t = \gamma r, \quad a = \sqrt{(a_n^2 + a_t^2)}, \quad \tan \varphi = a_t/a_n \quad (4.5)$$

Trong (4.5), φ là góc giữa $\vec{a}$ và bán kính hướng về tâm. a_n làm đổi hướng vận tốc, a_t làm đổi độ lớn vận tốc (Hình 4.2). Vì $v = \omega r$ với r không đổi nên $\Delta v = r\Delta\omega$, từ đó $a_t = \gamma r$.

In (4.5), φ is the angle between $\vec{a}$ and the radius pointing to the centre. a_n changes the direction of the velocity and a_t changes its magnitude (Figure 4.2). Since $v = \omega r$ with r fixed, $\Delta v = r\Delta\omega$, which gives $a_t = \gamma r$.



Hình 4.2. Gia tốc pháp tuyến, tiếp tuyến và toàn phần tại điểm M

Figure 4.2. Normal, tangential and total acceleration at M

TÍNH CHẤT 4.6 / PROPERTY 4.6 — Chuyển động tròn biến đổi đều có γ không đổi. Các phương trình trùng dạng với chuyển động thẳng biến đổi đều (Chương 2) sau khi thay x, v, a bằng θ, ω, γ .

Uniformly accelerated circular motion has constant γ . Its equations have the same form as uniformly accelerated straight-line motion (Chapter 2) after replacing x, v, a by θ, ω, γ .

Chứng minh. / Proof.

Đồ thị ω - t là đường thẳng hệ số góc γ nên $\omega = \omega_0 + \gamma t$. Góc quay bằng diện tích dưới đồ thị, là hình thang:

The ω - t graph is a straight line of slope γ , so $\omega = \omega_0 + \gamma t$. The angle turned equals the area under the graph, a trapezium:

$$\theta = (\omega_0 + \omega)t/2 = \omega_0 t + \gamma t^2/2 \quad (4.6)$$

Khử t từ hai phương trình đầu: $t = (\omega - \omega_0)/\gamma$, thay vào $\theta = (\omega_0 + \omega)t/2$ được:

Eliminate t using $t = (\omega - \omega_0)/\gamma$ in $\theta = (\omega_0 + \omega)t/2$:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\gamma\theta \quad (4.7)$$

■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề hỏi gia tốc của một điểm trên vật quay nhanh dần: viết riêng $a_n = \omega^2 r$ (phụ thuộc thời điểm) và $a_t = \gamma r$ (hằng khi γ hằng), rồi ghép bằng (4.5). Đề hỏi gia tốc “hợp góc 45° với vận tốc” nghĩa là $a_n = a_t$.

A question on the acceleration of a point on a spinning-up body: write $a_n = \omega^2 r$ (depends on the instant) and $a_t = \gamma r$ (constant when γ is constant) separately, then combine with (4.5). An acceleration “at 45° to the velocity” means $a_n = a_t$.

VÍ DỤ 4.2 (Gia tốc toàn phần của điểm trên đĩa) / EXAMPLE 4.2 (Total acceleration of a point on a disc) — Đĩa bán kính 6 cm quay từ nghỉ, tăng tốc đều đến 480 vòng/phút trong 4 s. Tính gia tốc góc, số vòng đĩa quay trong 4 s, và gia tốc toàn phần của điểm trên vành tại $t = 2$ s, cùng góc giữa $\vec{a}$ và bán kính.

A disc of radius 6 cm starts from rest and speeds up uniformly to 480 rev/min in 4 s. Find the angular

acceleration, the number of turns in 4 s, and the total acceleration of a rim point at $t = 2$ s with the angle between $\vec{a}$ and the radius.

Lời giải. / Solution.

Đổi $\omega = 480$ vòng/phút $= 16\pi$ rad/s $\approx 50,3$ rad/s. Gia tốc góc:

Convert $\omega = 480$ rev/min $= 16\pi$ rad/s ≈ 50.3 rad/s. The angular acceleration is:

$$\gamma = (\omega - 0)/t = 4\pi \text{ rad/s}^2$$

Góc quay $\theta = \gamma t^2/2 = 32\pi$ rad $\approx 100,5$ rad, tức 16 vòng.

The angle turned is $\theta = \gamma t^2/2 = 32\pi$ rad ≈ 100.5 rad, i.e. 16 turns.

Tại $t = 2$ s: $\omega = \gamma t = 8\pi \approx 25,1$ rad/s, nên $a_n = \omega^2 r \approx 37,9$ m/s² và $a_t = \gamma r \approx 0,754$ m/s².

At $t = 2$ s: $\omega = \gamma t = 8\pi \approx 25.1$ rad/s, so $a_n = \omega^2 r \approx 37.9$ m/s² and $a_t = \gamma r \approx 0.754$ m/s².

$$a = \sqrt{(a_n^2 + a_t^2)}, \quad \tan \varphi = a_t/a_n$$

Vậy $\gamma = 4\pi \approx 12,6$ rad/s², đĩa quay 16 vòng, $a \approx 37,9$ m/s² và $\varphi \approx 1,14^\circ$ so với bán kính: ở thời điểm này gia tốc gần như hướng tâm.

Hence $\gamma = 4\pi \approx 12.6$ rad/s², the disc turns 16 times, $a \approx 37.9$ m/s² and $\varphi \approx 1.14^\circ$ from the radius: at this instant the acceleration is almost purely centripetal. ■

NHẬN XÉT / REMARK — a_t không đổi, còn a_n tăng theo t^2 . Lúc mới quay gia tốc nằm gần tiếp tuyến, sau đó nghiêng dần về phía tâm.

a_t is constant while a_n grows as t^2 . At the start the acceleration lies close to the tangent and then tilts steadily towards the centre.

VÍ DỤ 4.3 (Hai thành phần gia tốc bằng nhau) / EXAMPLE 4.3 (Equal acceleration components) — Chất điểm chuyển động trên đường tròn bán kính 0,8 m, xuất phát từ nghỉ với gia tốc góc không đổi 0,25 rad/s². Sau bao lâu gia tốc toàn phần hợp với vận tốc góc 45°?

Khi đó chất điểm đã quay một góc bao nhiêu, tốc độ và gia tốc bằng bao nhiêu?

A particle moves on a circle of radius 0.8 m, starting from rest with constant angular acceleration 0.25 rad/s². When does the total acceleration make 45° with the velocity? Through what angle has the particle turned by then, and what are its speed and acceleration?

Lời giải. / Solution.

Vận tốc nằm theo tiếp tuyến, gia tốc a_t cũng theo tiếp tuyến còn a_n vuông góc với vận tốc. Gia tốc hợp 45° với vận tốc khi hai thành phần bằng nhau:

The velocity is tangent and a_t is tangent too, while a_n is perpendicular to the velocity. The acceleration makes 45° with the velocity when the two components are equal:

$$a_n = a_t \Leftrightarrow (\gamma t)^2 r = \gamma r \Leftrightarrow t = 1/\sqrt{\gamma}$$

Với $\gamma = 0,25$ rad/s²: $t = 2$ s. Góc quay $\theta = \gamma t^2/2 = 0,5$ rad $\approx 28,6^\circ$, không phụ thuộc bán kính.

With $\gamma = 0.25$ rad/s²: $t = 2$ s. The angle turned is $\theta = \gamma t^2/2 = 0.5$ rad $\approx 28.6^\circ$, independent of the radius.

Tốc độ $v = \gamma r t = 0,25 \cdot 0,8 \cdot 2 = 0,4$ m/s; $a_t = \gamma r = 0,2$ m/s² nên $a = a_t \sqrt{2} \approx 0,283$ m/s².

The speed is $v = \gamma r t = 0.25 \cdot 0.8 \cdot 2 = 0.4 \text{ m/s}$; $a_t = \gamma r = 0.2 \text{ m/s}^2$, so $a = a_t \sqrt{2} \approx 0.283 \text{ m/s}^2$.

Vậy sau 2 s, khi chất điểm quay được 0,5 rad, gia tốc toàn phần hợp 45° với vận tốc, tốc độ 0,4 m/s, gia tốc 0,283 m/s².

Hence after 2 s, when the particle has turned 0.5 rad, the total acceleration makes 45° with the velocity; the speed is 0.4 m/s and the acceleration 0.283 m/s². ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng $a = v^2/r$ cho gia tốc toàn phần khi tốc độ đang thay đổi: v^2/r chỉ là a_n . Quên $a_t = \gamma r$ làm sai độ lớn và hướng của $\vec{a}$.

Using $a = v^2/r$ for the total acceleration while the speed is changing: v^2/r is only a_n . Leaving out $a_t = \gamma r$ gives the wrong magnitude and direction of $\vec{a}$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thay số vòng/phút hoặc độ vào $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ mà không đổi sang rad/s: sai hệ số $2\pi/60$ hoặc $\pi/180$ ở mọi kết quả sau đó.

Putting rev/min or degrees into $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ without converting to rad/s: every later result is off by the factor $2\pi/60$ or $\pi/180$.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — $a_n = v^2/r = \omega^2 r$ hướng vào tâm; $a_t = \gamma r$ dọc tiếp tuyến; $a = \sqrt{(a_n^2 + a_t^2)}$.

$a_n = v^2/r = \omega^2 r$ towards the centre; $a_t = \gamma r$ along the tangent; $a = \sqrt{(a_n^2 + a_t^2)}$.

4.3. Bán kính cong của quỹ đạo — Radius of curvature of a path

Quỹ đạo không tròn (parabol của vật ném, cycloid của điểm trên vành bánh xe) vẫn dùng được công thức của chuyển động tròn, nếu mỗi điểm của quỹ đạo được thay bằng cung tròn ôm sát quỹ đạo tại điểm đó.

A path that is not a circle (the parabola of a projectile, the cycloid of a rim point) can still use the circular-motion formulas, provided each point of the path is replaced by the circular arc that hugs the path at that point.

ĐỊNH NGHĨA 4.7 (Bán kính cong) / DEFINITION 4.7 (Radius of curvature) — Đường tròn mật tiếp của quỹ đạo tại điểm M là giới hạn của đường tròn đi qua M và hai điểm khác của quỹ đạo khi hai điểm đó dần tới M. Bán kính của nó là bán kính cong R của quỹ đạo tại M.

The osculating circle of a path at a point M is the limit of the circle through M and two other points of the path as those two points tend to M. Its radius is the radius of curvature R of the path at M.

ĐỊNH LÝ 4.8 (Gia tốc pháp tuyến và bán kính cong) / THEOREM 4.8 (Normal acceleration and radius of curvature) — Tại mỗi điểm của quỹ đạo, thành phần của gia tốc vuông góc với vận tốc (gia tốc pháp tuyến) bằng $a_n = v^2/R$, với R là bán kính cong tại điểm đó. Từ đó $R = v^2/a_n$.

At each point of a path, the component of acceleration perpendicular to the velocity (the normal acceleration) equals $a_n = v^2/R$, where R is the radius of curvature at that point. Hence $R = v^2/a_n$.

Chứng minh. / Proof.

Trong khoảng thời gian rất ngắn vật chuyển động trên cung đường tròn mật tiếp, hướng vận tốc quay đúng như trên đường tròn đó. Phần gia tốc làm đổi hướng vận tốc là thành phần vuông góc với $\vec{v}$, và theo định lý 4.4 áp dụng cho đường tròn mật tiếp nó bằng v^2/R .

Over a very short time the body moves on an arc of the osculating circle, and the direction of its velocity turns exactly as on that circle. The part of the acceleration that turns the velocity is the component perpendicular to $\vec{v}$, and by theorem 4.4 applied to the osculating circle it equals v^2/R .

$$R = v^2/a_n \quad (4.8)$$

Lập luận này là trực quan: phép chứng minh chặt chẽ cần giới hạn của hàm số, nằm ngoài chương trình lớp 10.

The argument is intuitive: a rigorous proof needs limits of functions, beyond the Year 10 course.



Cách dùng: phân tích gia tốc $\vec{a}$ thành thành phần dọc và vuông góc với $\vec{v}$. Nếu $\vec{a}$ hợp với $\vec{v}$ góc β thì $a_n = a \sin \beta$. Với vật chỉ chịu trọng lực, $\vec{a} = \vec{g}$ và $a_n = g \cos \theta$, với θ là góc giữa $\vec{v}$ và phương ngang.

Method: resolve $\vec{a}$ along and perpendicular to $\vec{v}$. If $\vec{a}$ makes an angle β with $\vec{v}$, then $a_n = a \sin \beta$. For a body under gravity alone, $\vec{a} = \vec{g}$ and $a_n = g \cos \theta$, where θ is the angle between $\vec{v}$ and the horizontal.

HỆ QUẢ 4.9 / COROLLARY 4.9 — Vật ném xiên với vận tốc đầu v_0 hợp góc α với phương ngang có bán kính cong $R_1 = v_0^2 \cos^2 \alpha / g$ tại đỉnh quỹ đạo, $R_2 = v_0^2 / (g \cos \alpha)$ tại điểm ném, và tại điểm vận tốc hợp góc θ với phương ngang thì $R = R_1 / \cos^3 \theta$.

A projectile launched with speed v_0 at angle α to the horizontal has radius of curvature $R_1 = v_0^2 \cos^2 \alpha / g$ at the top, $R_2 = v_0^2 / (g \cos \alpha)$ at launch, and $R = R_1 / \cos^3 \theta$ where the velocity makes angle θ with the horizontal.

Chứng minh. / Proof.

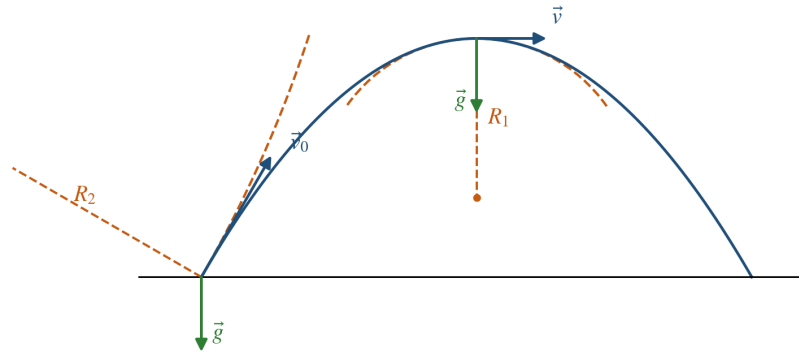
Thành phần ngang của vận tốc không đổi: $v \cos \theta = v_0 \cos \alpha$. Gia tốc chỉ là g thẳng đứng nên $a_n = g \cos \theta$.

The horizontal component of velocity is constant: $v \cos \theta = v_0 \cos \alpha$. The acceleration is just g , vertical, so $a_n = g \cos \theta$.

$$R = v^2 / (g \cos \theta) = (v_0 \cos \alpha)^2 / (g \cos^3 \theta) \quad (4.9)$$

Tại đỉnh $\theta = 0$ cho R_1 ; tại điểm ném $\theta = \alpha$ cho $R_2 = R_1 / \cos^3 \alpha = v_0^2 / (g \cos \alpha)$.

At the top $\theta = 0$ gives R_1 ; at launch $\theta = \alpha$ gives $R_2 = R_1 / \cos^3 \alpha = v_0^2 / (g \cos \alpha)$. ■



Hình 4.3. Vật ném xiên 20 m/s, 60°: cung tròn mật tiếp tại đỉnh (R_1) và tại điểm ném (R_2)
Figure 4.3. Projectile at 20 m/s, 60°: osculating arcs at the top (R_1) and at launch (R_2)

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề hỏi bán kính cong thì tìm hai đại lượng tại đúng điểm đó: tốc độ v (từ bảo toàn thành phần ngang hoặc bảo toàn cơ năng) và thành phần của g vuông góc với $\vec{v}$. Tại đỉnh $\vec{v}$ nằm ngang nên toàn bộ g là pháp tuyến; tại điểm ném chỉ $g \cos \alpha$ là pháp tuyến.

For a radius of curvature find two quantities at that very point: the speed v (from the constant horizontal component or from energy conservation) and the component of g perpendicular to $\vec{v}$. At the top $\vec{v}$ is horizontal, so all of g is normal; at launch only $g \cos \alpha$ is normal.

VÍ DỤ 4.4 (Bán kính cong tại đỉnh và tại điểm ném) / EXAMPLE 4.4 (Radius of curvature at top and launch) — Vật ném xiên từ mặt đất với $v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 60^\circ$, $g = 9,8$ m/s². Tính bán kính cong của quỹ đạo tại đỉnh và tại điểm ném, và tỉ số hai bán kính.
A body is thrown from the ground with $v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 60^\circ$, $g = 9.8$ m/s². Find the radius of curvature of the path at the top and at launch, and the ratio of the two radii.

Lời giải. / Solution.

Tại đỉnh: $v = v_0 \cos \alpha = 10$ m/s, $\vec{v}$ nằm ngang, $a_n = g$.

At the top: $v = v_0 \cos \alpha = 10$ m/s, $\vec{v}$ is horizontal, $a_n = g$.

$$R_1 = v^2/g = (v_0 \cos \alpha)^2/g$$

$$R_1 = 100/9,8 \approx 10,2 \text{ m.}$$

$$R_1 = 100/9.8 \approx 10.2 \text{ m.}$$

Tại điểm ném: $v = 20$ m/s. Vector $\vec{v}_0$ hợp với phương ngang 60° , nên $\vec{g}$ có thành phần $g \cos 60^\circ$ vuông góc với $\vec{v}_0$ và $g \sin 60^\circ$ dọc theo nó. Thành phần vuông góc là gia tốc pháp tuyến:

At launch: $v = 20$ m/s. The vector $\vec{v}_0$ is 60° above the horizontal, so $\vec{g}$ has a component $g \cos 60^\circ$ perpendicular to $\vec{v}_0$ and $g \sin 60^\circ$ along it. The perpendicular component is the normal acceleration:

$$R_2 = v_0^2/(g \cos \alpha)$$

$$R_2 = 400/(9,8 \cdot 0,5) \approx 81,6 \text{ m.}$$

$$R_2 = 400/(9.8 \cdot 0.5) \approx 81.6 \text{ m.}$$

Tỉ số $R_2/R_1 = 1/\cos^3 60^\circ = 8$.

The ratio is $R_2/R_1 = 1/\cos^3 60^\circ = 8$.

Vậy bán kính cong tại đỉnh khoảng 10,2 m, tại điểm ném khoảng 81,6 m, lớn gấp 8 lần.

Hence the radius of curvature is about 10.2 m at the top and about 81.6 m at launch, 8 times larger. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Quỹ đạo cong nhất ở đỉnh và thẳng dần khi đi xa đỉnh, vì $R = R_1/\cos^3\theta$ chỉ tăng khi θ tăng. Ném ngang ($\alpha = 0$) cho $R_1 = R_2 = v_0^2/g$.

The path is most sharply curved at the top and straightens away from it, since $R = R_1/\cos^3\theta$ only grows as θ grows. A horizontal throw ($\alpha = 0$) gives $R_1 = R_2 = v_0^2/g$.

VÍ DỤ 4.5 (Bán kính cong tại điểm giữa chừng) / EXAMPLE 4.5 (Radius of curvature at an intermediate point) — Cùng vật ném ở Ví dụ 4.4 ($v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 60^\circ$). Tính bán kính cong tại điểm vật ở độ cao bằng một nửa độ cao cực đại, trên đường đi lên.

The same projectile as in Example 4.4 ($v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 60^\circ$). Find the radius of curvature at the point on the way up where the height is half the maximum height.

Lời giải. / Solution.

Độ cao cực đại $H = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$. Tại độ cao $H/2$ thành phần thẳng đứng thỏa $v_y^2 = v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g \cdot H/2 = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2$.

The maximum height is $H = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$. At height $H/2$ the vertical component satisfies $v_y^2 = v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g \cdot H/2 = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2$.

$$v^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha / 2 = 100 + 150 = 250$$

Vậy $v \approx 15,8$ m/s và $\cos \theta = v_0 \cos \alpha / v = 10/15,8 \approx 0,632$ ($\theta \approx 50,8^\circ$), $a_n = g \cos \theta \approx 6,20$ m/s².

So $v \approx 15.8$ m/s and $\cos \theta = v_0 \cos \alpha / v = 10/15.8 \approx 0.632$ ($\theta \approx 50.8^\circ$), $a_n = g \cos \theta \approx 6.20$ m/s².

$$R = v^2 / a_n = 250 / 6,20$$

Vậy $R \approx 40,3$ m, nằm giữa 10,2 m ở đỉnh và 81,6 m ở điểm ném.

Hence $R \approx 40.3$ m, between 10.2 m at the top and 81.6 m at launch. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy $a_n = g$ tại mọi điểm của quỹ đạo ném xiên: chỉ đúng ở đỉnh, nơi $\vec{g}$ vuông góc với $\vec{v}$. Ở điểm khác phải lấy $g \cos \theta$.

Taking $a_n = g$ at every point of a projectile path: that is true only at the top, where $\vec{g}$ is perpendicular to $\vec{v}$. Elsewhere use $g \cos \theta$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng v_0 thay cho v tại điểm giữa quỹ đạo: tốc độ thay đổi theo độ cao, $v^2 = v_0^2 - 2gh$.

Using v_0 in place of v at an intermediate point: the speed changes with height, $v^2 = v_0^2 - 2gh$.

4.4. Chuyển động của vật rắn: tịnh tiến, quay, công thức cộng vận tốc — *Rigid-body motion: translation, rotation, velocity addition*

Từ đây chỉ xét chuyển động phẳng: mọi điểm của vật chuyển động trong các mặt phẳng song song nhau, nên vẽ vật như một hình phẳng.

From here on only plane motion is considered: every point of the body moves in parallel planes, so the body can be drawn as a plane figure.

ĐỊNH NGHĨA 4.10 (Vật rắn, tịnh tiến) / DEFINITION 4.10 (Rigid body, translation) — Vật rắn là vật mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó không đổi trong suốt chuyển động. Vật chuyển động tịnh tiến khi mọi đoạn thẳng nối hai điểm của vật luôn song song với chính nó ở vị trí đầu; khi đó mọi điểm có cùng vận tốc và cùng gia tốc.

A rigid body is one in which the distance between any two of its points stays constant. A body is in translation when every line joining two of its points stays parallel to its initial position; then all points have the same velocity and acceleration.

ĐỊNH LÝ 4.11 (Công thức cộng vận tốc của vật rắn) / THEOREM 4.11 (Velocity addition in a rigid body) — Với hai điểm A, B bất kỳ của vật rắn, $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, trong đó $\vec{v}_{BA}$ vuông góc với AB và có độ lớn $\omega \cdot AB$. Tốc độ góc ω là tốc độ quay của đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của vật, có cùng giá trị với mọi cặp điểm.

For any two points A, B of a rigid body, $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, where $\vec{v}_{BA}$ is perpendicular to AB with magnitude $\omega \cdot AB$. The angular speed ω is the rate at which the line joining any two points of the body turns, and it has the same value for every pair.

Chứng minh. / Proof.

Xét hệ quy chiếu tịnh tiến cùng điểm A (không quay). Trong hệ này khoảng cách AB không đổi nên B chỉ có thể chuyển động trên đường tròn tâm A, bán kính AB, với tốc độ góc ω của đoạn AB. Theo định lý 4.3 vận tốc của B trong hệ này là $\vec{v}_{BA}$, vuông góc với AB, độ lớn $\omega \cdot AB$.

Take a frame that translates with A and does not rotate. In it the distance AB is fixed, so B can only move on the circle of centre A and radius AB, at the angular speed ω of the segment AB. By theorem 4.3 the velocity of B in this frame is $\vec{v}_{BA}$, perpendicular to AB, of magnitude $\omega \cdot AB$.

Cộng vận tốc của hệ quy chiếu ($\vec{v}_A$) với vận tốc trong hệ ($\vec{v}_{BA}$) theo phép cộng Galileo (Chương 3):

Add the velocity of the frame ($\vec{v}_A$) to the velocity within it ($\vec{v}_{BA}$) by Galilean addition (Chapter 3):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad v_{BA} = \omega \cdot AB \quad (4.10)$$

Hai đoạn thẳng khác nhau của vật hợp thành tam giác cứng, góc giữa chúng không đổi nên chúng quay cùng tốc độ: ω chỉ có một giá trị.

Two different segments of the body form a rigid triangle whose angles stay fixed, so they turn at the same rate: ω has a single value. ■

HỆ QUẢ 4.12 (Định lý hình chiếu vận tốc) / COROLLARY 4.12 (Projection theorem for velocities) — Hình chiếu của $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$ lên đường thẳng AB bằng nhau. Nếu $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$ hợp với AB các góc α, β thì $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$.

The projections of $\vec{v}_A$ and $\vec{v}_B$ onto the line AB are equal. If $\vec{v}_A$ and $\vec{v}_B$ make angles α, β with AB then $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$.

Chứng minh. / Proof.

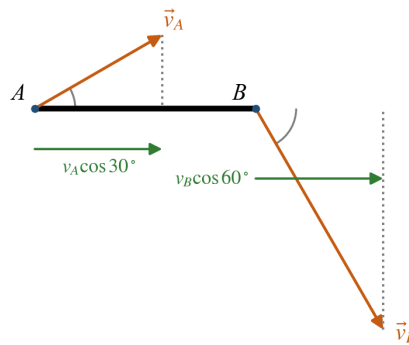
$\vec{v}_{BA}$ vuông góc với AB nên hình chiếu của nó lên AB bằng 0. Chiếu (4.10) lên AB:

$\vec{v}_{BA}$ is perpendicular to AB, so its projection onto AB is 0. Project (4.10) onto AB:

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha \quad (4.11)$$

Đây là điều kiện để thanh không bị nén hay dãn dọc theo chiều dài của nó.

This is the condition that the rod is neither compressed nor stretched along its length. ■



Hình 4.4. Hình chiếu của hai vận tốc lên thanh AB bằng nhau

Figure 4.4. Projections of the two velocities onto AB are equal

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho phương của vận tốc hai điểm và độ lớn một vận tốc: dùng (4.11) để tìm độ lớn còn lại, rồi lấy thành phần vuông góc với AB để suy ra ω . Hai thành phần vuông góc cùng phía thì trừ nhau, khác phía thì cộng nhau.

Given the directions of two velocities and the magnitude of one: use (4.11) for the other magnitude, then take the components perpendicular to AB to get ω . Perpendicular components on the same side subtract; on opposite sides they add.

VÍ DỤ 4.6 (Hình chiếu vận tốc lên thanh) / EXAMPLE 4.6 (Projecting velocities onto the rod) — Thanh AB dài 1,5 m chuyển động phẳng. Vận tốc đầu A có độ lớn 3 m/s, hợp với AB góc 30° và hướng lên trên đường AB; vận tốc đầu B hợp với AB góc 60° và hướng xuống dưới đường AB, cùng phía tiến ra xa A (Hình 4.4). Tính v_B , tốc độ góc của thanh và tốc độ trung điểm M.

Rod AB, 1.5 m long, moves in a plane. The velocity of end A has magnitude 3 m/s, makes 30° with AB and points above line AB; the velocity of end B makes 60° with AB and points below line AB, both leaning forward away from A (Figure 4.4). Find v_B , the angular speed of the rod and the speed of the midpoint M.

Lời giải. / Solution.

Chiếu lên AB theo (4.11):

Project onto AB using (4.11):

$$v_B = v_A \cos 30^\circ / \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ (m/s)}$$

Vậy $v_B \approx 5,20$ m/s. Thành phần vuông góc với AB: của A là $3 \sin 30^\circ = 1,5$ m/s (lên), của B là $v_B \sin 60^\circ = 4,5$ m/s (xuống).

So $v_B \approx 5.20$ m/s. The components perpendicular to AB: for A it is $3 \sin 30^\circ = 1.5$ m/s (up), for B it is $v_B \sin 60^\circ = 4.5$ m/s (down).

Hai thành phần ngược phía nên vận tốc tương đối của B đối với A là $1,5 + 4,5 = 6$ m/s, suy ra $\omega = 6/1,5 = 4$ rad/s.

They are on opposite sides, so the velocity of B relative to A is $1.5 + 4.5 = 6$ m/s, giving $\omega = 6/1.5 = 4$ rad/s.

Vận tốc trung điểm bằng trung bình hai đầu: $\vec{v}_M = (\vec{v}_A + \vec{v}_B)/2$. Thành phần dọc AB là $3 \cos 30^\circ \approx 2,598$ m/s, thành phần vuông góc là $(1,5 - 4,5)/2 = -1,5$ m/s.

The midpoint velocity is the mean of the end velocities: $\vec{v}_M = (\vec{v}_A + \vec{v}_B)/2$. Its component along AB is $3 \cos 30^\circ \approx 2.598$ m/s and its perpendicular component is $(1.5 - 4.5)/2 = -1.5$ m/s.

Vậy $v_M = \sqrt{(2,598^2 + 1,5^2)} = 3,0$ m/s, $v_B \approx 5,20$ m/s và $\omega = 4$ rad/s.

Hence $v_M = \sqrt{(2.598^2 + 1.5^2)} = 3.0$ m/s, $v_B \approx 5.20$ m/s and $\omega = 4$ rad/s. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Trung điểm có vận tốc trung bình của hai đầu vì $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \omega \times \vec{AM}$ theo (4.10), mà phần quay của M bằng một nửa phần quay của B. Kết quả đúng với mọi điểm chia thanh theo tỉ lệ cho trước.

The midpoint has the mean velocity of the ends because, by (4.10), the rotational part for M is half that for B. The same holds for any point dividing the rod in a fixed ratio.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho vận tốc hai đầu thanh bằng nhau về độ lớn rồi kết luận thanh tịnh tiến: thanh tịnh tiến chỉ khi hai vận tốc bằng nhau cả về hướng.

Concluding that a rod translates because its ends have equal speeds: it translates only when the two velocities are equal in direction as well.

4.5. Tâm quay tức thời — The instantaneous centre of rotation

Công thức (4.10) đơn giản nhất khi chọn điểm gốc có vận tốc bằng 0. Điểm như vậy luôn có trong chuyển động phẳng của vật rắn đang quay.

Formula (4.10) is simplest when the reference point has zero velocity. Such a point always exists in the plane motion of a turning rigid body.

ĐỊNH NGHĨA 4.13 (Tâm quay tức thời) / DEFINITION 4.13 (Instantaneous centre of rotation) — Tâm quay tức thời P của vật rắn tại một thời điểm là điểm (gắn với vật, có thể nằm ngoài hình vẽ của vật) có vận tốc bằng 0 tại thời điểm đó.

The instantaneous centre of rotation P of a rigid body at a given instant is the point (attached to the body, possibly outside its drawn outline) whose velocity is zero at that instant.

ĐỊNH LÝ 4.14 (Tồn tại và cách xác định tâm quay tức thời) / THEOREM 4.14

(Existence and construction of the instantaneous centre) — Nếu $\omega \neq 0$ thì tại mỗi thời điểm có đúng một tâm quay tức thời P, và vận tốc mọi điểm M của vật vuông góc với PM, $v_M = \omega \cdot PM$. P nằm trên đường vuông góc với vận tốc kẻ từ mỗi điểm, nên là giao điểm của hai đường vuông góc đó.

If $\omega \neq 0$ there is exactly one instantaneous centre P at each instant, and the velocity of every point M is perpendicular to PM , $v_M = \omega \cdot PM$. P lies on the perpendicular to the velocity drawn from each point, so it is the intersection of two such perpendiculars.

Chứng minh. / Proof.

Lấy điểm A có vận tốc $\vec{v}_A \neq 0$. Chọn điểm P gần với vật, nằm trên đường vuông góc với $\vec{v}_A$ kẻ từ A , cách A đoạn v_A/ω , về phía sao cho $\vec{v}_{PA}$ (vuông góc với AP , độ lớn $\omega \cdot AP$) ngược chiều với $\vec{v}_A$. Theo (4.10):

Take a point A with velocity $\vec{v}_A \neq 0$. Choose the point P of the body on the perpendicular to $\vec{v}_A$ through A , at distance v_A/ω from A , on the side where $\vec{v}_{PA}$ (perpendicular to AP , of magnitude $\omega \cdot AP$) is opposite to $\vec{v}_A$. By (4.10):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0$$

Nếu có điểm thứ hai Q cũng đứng yên thì $0 = \vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{v}_{QP} = \vec{v}_{QP}$ có độ lớn $\omega \cdot PQ \neq 0$, vô lý; vậy P duy nhất. Lấy P làm điểm gốc trong (4.10) cho $\vec{v}_M = \vec{v}_{MP}$, vuông góc với PM và có độ lớn:

If a second point Q were also at rest then $0 = \vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{v}_{QP} = \vec{v}_{QP}$ would have magnitude $\omega \cdot PQ \neq 0$, a contradiction; so P is unique. Taking P as the reference point in (4.10) gives $\vec{v}_M = \vec{v}_{MP}$, perpendicular to PM , of magnitude:

$$v_M = \omega \cdot PM \tag{4.12}$$

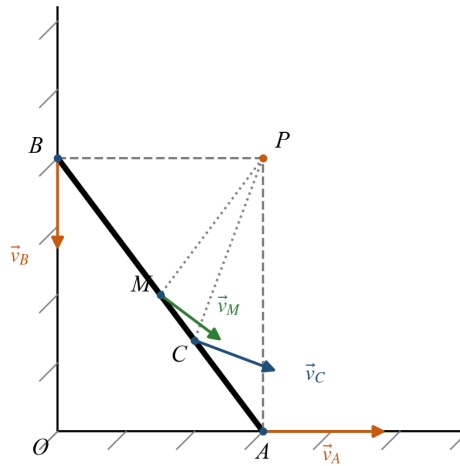
■

Khi $\omega = 0$ (tịnh tiến tức thời) hai đường vuông góc với các vận tốc song song nhau và P ở xa vô cùng. Vận tốc của P bằng 0 chỉ ở thời điểm đang xét: gia tốc của P nói chung khác 0, và P đổi chỗ trên vật theo thời gian.

When $\omega = 0$ (instantaneous translation) the perpendiculars to the parallel velocities are parallel and P is at infinity. The velocity of P is zero only at the instant considered: the acceleration of P is in general not zero, and P moves over the body in time.

Cách làm: (1) vẽ $\vec{v}$ của hai điểm đã biết phương; (2) kẻ hai đường vuông góc với chúng, giao nhau tại P ; (3) $\omega = v/PA$ từ điểm có v biết; (4) vận tốc điểm bất kỳ M có phương vuông góc PM và độ lớn $\omega \cdot PM$.

Method: (1) draw the known directions of $\vec{v}$ at two points; (2) draw the perpendiculars to them, meeting at P ; (3) $\omega = v/PA$ from the point whose speed is known; (4) the velocity of any point M is perpendicular to PM with magnitude $\omega \cdot PM$.



Hình 4.5. Thanh AB trượt giữa sàn và tường: tâm quay tức thời P là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật OAPB

Figure 4.5. Rod AB sliding between floor and wall: the instantaneous centre P is the fourth vertex of rectangle OAPB

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai đầu thanh chạy trên hai đường thẳng vuông góc nên phương vận tốc của A và B đã biết (dọc sàn, dọc tường). Hai đường vuông góc với chúng đi qua A và B cắt nhau tại P, làm OAPB thành hình chữ nhật. Vận tốc mỗi điểm khác của thanh chỉ cần khoảng cách từ điểm đó tới P.

The ends of the rod run on two perpendicular lines, so the directions of $\vec{v}_A$ and $\vec{v}_B$ are known (along the floor, along the wall). The perpendiculars to them through A and B meet at P, making OAPB a rectangle. The velocity of any other point of the rod needs only its distance to P.

VÍ DỤ 4.7 (Tâm quay tức thời của thanh trượt) / EXAMPLE 4.7 (Instantaneous centre of a sliding rod) — Thanh AB dài 2,5 m, đầu A trượt trên sàn ngang, đầu B trượt trên tường thẳng đứng. Đầu A chạy ra xa tường với tốc độ 0,9 m/s. Khi thanh hợp với sàn góc α có $\cos \alpha = 0,6$, tính tốc độ góc của thanh, tốc độ đầu B, tốc độ trung điểm M, và tốc độ điểm C cách A một phần ba chiều dài thanh.

Rod AB, 2.5 m long, has end A sliding on a horizontal floor and end B on a vertical wall. End A moves away from the wall at 0.9 m/s. When the rod makes an angle α with the floor such that $\cos \alpha = 0.6$, find the angular speed of the rod, the speed of end B, the speed of the midpoint M, and the speed of the point C one third of the way from A to B.

Lời giải. / Solution.

Chọn O là chân tường. $A = (\ell \cos \alpha, 0) = (1,5; 0)$ m, $B = (0; \ell \sin \alpha) = (0; 2,0)$ m. Tâm quay tức thời $P = (1,5; 2,0)$ m, đỉnh thứ tư của hình chữ nhật OAPB.

Let O be the foot of the wall. $A = (\ell \cos \alpha, 0) = (1.5, 0)$ m, $B = (0, \ell \sin \alpha) = (0, 2.0)$ m. The instantaneous centre is $P = (1.5, 2.0)$ m, the fourth vertex of rectangle OAPB.

$PA = \ell \sin \alpha = 2,0$ m, $PB = \ell \cos \alpha = 1,5$ m. Tốc độ góc và tốc độ đầu B:

$PA = \ell \sin \alpha = 2.0$ m, $PB = \ell \cos \alpha = 1.5$ m. The angular speed and the speed of end B:

$$\omega = v_A/PA, \quad v_B = \omega \cdot PB$$

Vậy $\omega = 0,9/2,0 = 0,45 \text{ rad/s}$ và $v_B = 0,45 \cdot 1,5 = 0,675 \text{ m/s}$ (B đi xuống).

So $\omega = 0.9/2.0 = 0.45 \text{ rad/s}$ and $v_B = 0.45 \cdot 1.5 = 0.675 \text{ m/s}$ (B moves down).

Trung điểm M là tâm của hình chữ nhật OAPB, nên $PM = AB/2 = 1,25 \text{ m}$ và $v_M = 0,45 \cdot 1,25 \approx 0,563 \text{ m/s}$.

The midpoint M is the centre of rectangle OAPB, so $PM = AB/2 = 1.25 \text{ m}$ and $v_M = 0.45 \cdot 1.25 \approx 0.563 \text{ m/s}$.

Điểm C = A + (B - A)/3 = (1,0; 0,667) m, nên $PC = \sqrt{(0,5^2 + 1,333^2)} \approx 1,424 \text{ m}$ và $v_C = 0,45 \cdot 1,424 \approx 0,641 \text{ m/s}$.

The point C = A + (B - A)/3 = (1.0, 0.667) m, so $PC = \sqrt{(0.5^2 + 1.333^2)} \approx 1.424 \text{ m}$ and $v_C = 0.45 \cdot 1.424 \approx 0.641 \text{ m/s}$.

Vậy $\omega = 0,45 \text{ rad/s}$, $v_B = 0,675 \text{ m/s}$, $v_M \approx 0,563 \text{ m/s}$, $v_C \approx 0,641 \text{ m/s}$; $\vec{v}_M$ và $\vec{v}_C$ vuông góc với PM và PC.

Hence $\omega = 0.45 \text{ rad/s}$, $v_B = 0.675 \text{ m/s}$, $v_M \approx 0.563 \text{ m/s}$, $v_C \approx 0.641 \text{ m/s}$; $\vec{v}_M$ and $\vec{v}_C$ are perpendicular to PM and PC. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Quỹ tích của P khi thanh trượt là cung tròn tâm O bán kính ℓ , vì $OP = AB = \ell$ (hai đường chéo hình chữ nhật). Tâm quay tức thời P có vận tốc 0 chỉ tại thời điểm đang xét; ở thời điểm khác nó là một điểm khác của thanh.

The locus of P as the rod slides is an arc of the circle of centre O and radius ℓ , since $OP = AB = \ell$ (the diagonals of a rectangle). The instantaneous centre P has zero velocity only at the instant considered; at other times it is a different point of the rod.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho rằng gia tốc của tâm quay tức thời bằng 0 vì vận tốc của nó bằng 0. Vận tốc bằng 0 chỉ tại một thời điểm; gia tốc của P nói chung khác 0.

Assuming the acceleration of the instantaneous centre is zero because its velocity is zero. The velocity vanishes only at one instant; the acceleration of P is generally not zero.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Con lăn kẹp giữa hai ván có hai điểm tiếp xúc, vận tốc của chúng chính là vận tốc hai ván nếu con lăn không trượt. Hai điểm này nằm trên cùng một đường kính, vận tốc song song nhau: tâm quay tức thời nằm trên đường kính đó, tại chỗ nối hai đầu mút vector vận tốc.

A roller squeezed between two boards has two contact points, and if it does not slip their velocities equal those of the boards. These points lie on one diameter with parallel velocities: the instantaneous centre lies on that diameter, where the line through the tips of the two velocity vectors cuts it.

VÍ DỤ 4.8 (Con lăn giữa hai ván) / EXAMPLE 4.8 (Roller between two boards) — Con lăn bán kính 5 cm kẹp giữa hai ván nằm ngang song song. Ván trên chuyển động sang phải với 0,8 m/s, ván dưới chuyển động sang trái với 0,2 m/s, con lăn không trượt trên cả hai ván (Hình 4.6). Tính vận tốc tâm con lăn, tốc độ góc, và vị trí tâm quay tức thời.

A roller of radius 5 cm is squeezed between two parallel horizontal boards. The upper board moves right at 0.8 m/s, the lower board moves left at 0.2 m/s, and the roller does not slip on either board (Figure 4.6). Find the velocity of the roller's centre, its angular speed, and the position of the instantaneous centre.

Lời giải. / Solution.

Chọn chiều dương sang phải. Điểm trên của con lăn có vận tốc $v_1 = +0,8$ m/s, điểm dưới có $v_2 = -0,2$ m/s. Theo (4.10) với O là tâm và con lăn quay thuận chiều kim đồng hồ với tốc độ góc ω :

Take right as positive. The top point of the roller has velocity $v_1 = +0.8$ m/s, the bottom point $v_2 = -0.2$ m/s. By (4.10) with O the centre and the roller turning clockwise at angular speed ω :

$$v_1 = v_0 + \omega R, \quad v_2 = v_0 - \omega R$$

Cộng hai phương trình: $v_0 = (v_1 + v_2)/2 = 0,3$ m/s sang phải. Trừ hai phương trình: $\omega = (v_1 - v_2)/(2R) = 1,0/0,10 = 10$ rad/s.

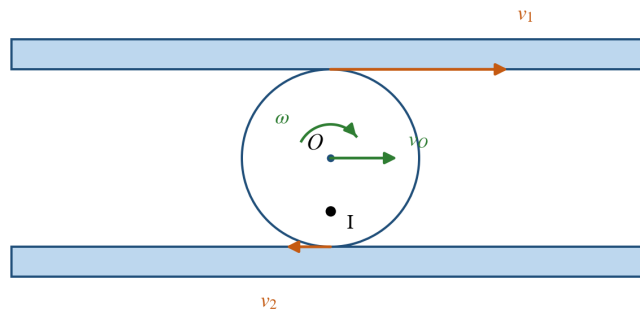
Adding the equations: $v_0 = (v_1 + v_2)/2 = 0.3$ m/s to the right. Subtracting: $\omega = (v_1 - v_2)/(2R) = 1.0/0.10 = 10$ rad/s.

Tâm quay tức thời nằm trên đường kính thẳng đứng, cách O đoạn $v_0/\omega = 0,03$ m = 3 cm về phía dưới, tức cách điểm tiếp xúc dưới 2 cm.

The instantaneous centre lies on the vertical diameter at a distance $v_0/\omega = 0.03$ m = 3 cm below O, i.e. 2 cm above the lower contact point.

Kiểm: điểm dưới có tốc độ $\omega \cdot 2$ cm = 0,2 m/s sang trái; điểm trên có $\omega \cdot 8$ cm = 0,8 m/s sang phải. Vậy tâm con lăn đi sang phải 0,3 m/s, $\omega = 10$ rad/s thuận chiều kim đồng hồ, tâm quay tức thời dưới tâm 3 cm.

Check: the lower point moves at $\omega \cdot 2$ cm = 0.2 m/s to the left; the upper point at $\omega \cdot 8$ cm = 0.8 m/s to the right. Hence the centre moves right at 0.3 m/s, $\omega = 10$ rad/s clockwise, and the instantaneous centre lies 3 cm below the centre. ■



Hình 4.6. Con lăn giữa hai ván: vận tốc các điểm tiếp xúc, tâm O và tâm quay tức thời I

Figure 4.6. Roller between two boards: contact velocities, centre O and instantaneous centre I

NHẬN XÉT / REMARK — Nếu hai ván cùng chuyển động cùng chiều với cùng tốc độ thì $\omega = 0$ và con lăn tịnh tiến. Nếu ván dưới đứng yên ($v_2 = 0$) thì tâm quay tức thời trùng điểm tiếp xúc dưới, $v_0 = v_1/2$, $\omega = v_1/(2R)$: đó là con lăn lăn không trượt trên mặt cố định.

If the two boards move in the same direction at the same speed then $\omega = 0$ and the roller translates. If the lower board is at rest ($v_2 = 0$) the instantaneous centre coincides with the lower contact point, $v_0 = v_1/2$ and $\omega = v_1/(2R)$: that is a roller rolling without slipping on a fixed surface.

4.6. Lăn không trượt và đường cycloid — Rolling without slipping and the cycloid

ĐỊNH NGHĨA 4.15 (Lăn không trượt) / DEFINITION 4.15 (Rolling without slipping) —

Bánh xe lăn không trượt trên một mặt khi điểm của bánh đang chạm mặt có vận tốc bằng vận tốc của mặt tại chỗ đó (bằng 0 nếu mặt đứng yên). Khi đó điểm tiếp xúc là tâm quay tức thời của bánh đối với mặt đứng yên.

A wheel rolls without slipping on a surface when the point of the wheel in contact has the same velocity as the surface at that place (zero if the surface is at rest). The contact point is then the instantaneous centre of the wheel relative to a fixed surface.

ĐỊNH LÝ 4.16 (Vận tốc tâm bánh lăn) / THEOREM 4.16 (Centre velocity of a rolling wheel) —

Bánh bán kính R lăn không trượt trên mặt đứng yên có vận tốc tâm $v_O = \omega R$ và gia tốc tâm $a_O = \gamma R$, với ω , γ là tốc độ góc và gia tốc góc của bánh.

A wheel of radius R rolling without slipping on a fixed surface has centre velocity $v_O = \omega R$ and centre acceleration $a_O = \gamma R$, where ω , γ are the angular speed and angular acceleration of the wheel.

Chứng minh. / Proof.

Trong thời gian Δt bánh quay góc $\Delta\theta$, cung $R\Delta\theta$ của vành lần lượt chạm mặt đất mà không trượt, nên tâm đi được đoạn đúng bằng độ dài cung đó, $\Delta s = R\Delta\theta$. Chia cho Δt rồi cho Δt dần tới 0:

In a time Δt the wheel turns by $\Delta\theta$, and the rim arc $R\Delta\theta$ is laid down on the ground without slipping, so the centre advances exactly that arc length, $\Delta s = R\Delta\theta$. Divide by Δt and let Δt tend to 0:

$$v_O = \omega R \quad (4.13)$$

Với R không đổi, độ biến thiên v_O trong Δt là $R\Delta\omega$, nên $a_O = \gamma R$.

With R fixed, the change of v_O in Δt is $R\Delta\omega$, so $a_O = \gamma R$. ■

HỆ QUẢ 4.17 / COROLLARY 4.17 — Điểm M của vành cách điểm tiếp xúc P một dây PM có vận tốc vuông góc PM , $v_M = \omega \cdot PM$. Gọi φ là góc quay của bánh kể từ lúc M chạm đất: $v_M = 2v_O \sin(\varphi/2)$. Điểm cao nhất có $v = 2v_O$, điểm ngang tâm có $v = \sqrt{2} \cdot v_O$, điểm tiếp xúc có $v = 0$.

A rim point M at chord PM from the contact point P has a velocity perpendicular to PM , $v_M = \omega \cdot PM$. With φ the angle the wheel has turned since M touched the ground: $v_M = 2v_O \sin(\varphi/2)$. The top point has $v = 2v_O$, the point level with the centre has $v = \sqrt{2} \cdot v_O$, and the contact point has $v = 0$.

Chứng minh. / Proof.

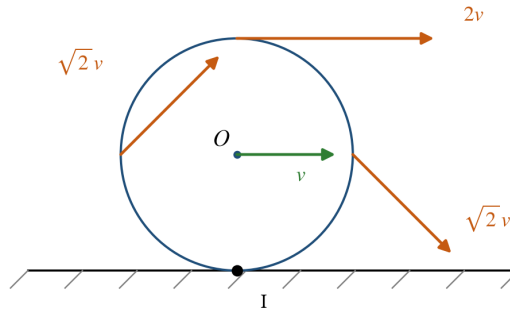
P là tâm quay tức thời nên áp dụng định lý 4.14. Tam giác OPM cân ($OP = OM = R$) với góc ở đỉnh O bằng φ , nên dây $PM = 2R \sin(\varphi/2)$.

P is the instantaneous centre, so theorem 4.14 applies. Triangle OPM is isosceles ($OP = OM = R$) with apex angle φ at O , so the chord $PM = 2R \sin(\varphi/2)$.

$$v_M = \omega \cdot 2R \sin(\varphi/2) = 2v_O \sin(\varphi/2) \quad (4.14)$$

Điểm cao nhất ứng với $\varphi = 180^\circ$, điểm ngang tâm ứng với $\varphi = 90^\circ$ ($\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$), điểm tiếp xúc ứng với $\varphi = 0$.

The top point corresponds to $\varphi = 180^\circ$, the point level with the centre to $\varphi = 90^\circ$ ($\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$), the contact point to $\varphi = 0$. ■



Hình 4.7. Vận tốc các điểm của bánh xe lăn đều không trượt; I là điểm tiếp xúc

Figure 4.7. Velocities of points of a wheel rolling uniformly without slipping; I is the contact point

TÍNH CHẤT 4.18 / PROPERTY 4.18 — Khi tâm bánh chuyển động thẳng đều (v_0 không đổi, $\gamma = 0$), mọi điểm trên vành có gia tốc hướng về tâm O, độ lớn $\omega^2 R$. Điểm đang tiếp xúc có $v = 0$ nhưng vẫn có gia tốc $\omega^2 R$ hướng thẳng lên.

When the centre moves uniformly in a straight line (v_0 constant, $\gamma = 0$), every rim point has an acceleration directed to the centre O, of magnitude $\omega^2 R$. The point in contact has $v = 0$ but still has acceleration $\omega^2 R$ pointing straight up.

Chứng minh. / Proof.

Trong hệ quy chiếu tịnh tiến cùng tâm O, hệ này chuyển động thẳng đều nên là quán tính (gia tốc bằng 0). Trong hệ đó vành quay đều quanh O với tốc độ góc ω , nên mọi điểm vành có gia tốc hướng tâm $\omega^2 R$ theo định lý 4.4. Gia tốc không đổi khi chuyển giữa hai hệ có gia tốc tương đối bằng 0.

In the frame translating with O, which moves uniformly and so is inertial (zero acceleration), the rim turns uniformly about O with angular speed ω , so every rim point has centripetal acceleration $\omega^2 R$ by theorem 4.4. Acceleration is unchanged between two frames whose relative acceleration is zero. ■

TÍNH CHẤT 4.19 (Đường cycloid) / PROPERTY 4.19 (The cycloid) — Điểm của vành bánh lăn không trượt vạch ra đường cycloid. Chọn gốc tại chỗ điểm đó chạm đất, trục x dọc mặt đất; khi bánh quay góc φ : $x = R(\varphi - \sin \varphi)$, $y = R(1 - \cos \varphi)$. Mỗi vòng quay cho một vòm rộng $2\pi R$, cao $2R$. Đường đi của điểm trong một vòm dài $8R$ (phát biểu, không chứng minh vì cần tích phân). Bán kính cong tại đỉnh vòm là $4R$; tại chỗ chạm đất đường cong có mũi nhọn thẳng đứng.

A rim point of a wheel rolling without slipping traces a cycloid. Take the origin where the point touches the ground and x along the ground; when the wheel has turned by φ : $x = R(\varphi - \sin \varphi)$, $y = R(1 - \cos \varphi)$. Each turn gives one arch, $2\pi R$ wide and $2R$ high. The path length of the point over one arch is $8R$ (stated without proof, as it needs integration). The radius of curvature at the top of the arch is $4R$; at the ground the curve has a vertical cusp.

Chứng minh. / Proof.

Tâm bánh ở độ cao R và đã đi được đoạn $R\varphi$ (cung lăn), nên $O = (R\varphi; R)$. Điểm M xoay thuận chiều kim đồng hồ φ so với phương thẳng đứng hướng xuống, tức $M - O = (-R \sin \varphi; -R \cos \varphi)$.

The centre is at height R and has advanced $R\varphi$ (the arc rolled), so $O = (R\varphi, R)$. The point M has turned clockwise by φ from the downward vertical, i.e. $M - O = (-R \sin \varphi, -R \cos \varphi)$.

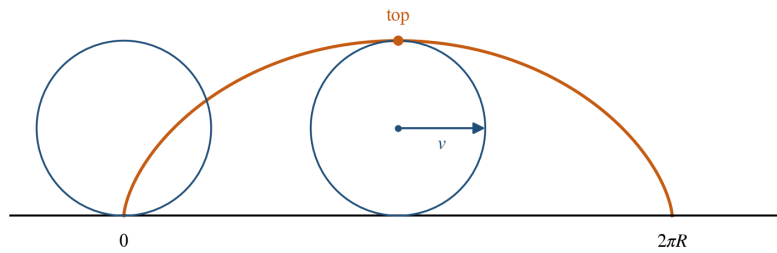
$$x = R\varphi - R \sin \varphi, \quad y = R - R \cos \varphi \quad (4.15)$$

Tại đỉnh ($\varphi = \pi$) tốc độ M là $2v_0$ nằm ngang và gia tốc $\omega^2 R$ thẳng đứng hướng xuống tâm (tính chất 4.18). Gia tốc vuông góc với vận tốc nên $a_n = \omega^2 R$, và bán kính cong:

At the top ($\varphi = \pi$) the speed of M is $2v_0$, horizontal, and the acceleration $\omega^2 R$ is vertical towards the centre (property 4.18). The acceleration is perpendicular to the velocity, so $a_n = \omega^2 R$ and the radius of curvature is:

$$R_c = (2v_0)^2 / (\omega^2 R) = 4R \quad (4.16)$$

■



Hình 4.8. Một vòm cycloid; hai vị trí của bánh ứng với $\varphi = 0$ và $\varphi = \pi$
Figure 4.8. One arch of the cycloid; two positions of the wheel at $\varphi = 0$ and $\varphi = \pi$

NHẬN XÉT / REMARK — Có thể thử $8R$ bằng tổng rời rạc. Chia góc quay 0 đến 2π thành 8 phần bằng nhau $\Delta\varphi = \pi/4$; trên mỗi phần tốc độ là $2v_0 \sin(\varphi/2)$, đường đi trong $\Delta\varphi$ là $2R \sin(\varphi/2) \Delta\varphi$ lấy ở giữa phần. Cộng 8 số hạng được khoảng $8,05R$, sát giá trị $8R$, và sai số giảm khi chia mịn hơn.

$8R$ can be checked with a discrete sum. Split the turn 0 to 2π into 8 equal parts $\Delta\varphi = \pi/4$; on each the speed is $2v_0 \sin(\varphi/2)$, so the path in $\Delta\varphi$ is $2R \sin(\varphi/2) \Delta\varphi$ evaluated at the middle of the part. The 8 terms add up to about $8.05R$, close to $8R$, and the error shrinks with finer division.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Bánh lăn không trượt cho phép chuyển mọi câu hỏi về vận tốc điểm vành thành bài toán quay quanh điểm tiếp xúc: $v = \omega \cdot (\text{khoảng cách tới } P)$. Chỉ cần $\omega = v_0/R$ rồi đo khoảng cách từ điểm cần tìm tới P trên hình.

Rolling without slipping turns every question about rim velocities into rotation about the contact point: $v = \omega \cdot (\text{distance to } P)$. Only $\omega = v_0/R$ is needed, then measure from the required point to P on the figure.

VÍ DỤ 4.9 (Vận tốc điểm trên vành bánh lăn) / EXAMPLE 4.9 (Velocities of points on a rolling wheel) — Bánh xe bán kính $0,35$ m lăn không trượt trên đường thẳng, tâm có tốc độ

không đổi 7,2 m/s. Tính tốc độ góc, tốc độ điểm cao nhất, tốc độ điểm ngang tâm, gia tốc điểm đang chạm đường và số vòng bánh quay trong mỗi giây.

A wheel of radius 0.35 m rolls without slipping on a straight road, its centre moving at a constant 7.2 m/s. Find the angular speed, the speed of the top point, the speed of the point level with the centre, the acceleration of the point touching the road, and the number of turns per second.

Lời giải. / Solution.

Theo (4.13): $\omega = v_0/R = 7,2/0,35 \approx 20,6 \text{ rad/s}$. Số vòng trong một giây: $\omega/(2\pi) \approx 3,27 \text{ vòng/s}$.

By (4.13): $\omega = v_0/R = 7.2/0.35 \approx 20.6 \text{ rad/s}$. Turns per second: $\omega/(2\pi) \approx 3.27 \text{ turns/s}$.

Theo hệ quả 4.17: điểm cao nhất $2v_0 = 14,4 \text{ m/s}$; điểm ngang tâm $\sqrt{2} \cdot 7,2 \approx 10,2 \text{ m/s}$, hợp 45° với phương ngang.

By corollary 4.17: the top point $2v_0 = 14.4 \text{ m/s}$; the point level with the centre $\sqrt{2} \cdot 7.2 \approx 10.2 \text{ m/s}$, at 45° to the horizontal.

Theo tính chất 4.18, điểm chạm đường có gia tốc:

By property 4.18, the point touching the road has acceleration:

$$a = \omega^2 R = v_0^2 / R$$

$a = 7,2^2/0,35 \approx 148 \text{ m/s}^2$, hướng thẳng lên. Vậy $\omega \approx 20,6 \text{ rad/s}$, $14,4 \text{ m/s}$ ở đỉnh, $10,2 \text{ m/s}$ ở điểm ngang tâm, gia tốc điểm chạm đường 148 m/s^2 (khoảng $15g$).

$a = 7.2^2/0.35 \approx 148 \text{ m/s}^2$, straight up. Hence $\omega \approx 20.6 \text{ rad/s}$, 14.4 m/s at the top, 10.2 m/s at the point level with the centre, and the contact point accelerates at 148 m/s^2 (about $15g$). ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hỏi “bao nhiêu phần thời gian điểm vành chạy nhanh hơn tâm” là bất đẳng thức trên công thức $v_M = 2v_0 \sin(\varphi/2)$. Tốc độ chỉ phụ thuộc góc quay φ , nên tỉ lệ thời gian bằng tỉ lệ góc φ thỏa điều kiện, vì φ tăng đều theo thời gian.

The question “what fraction of the time a rim point outruns the centre” is an inequality on $v_M = 2v_0 \sin(\varphi/2)$. The speed depends only on the turned angle φ , and φ grows uniformly with time, so the time fraction equals the fraction of angles φ that meet the condition.

VÍ DỤ 4.10 (Bất đẳng thức trên góc quay) / EXAMPLE 4.10 (An inequality on the turned angle) — Bánh xe lăn đều không trượt. Một điểm trên vành, trong một vòng quay của bánh, chiếm bao nhiêu phần chu kỳ với tốc độ lớn hơn tốc độ tâm bánh? Và bao nhiêu phần chu kỳ với tốc độ lớn hơn $\sqrt{3} \cdot v_0$?

A wheel rolls uniformly without slipping. During one turn, for what fraction of the period is a rim point faster than the centre of the wheel? And for what fraction is it faster than $\sqrt{3} \cdot v_0$?

Lời giải. / Solution.

Với $\varphi \in [0; 2\pi]$, tốc độ điểm là $2v_0 \sin(\varphi/2)$. Điều kiện $v > v_0$:

For $\varphi \in [0, 2\pi]$ the point's speed is $2v_0 \sin(\varphi/2)$. The condition $v > v_0$:

$$\sin(\varphi/2) > 1/2 \Leftrightarrow \pi/6 < \varphi/2 < 5\pi/6 \Leftrightarrow \pi/3 < \varphi < 5\pi/3$$

Khoảng này dài $5\pi/3 - \pi/3 = 4\pi/3$, chiếm $(4\pi/3)/(2\pi) = 2/3$ chu kỳ.

This interval has length $5\pi/3 - \pi/3 = 4\pi/3$, which is $(4\pi/3)/(2\pi) = 2/3$ of the period.

Điều kiện $v > \sqrt{3} \cdot v_0$ cho $\sin(\varphi/2) > \sqrt{3}/2$, tức $\pi/3 < \varphi/2 < 2\pi/3$ và $2\pi/3 < \varphi < 4\pi/3$. Khoảng dài $2\pi/3$, chiếm $1/3$ chu kỳ.

The condition $v > \sqrt{3} \cdot v_0$ gives $\sin(\varphi/2) > \sqrt{3}/2$, i.e. $\pi/3 < \varphi/2 < 2\pi/3$ and $2\pi/3 < \varphi < 4\pi/3$. The interval has length $2\pi/3$, which is $1/3$ of the period.

Vậy điểm vành nhanh hơn tâm trong $2/3$ chu kỳ và nhanh hơn $\sqrt{3} \cdot v_0$ trong $1/3$ chu kỳ.

Hence the rim point is faster than the centre for $2/3$ of the period and faster than $\sqrt{3} \cdot v_0$ for $1/3$ of the period. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho rằng điểm tiếp xúc có gia tốc bằng 0 vì $v = 0$. Khi lăn đều nó có $a = \omega^2 R$ hướng lên; vận tốc 0 tức thời không kéo theo gia tốc 0.

Believing the contact point has zero acceleration because $v = 0$. In uniform rolling it has $a = \omega^2 R$ pointing up; zero instantaneous velocity does not give zero acceleration.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng $v = \omega R$ cho mọi điểm trên vành. Công thức đó chỉ cho tốc độ của tâm trong hệ gắn đất và tốc độ của điểm vành so với tâm; đối với đất vận tốc điểm vành là $2v_0 \sin(\varphi/2)$.

Using $v = \omega R$ for every rim point. It gives only the speed of the centre in the ground frame and the speed of the rim relative to the centre; relative to the ground the rim point has $2v_0 \sin(\varphi/2)$.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Gia tốc hướng tâm của điểm đã biết ($\omega^2 R$ với bánh lăn đều) cộng với vận tốc đã biết cho bán kính cong ngay: $R_c = v^2/a_n$, với a_n là thành phần gia tốc vuông góc vận tốc. Tại đỉnh cycloid gia tốc vuông góc với vận tốc nên không cần phân tích thêm.

The known acceleration of the point ($\omega^2 R$ for uniform rolling) and its known velocity give the radius of curvature at once: $R_c = v^2/a_n$, with a_n the component of acceleration perpendicular to the velocity. At the top of the cycloid the acceleration is perpendicular to the velocity, so no further resolving is needed.

VÍ DỤ 4.11 (Gia tốc và bán kính cong của cycloid) / EXAMPLE 4.11 (Acceleration and curvature of the cycloid) — Bánh bán kính 0,30 m lăn đều không trượt với $v_0 = 5,0$ m/s.

Với điểm P trên vành: (a) tốc độ và gia tốc khi P ở điểm cao nhất, (b) bán kính cong của quỹ đạo P tại đó, (c) đường đi và tốc độ trung bình của P trong một vòng quay.

A wheel of radius 0.30 m rolls uniformly without slipping with $v_0 = 5.0$ m/s. For a rim point P: (a) its speed and acceleration at the top, (b) the radius of curvature of its path there, (c) the path length and mean speed of P over one turn of the wheel.

Lời giải. / Solution.

(a) Tại điểm cao nhất $v = 2v_0 = 10$ m/s theo phương ngang. Gia tốc $\omega^2 R = v_0^2/R = 25/0,30 \approx 83,3$ m/s², thẳng đứng hướng xuống tâm.

(a) At the top $v = 2v_0 = 10$ m/s, horizontal. The acceleration is $\omega^2 R = v_0^2/R = 25/0.30 \approx 83.3$ m/s², vertical, towards the centre.

(b) Gia tốc vuông góc với vận tốc nên $a_n = 83,3$ m/s², và theo (4.8):

(b) The acceleration is perpendicular to the velocity, so $a_n = 83.3$ m/s², and by (4.8):

$$R_c = v^2/a_n = 4R$$

$R_c = 100/83,3 = 1,2 \text{ m}$, đúng bằng $4R$.

$R_c = 100/83.3 = 1.2 \text{ m}$, which is exactly $4R$.

(c) Đường đi trong một vòng quay (một vòm cycloid) là $8R = 2,4 \text{ m}$. Thời gian một vòng $T = 2\pi R/v_0 \approx 0,377 \text{ s}$, nên tốc độ trung bình:

(c) The path in one turn (one arch of the cycloid) is $8R = 2.4 \text{ m}$. One turn takes $T = 2\pi R/v_0 \approx 0.377 \text{ s}$, so the mean speed is:

$$v_{tb} = 8R/(2\pi R/v_0) = 4v_0/\pi$$

Vậy $v_{tb} \approx 6,37 \text{ m/s}$, lớn hơn v_0 nhưng nhỏ hơn $2v_0$. Tại đỉnh P có $v = 10 \text{ m/s}$, $a \approx 83,3 \text{ m/s}^2$, $R_c = 1,2 \text{ m}$; một vòng dài $2,4 \text{ m}$.

Hence $v_{mean} \approx 6.37 \text{ m/s}$, larger than v_0 but smaller than $2v_0$. At the top P has $v = 10 \text{ m/s}$, $a \approx 83.3 \text{ m/s}^2$, $R_c = 1.2 \text{ m}$; one turn is 2.4 m long. ■

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Bánh lăn không trượt: $v_0 = \omega R$; $v_M = \omega \cdot PM = 2v_0 \sin(\phi/2)$; điểm cao nhất $2v_0$; gia tốc điểm vành lăn đều $\omega^2 R$ hướng tâm; một vòm cycloid dài $8R$.

Rolling without slipping: $v_0 = \omega R$; $v_M = \omega \cdot PM = 2v_0 \sin(\phi/2)$; top point $2v_0$; rim acceleration in uniform rolling $\omega^2 R$ towards the centre; one cycloid arch has length $8R$.

TÍNH CHẤT 4.20 / PROPERTY 4.20 — Bánh bán kính r lăn không trượt trong một vành cố định bán kính R ($R > r$) khi tâm bánh quay quanh tâm vành với tốc độ góc Ω : tâm bánh có tốc độ $\Omega(R - r)$, bánh tự quay với tốc độ góc $\omega = \Omega(R - r)/r$, ngược chiều Ω . Lăn ngoài vành cố định thì tâm bánh có tốc độ $\Omega(R + r)$ và $\omega = \Omega(R + r)/r$, cùng chiều Ω .

A wheel of radius r rolling without slipping inside a fixed ring of radius R ($R > r$) while its centre circles the ring's centre at angular speed Ω : the wheel's centre has speed $\Omega(R - r)$, and the wheel spins at $\omega = \Omega(R - r)/r$, opposite to Ω . Rolling outside a fixed ring the centre has speed $\Omega(R + r)$ and $\omega = \Omega(R + r)/r$, in the same sense as Ω .

Chứng minh. / Proof.

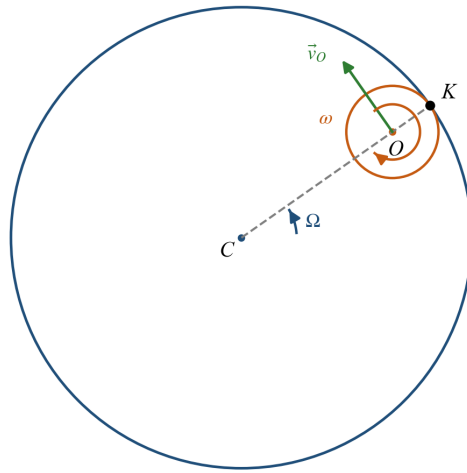
Tâm O của bánh cách tâm vành khoảng $d = R - r$ (lăn trong) và quay quanh tâm vành với Ω , nên $v_0 = \Omega d$. Điểm tiếp xúc K đứng yên (tâm quay tức thời), cách O đoạn r nên theo định lý 4.14 $v_0 = \omega \cdot r$.

The centre O is at distance $d = R - r$ from the ring's centre (rolling inside) and turns about it at Ω , so $v_0 = \Omega d$. The contact point K is at rest (the instantaneous centre) and lies a distance r from O, so by theorem 4.14 $v_0 = \omega \cdot r$.

$$\omega = \Omega(R - r)/r \quad (4.17)$$

Chiều: K nằm ngoài O so với tâm vành, v_0 hướng theo chiều quay của Ω ; để K đứng yên bánh phải quay ngược lại. Lăn ngoài có $d = R + r$ và K nằm giữa tâm vành và O, nên bánh quay cùng chiều Ω ; thay $d = R + r$ vào cùng lập luận.

Sense: K lies beyond O as seen from the ring's centre and v_0 points in the sense of Ω ; for K to stay at rest the wheel must spin the other way. Rolling outside has $d = R + r$ and K lies between the ring's centre and O, so the wheel spins in the same sense as Ω ; put $d = R + r$ into the same argument. ■



Hình 4.9. Bánh lăn không trượt trong vành cố định: tâm O quay quanh C, tiếp điểm K đứng yên
Figure 4.9. Wheel rolling without slipping inside a fixed ring: the centre O circles C, the contact point K is at rest

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hỏi số vòng tự quay của bánh khi tâm đi một vòng quanh vành: lấy hai vận tốc góc chia nhau, $\omega/\Omega = (R - r)/r$. Số vòng đếm đối với đất là $(R - r)/r$, nhỏ hơn R/r vì bánh vừa lăn dọc vành vừa bị tâm kéo quay ngược lại.

For the number of spins the wheel makes while its centre goes once round the ring, divide the two angular speeds: $\omega/\Omega = (R - r)/r$. Counted relative to the ground the number is $(R - r)/r$, smaller than R/r , since the wheel rolls along the ring while its centre drags it round the other way.

VÍ DỤ 4.12 (Bánh lăn trong vành cố định) / EXAMPLE 4.12 (Wheel rolling inside a fixed ring) — Bánh bán kính $r = 0,10$ m lăn không trượt trong vành cố định bán kính $R = 0,50$ m. Tâm bánh đi hết một vòng quanh tâm vành trong 2,0 s (Hình 4.9). Tính tốc độ tâm bánh, tốc độ góc tự quay của bánh, số vòng bánh tự quay trong 1 chu kỳ của tâm, và tốc độ điểm của bánh gần tâm vành nhất.

A wheel of radius $r = 0.10$ m rolls without slipping inside a fixed ring of radius $R = 0.50$ m. Its centre goes once round the ring's centre in 2.0 s (Figure 4.9). Find the speed of the wheel's centre, the wheel's spin angular speed, the number of turns the wheel spins in one period of the centre, and the speed of the point of the wheel nearest the ring's centre.

Lời giải. / Solution.

Tốc độ góc quỹ đạo của tâm bánh: $\Omega = 2\pi/2,0 = \pi$ rad/s $\approx 3,14$ rad/s. Tâm bánh cách tâm vành $R - r = 0,40$ m.

Orbital angular speed of the wheel's centre: $\Omega = 2\pi/2.0 = \pi$ rad/s ≈ 3.14 rad/s. The wheel's centre is $R - r = 0.40$ m from the ring's centre.

$$v_O = \Omega(R - r), \quad \omega = v_O/r = \Omega(R - r)/r$$

$v_O = 0,40\pi \approx 1,26$ m/s và $\omega = 0,40\pi/0,10 = 4\pi \approx 12,6$ rad/s, quay ngược chiều với chuyển động của tâm.

$v_O = 0.40\pi \approx 1.26$ m/s and $\omega = 0.40\pi/0.10 = 4\pi \approx 12.6$ rad/s, spinning opposite to the motion of the centre.

Trong 2,0 s bánh quay $\omega T/(2\pi) = 4\pi \cdot 2,0/(2\pi) = 4$ vòng, tức $(R - r)/r = 4$.

In 2.0 s the wheel turns $\omega T/(2\pi) = 4\pi \cdot 2.0/(2\pi) = 4$ turns, i.e. $(R - r)/r = 4$.

Tâm quay tức thời là K, điểm của bánh gần tâm vành nhất nằm đối tâm với K qua O, cách K đoạn $2r$, nên có tốc độ $\omega \cdot 2r = 2v_O$.

The instantaneous centre is K, and the point of the wheel nearest the ring's centre is diametrically opposite K through O, at distance $2r$, so its speed is $\omega \cdot 2r = 2v_O$.

Vậy tâm bánh chạy 1,26 m/s, bánh tự quay 12,6 rad/s (4 vòng mỗi chu kỳ) và điểm gần tâm vành nhất chạy 2,51 m/s.

Hence the wheel's centre moves at 1.26 m/s, the wheel spins at 12.6 rad/s (4 turns per period) and the nearest point to the ring's centre moves at 2.51 m/s. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Khi $R = 2r$, $\omega = \Omega(R - r)/r = \Omega$: bánh tự quay cùng tốc độ với tâm nhưng ngược chiều, và mỗi điểm của bánh chạy trên một đường kính của vành. Cơ cấu này đổi chuyển động tròn thành chuyển động thẳng.

When $R = 2r$, $\omega = \Omega(R - r)/r = \Omega$: the wheel spins as fast as its centre turns but the other way, and each point of the wheel runs along a diameter of the ring. The mechanism converts circular motion into straight-line motion.

4.7. Truyền động bánh răng và dây curoa — Gear and belt drives

ĐỊNH LÝ 4.21 (Truyền động bánh răng, dây curoa) / THEOREM 4.21 (Gear and belt drives) — Hai bánh ăn khớp, hoặc nối bằng dây curoa không trượt và không giãn, có tốc độ dài của vành bằng nhau: $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Bánh răng cùng bước răng có bán kính tỉ lệ với số răng z , nên $\omega_1 z_1 = \omega_2 z_2$. Hai bánh gắn cùng trục có cùng ω . Ăn khớp ngoài làm hai bánh quay ngược chiều; dây curoa mắc không bắt chéo làm hai bánh quay cùng chiều.

Two meshing wheels, or two wheels joined by a belt that neither slips nor stretches, have equal rim speeds: $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Gears of the same tooth pitch have radii proportional to the number of teeth z , so $\omega_1 z_1 = \omega_2 z_2$. Two wheels on one shaft have the same ω . External meshing makes the wheels turn in opposite senses; an uncrossed belt makes them turn in the same sense.

Chứng minh. / Proof.

Tại chỗ ăn khớp hoặc chỗ dây ôm vành, hai điểm tiếp xúc không trượt nên có cùng vận tốc; mỗi điểm có tốc độ ωr theo định lý 4.3. Dây không giãn nên mọi điểm của dây có cùng tốc độ.

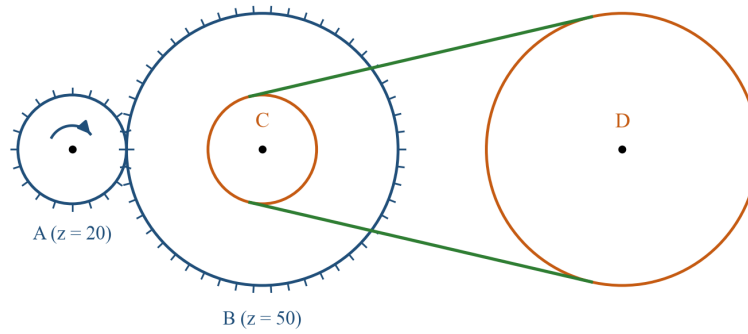
At the mesh or where the belt wraps the rim the two contact points do not slip and so share a velocity; each has speed ωr by theorem 4.3. The belt does not stretch, so all points of the belt have the same speed.

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad (4.18)$$

Các răng đặt cách nhau cùng một bước p dọc vành, nên số răng $z = 2\pi r/p$ tỉ lệ với r . Thay $r_1/r_2 = z_1/z_2$:

The teeth are spaced a common pitch p along the rim, so the number of teeth $z = 2\pi r/p$ is proportional to r . Substituting $r_1/r_2 = z_1/z_2$:

$$\omega_1 z_1 = \omega_2 z_2 \quad (4.19)$$



Hình 4.10. Hệ truyền động của Ví dụ 4.13: A ăn khớp B; C đồng trục với B; dây curoa nối C với D

Figure 4.10. Drive train of Example 4.13: A meshes with B; C shares B's shaft; a belt joins C to D

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đi từng cặp bánh: nếu ăn khớp hay dây nối thì so tốc độ dài (hoặc số răng); nếu cùng trục thì giữ nguyên ω . Ghi chiều quay ở mỗi bước, đổi chiều sau mỗi lần ăn khớp ngoài.

Go pair by pair: if the wheels mesh or are joined by a belt compare rim speeds (or numbers of teeth); if they share a shaft keep ω . Record the sense of rotation at every step and reverse it after each external mesh.

VÍ DỤ 4.13 (Hệ truyền động nhiều cấp) / EXAMPLE 4.13 (A multi-stage drive) — Bánh răng A (20 răng) quay 1200 vòng/phút, ăn khớp với bánh răng B (50 răng). Bánh C bán kính 4 cm gắn đồng trục với B. Dây curoa không bắt chéo nối C với bánh D bán kính 10 cm (Hình 4.10). Tính số vòng/phút của B và D, chiều quay của D so với A, và tốc độ của dây.

Gear A (20 teeth) turns at 1200 rev/min and meshes with gear B (50 teeth). Wheel C, of radius 4 cm, is fixed on B's shaft. An uncrossed belt joins C to wheel D of radius 10 cm (Figure 4.10). Find the rev/min of B and D, the sense of D relative to A, and the speed of the belt.

Lời giải. / Solution.

A ăn khớp B: $n_B = n_A z_A / z_B = 1200 \cdot 20 / 50 = 480$ vòng/phút, B quay ngược chiều A.

A meshes with B: $n_B = n_A z_A / z_B = 1200 \cdot 20 / 50 = 480$ rev/min, B turning opposite to A.

C cùng trục với B nên $n_C = 480$ vòng/phút. Dây nối C với D nên $\omega_C r_C = \omega_D r_D$:

C shares B's shaft so $n_C = 480$ rev/min. The belt joins C to D so $\omega_C r_C = \omega_D r_D$:

$$n_D = n_C r_C / r_D = 480 \cdot 4 / 10$$

$n_D = 192$ vòng/phút, cùng chiều C (dây không bắt chéo), tức cùng chiều B và ngược chiều A.

$n_D = 192$ rev/min, in the same sense as C (uncrossed belt), i.e. the same as B and opposite to A.

Tốc độ dây bằng tốc độ vành C: $v = \omega_C r_C = (480 \cdot 2\pi / 60) \cdot 0,04 \approx 2,01$ m/s.

The belt speed equals the rim speed of C: $v = \omega_C r_C = (480 \cdot 2\pi / 60) \cdot 0.04 \approx 2.01$ m/s.

Vậy B quay 480 vòng/phút, D quay 192 vòng/phút ngược chiều A, dây chạy 2,01 m/s.

Hence B turns at 480 rev/min, D at 192 rev/min opposite to A , and the belt runs at 2.01 m/s. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Tỉ số truyền toàn bộ là tích các tỉ số từng cấp: $i = (z_B/z_A) \cdot (r_D/r_C) = 2,5 \cdot 2,5 = 6,25$, tức $1200/6,25 = 192$ vòng/phút. Giảm tốc bao nhiêu thì mô-men tăng bấy nhiêu khi bỏ qua ma sát; phần này thuộc động lực học vật rắn (Chương 10).

The overall ratio is the product of the stage ratios: $i = (z_B/z_A) \cdot (r_D/r_C) = 2.5 \cdot 2.5 = 6.25$, so $1200/6.25 = 192$ rev/min. Each reduction in speed raises the torque by the same factor when friction is ignored; that belongs to rigid-body dynamics (Chapter 10).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — So sánh ω của hai bánh nối dây hay ăn khớp: chúng có cùng tốc độ dài, ω tỉ lệ nghịch với bán kính hoặc số răng.

Comparing ω of two wheels joined by a belt or a mesh as if equal: they share the rim speed, and ω is inversely proportional to radius or number of teeth.

4.8. Nhiều vật quay đều: thời điểm gặp nhau, kim đồng hồ — *Several uniform rotations: meeting times and clock hands*

ĐỊNH LÝ 4.22 (Tốc độ góc tương đối) / THEOREM 4.22 (Relative angular speed) —

Hai chất điểm chuyển động tròn đều quanh cùng một tâm với tốc độ góc đại số ω_1, ω_2 (cùng quy ước chiều dương) có góc giữa hai bán kính biến thiên đều với tốc độ góc $\omega_1 - \omega_2$. Hai lần gặp liên tiếp cách nhau $T_g = 2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$.

Two particles in uniform circular motion about one centre with algebraic angular speeds ω_1, ω_2 (same positive sense) have the angle between their radii changing uniformly at angular speed $\omega_1 - \omega_2$. Two successive meetings are $T_g = 2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$ apart.

Chứng minh. / Proof.

Góc của mỗi chất điểm là $\theta_i = \theta_{i0} + \omega_i t$. Hiệu hai góc:

The angle of each particle is $\theta_i = \theta_{i0} + \omega_i t$. Their difference:

$$\theta_1 - \theta_2 = (\theta_{10} - \theta_{20}) + (\omega_1 - \omega_2)t \quad (4.20)$$

Hai chất điểm gặp nhau khi hiệu này là bội nguyên của 2π . Hiệu tăng đều nên hai lần như vậy cách nhau thời gian $2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$.

The particles meet when this difference is an integer multiple of 2π . The difference changes uniformly, so two such instants are $2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$ apart. ■

HỆ QUẢ 4.23 / COROLLARY 4.23 — Hai chất điểm có chu kỳ T_1, T_2 : chuyển động cùng chiều gặp nhau cách $T_1 T_2 / |T_1 - T_2|$; chuyển động ngược chiều gặp nhau cách $T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$. Khoảng cách giữa chúng khi góc giữa hai bán kính là $\Delta\theta$ (cùng bán kính r) bằng $2r|\sin(\Delta\theta/2)|$.

Two particles with periods T_1, T_2 : moving in the same sense they meet every $T_1 T_2 / |T_1 - T_2|$; moving in opposite senses they meet every $T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$. Their separation when the angle between the radii is $\Delta\theta$ (same radius r) is $2r|\sin(\Delta\theta/2)|$.

Chứng minh. / Proof.

Thay $\omega = 2\pi/T$ vào định lý 4.22. Cùng chiều: $|\omega_1 - \omega_2| = 2\pi|T_2 - T_1|/(T_1 T_2)$; ngược chiều: $|\omega_1 - \omega_2| = 2\pi(T_1 + T_2)/(T_1 T_2)$. Dây của góc ở tâm $\Delta\theta$ trong đường tròn bán kính r dài $2r \sin(\Delta\theta/2)$ (tam giác cân).

Put $\omega = 2\pi/T$ into theorem 4.22. Same sense: $|\omega_1 - \omega_2| = 2\pi|T_2 - T_1|/(T_1T_2)$; opposite senses: $|\omega_1 - \omega_2| = 2\pi(T_1 + T_2)/(T_1T_2)$. The chord of a central angle $\Delta\theta$ in a circle of radius r has length $2r \sin(\Delta\theta/2)$ (isosceles triangle). ■

TÍNH CHẤT 4.24 / PROPERTY 4.24 — Kim phút quay $6^\circ/\text{phút}$, kim giờ $0,5^\circ/\text{phút}$, kim giây $6^\circ/\text{giây} = 360^\circ/\text{phút}$, cùng chiều kim đồng hồ. Kim phút hơn kim giờ $5,5^\circ/\text{phút}$; hai kim này trùng nhau mỗi $12/11$ giờ = $65 \frac{5}{11}$ phút, tức 11 lần trong 12 giờ.

The minute hand turns 6° per minute, the hour hand 0.5° per minute, the second hand 6° per second = 360° per minute, all clockwise. The minute hand gains 5.5° per minute on the hour hand; these two coincide every $12/11$ hour = $65 \frac{5}{11}$ minutes, i.e. 11 times in 12 hours.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Bài kim đồng hồ đổi sang hệ quy chiếu gắn kim giờ: kim phút quay quanh với $5,5^\circ/\text{phút}$ so với kim giờ. Đặt góc lệch ban đầu, rồi giải phương trình tuyến tính của góc lệch theo thời gian, nhớ rằng hiệu góc bằng 0 (trùng) hay 90° (vuông góc) có thể lặp theo chu kỳ 360° .

A clock-hand problem moves to the frame of the hour hand: the minute hand turns about it at 5.5° per minute. Set the initial offset, then solve the linear equation for the offset against time, remembering that an offset of 0 (coincide) or 90° (perpendicular) can repeat modulo 360° .

VÍ DỤ 4.14 (Hệ quy chiếu gắn kim giờ) / EXAMPLE 4.14 (The frame of the hour hand)

— Lúc 7 giờ đúng. Tìm (a) thời điểm đầu tiên sau đó hai kim giờ và kim phút trùng nhau, (b) thời điểm đầu tiên sau đó hai kim vuông góc nhau, (c) khoảng cách giữa hai đầu kim lúc 7 giờ đúng nếu kim phút dài 12 cm và kim giờ dài 8 cm.

At exactly 7 o'clock find (a) the first later time the hour and minute hands coincide, (b) the first later time they are perpendicular, (c) the distance between the tips of the hands at exactly 7 o'clock if the minute hand is 12 cm and the hour hand is 8 cm long.

Lời giải. / Solution.

Lúc 7 giờ kim phút chỉ 0° , kim giờ chỉ $7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$ (đo thuận chiều kim đồng hồ từ số 12). Gọi t là số phút sau 7 giờ, hiệu góc kim phút trừ kim giờ:

At 7 o'clock the minute hand points to 0° and the hour hand to $7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$ (measured clockwise from the 12). With t minutes after 7, the angle of the minute hand minus that of the hour hand is:

$$\delta(t) = -210^\circ + 5,5^\circ \cdot t$$

(a) Trùng nhau khi $\delta = 0$: $t = 210/5,5 \approx 38,18$ phút, tức 7 giờ 38 phút 11 giây.

(a) They coincide when $\delta = 0$: $t = 210/5.5 \approx 38.18$ min, i.e. 7:38:11.

(b) Vuông góc lần đầu khi $\delta = -90^\circ$ (kim phút còn cách sau kim giờ 90°): $t = 120/5,5 \approx 21,82$ phút, tức 7 giờ 21 phút 49 giây.

(b) They are first perpendicular when $\delta = -90^\circ$ (the minute hand still 90° behind the hour hand): $t = 120/5.5 \approx 21.82$ min, i.e. 7:21:49.

(c) Lúc 7 giờ hai kim hợp góc 210° , tương đương 150° về phía ngắn. Định lý hàm cosin:

(c) At 7 o'clock the hands are 210° apart, equivalent to 150° the short way round. By the cosine rule:

$$d^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 150^\circ$$

$d = \sqrt{(208 + 96\sqrt{3})} \approx 19,3$ cm. Vậy hai kim trùng lúc 7 giờ 38 phút 11 giây, vuông góc lần đầu lúc 7 giờ 21 phút 49 giây, và hai đầu kim cách nhau 19,3 cm lúc 7 giờ.

$d = \sqrt{(208 + 96\sqrt{3})} \approx 19.3$ cm. Hence the hands coincide at 7:38:11, are first perpendicular at 7:21:49, and the tips are 19.3 cm apart at 7 o'clock. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Hai lần trùng liên tiếp cách nhau 12/11 giờ, dài hơn 1 giờ vì kim giờ cũng đi tiếp; 11 lần trùng trong 12 giờ ứng với 11 vòng tương đối của kim phút. Cùng cách tính áp dụng cho hai vệ tinh trên hai quỹ đạo tròn đồng phẳng.

Successive coincidences are 12/11 hour apart, longer than 1 hour because the hour hand also moves on; 11 coincidences in 12 hours correspond to 11 relative turns of the minute hand. The same calculation applies to two satellites on coplanar circular orbits.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính thời điểm trùng nhau của hai kim bằng cách cho kim phút đi 60 phút rồi cộng kim giờ đi 5 độ, không xét chuyển động tiếp theo của kim giờ. Phải lập phương trình trên góc lệch với tốc độ tương đối 5,5°/phút.

Finding the coincidence time by letting the minute hand go 60 minutes and adding the hour hand's 5 degrees, ignoring the hour hand's continued motion. Set up the equation on the offset with the relative speed 5.5° per minute.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hai vật quay đều gặp nhau cách $T_g = 2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$; kim phút và kim giờ trùng mỗi 12/11 giờ; $\omega_{ph} - \omega_g = 5,5^\circ/\text{phút}$.

Two uniform rotors meet every $T_g = 2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$; the minute and hour hands coincide every 12/11 hours; $\omega_{min} - \omega_{hr} = 5.5^\circ$ per minute.

Bảng chiến lược — Strategy table

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Cho chu kỳ, vòng/phút, bán kính; hỏi tốc độ hoặc gia tốc <i>Period, rev/min and radius given; speed or acceleration asked</i>	Đổi sang rad/s; $v = \omega r$, $a_n = \omega^2 r$ <i>Convert to rad/s; $v = \omega r$, $a_n = \omega^2 r$</i>	4.1
Tốc độ thay đổi trên quỹ đạo tròn, “gia tốc toàn phần”, góc giữa a và v <i>Speed changing on a circle, “total acceleration”, angle between a and v</i>	Tách a_n và a_t ; $a = \sqrt{(a_n^2 + a_t^2)}$; $\tan \varphi = a_t/a_n$ <i>Split a_n and a_t; $a = \sqrt{(a_n^2 + a_t^2)}$; $\tan \varphi = a_t/a_n$</i>	4.2, 4.3
“Bán kính cong” của parabol, cycloid, quỹ đạo bất kỳ “Radius of curvature” of a parabola, cycloid or any path	$R = v^2/a_n$; a_n là thành phần của a vuông góc v $R = v^2/a_n$; a_n is the component of a perpendicular to v	4.4, 4.5, 4.11

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Thanh hay vật rắn, biết phương vận tốc hai điểm và độ lớn một vận tốc <i>Rod or rigid body, directions of two velocities and one magnitude known</i>	Hình chiếu vận tốc lên đường nối bằng nhau; (4.10) cho ω <i>Equal projections of velocity on the line joining; (4.10) gives ω</i>	4.6
Hai đầu thanh trượt trên hai đường, con lăn giữa hai ván <i>Rod ends sliding on two lines, roller between two boards</i>	Tâm quay tức thời là giao hai đường vuông góc với vận tốc; $v = \omega \cdot PM$ <i>Instantaneous centre at the meeting of the perpendiculars to the velocities; $v = \omega \cdot PM$</i>	4.7, 4.8
Lăn không trượt trên mặt cố định, tìm vận tốc điểm vành <i>Rolling without slipping on a fixed surface, rim velocities</i>	$v_O = \omega R$; tâm quay là điểm tiếp xúc; $v_M = 2v_O \sin(\phi/2)$ <i>$v_O = \omega R$; centre of rotation at the contact point; $v_M = 2v_O \sin(\phi/2)$</i>	4.9, 4.10
Gia tốc điểm tiếp xúc, đỉnh cycloid, quãng đường một vòng <i>Acceleration of the contact point, top of the cycloid, path over one turn</i>	Gia tốc vành $\omega^2 R$ hướng tâm khi lăn đều; một vòm dài $8R$ <i>Rim acceleration $\omega^2 R$ to the centre in uniform rolling; one arch has length $8R$</i>	4.11
Bánh lăn trong hay ngoài vành cố định, đếm số vòng tự quay <i>Wheel rolling inside or outside a fixed ring, counting spins</i>	$\omega = \Omega(R \mp r)/r$; số vòng $(R \mp r)/r$ mỗi chu kỳ <i>$\omega = \Omega(R \mp r)/r$; $(R \mp r)/r$ spins per period</i>	4.12
Bánh răng, dây curoa, bánh đồng trục <i>Gears, belts, wheels on one shaft</i>	Cùng tốc độ vành $\Rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ hay $\omega_1 z_1 = \omega_2 z_2$; đồng trục cùng ω <i>Equal rim speeds $\Rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ or $\omega_1 z_1 = \omega_2 z_2$; common shaft, common ω</i>	4.13
Kim đồng hồ, hai vật quay đều trên một đường tròn gặp nhau <i>Clock hands, two uniform rotors meeting on a circle</i>	Tốc độ góc tương đối; chu kỳ gặp nhau bằng 2π chia cho hiệu hai tốc độ góc <i>Relative angular speed; meeting period is 2π divided by the difference of the two angular speeds</i>	4.14

Bảng thuật ngữ — Glossary

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Radian	Radian	đơn vị góc, góc chắn cung dài bằng bán kính <i>angle subtending an arc equal to the radius</i>
Tốc độ góc	Angular speed	góc quay trong một đơn vị thời gian, $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ <i>angle turned per unit time, $\omega = \Delta\theta/\Delta t$</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Gia tốc góc	Angular acceleration	tốc độ biến thiên của tốc độ góc, $\gamma = \Delta\omega/\Delta t$ <i>rate of change of angular speed, $\gamma = \Delta\omega/\Delta t$</i>
Chu kỳ	Period	thời gian đi hết một vòng <i>time for one revolution</i>
Tần số	Frequency	số vòng trong một giây, $f = 1/T$ <i>revolutions per second, $f = 1/T$</i>
Vận tốc dài	Linear velocity	vận tốc tiếp tuyến quỹ đạo, $v = \omega r$ <i>velocity tangent to the path, $v = \omega r$</i>
Gia tốc hướng tâm	Centripetal acceleration	thành phần gia tốc hướng vào tâm, v^2/r <i>component of acceleration towards the centre, v^2/r</i>
Gia tốc pháp tuyến	Normal acceleration	thành phần gia tốc vuông góc vận tốc <i>component of acceleration perpendicular to the velocity</i>
Gia tốc tiếp tuyến	Tangential acceleration	thành phần gia tốc dọc vận tốc, làm đổi độ lớn v <i>component along the velocity, changing the magnitude v</i>
Gia tốc toàn phần	Total acceleration	tổng vectơ của thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến <i>vector sum of the normal and tangential parts</i>
Bán kính cong	Radius of curvature	bán kính đường tròn mật tiếp tại một điểm <i>radius of the osculating circle at a point</i>
Đường tròn mật tiếp	Osculating circle	đường tròn ôm sát quỹ đạo nhất tại một điểm <i>circle that hugs the path most closely at a point</i>
Vật rắn	Rigid body	vật có khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ không đổi <i>body in which the distance between any two points is fixed</i>
Tịnh tiến	Translation	chuyển động mà mọi điểm có cùng vận tốc <i>motion in which all points have the same velocity</i>
Chuyển động phẳng	Plane motion	mọi điểm chuyển động trong các mặt phẳng song song <i>all points move in parallel planes</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Tâm quay tức thời	Instantaneous centre of rotation	điểm của vật có vận tốc bằng 0 tại thời điểm xét <i>point of the body with zero velocity at the instant</i>
Lăn không trượt	Rolling without slipping	điểm tiếp xúc có vận tốc bằng vận tốc mặt <i>contact point has the velocity of the surface</i>
Cycloid	Cycloid	quỹ đạo điểm vành bánh xe lăn không trượt <i>path of a rim point of a wheel rolling without slipping</i>
Bánh răng	Gear	bánh có răng ăn khớp để truyền chuyển động quay <i>toothed wheel meshing to transmit rotation</i>
Dây curoa	Belt	dây vòng nối hai bánh để truyền chuyển động <i>loop joining two wheels to transmit motion</i>
Tỉ số truyền	Gear ratio	tỉ số ω_1/ω_2 của hai bánh trong truyền động <i>ratio ω_1/ω_2 of two wheels in a drive</i>
Tốc độ góc tương đối	Relative angular speed	hiệu hai tốc độ góc, quyết định thời điểm gặp nhau <i>difference of two angular speeds, fixing the meeting times</i>

4.9. Bài tự luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 4.1 / Problem 4.1 — Bánh đà bán kính 0,25 m đang quay 1500 vòng/phút thì được hãm đều và dừng sau 20 s. Tính gia tốc góc, số vòng bánh đà quay cho đến lúc dừng, và gia tốc pháp tuyến, gia tốc tiếp tuyến của điểm trên vành tại thời điểm 5 s sau khi bắt đầu hãm.

A flywheel of radius 0.25 m spinning at 1500 rev/min is braked uniformly and stops after 20 s. Find the angular acceleration, the number of turns until it stops, and the normal and tangential accelerations of a rim point 5 s after braking begins.

Bài 4.2 / Problem 4.2 — Hai chất điểm A, B chuyển động đều trên cùng một đường tròn bán kính 0,5 m với chu kỳ 4 s và 6 s, cùng xuất phát tại một điểm lúc $t = 0$. (a) Nếu cùng chiều, sau bao lâu chúng gặp nhau lần đầu? (b) Nếu ngược chiều, lần gặp thứ ba xảy ra lúc nào và tại vị trí nào so với điểm xuất phát (tính theo chiều chuyển động của A)? (c) Khi ngược chiều, khoảng cách giữa chúng lúc $t = 1$ s là bao nhiêu?

Particles A and B move uniformly on the same circle of radius 0.5 m with periods 4 s and 6 s, both starting from one point at $t = 0$. (a) If they move in the same sense, when do they first meet again? (b) If in opposite senses, when is the third meeting and where is it relative to the start (measured in the sense of A's motion)? (c) For opposite senses, how far apart are they at $t = 1$ s?

Bài 4.3 / Problem 4.3 — Vật được ném ngang với $v_0 = 12 \text{ m/s}$. Tính bán kính cong của quỹ đạo tại điểm ném và tại điểm vật đã bay $1,0 \text{ s}$ ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

A body is thrown horizontally with $v_0 = 12 \text{ m/s}$. Find the radius of curvature of the path at launch and at the point reached 1.0 s later ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

Bài 4.4 / Problem 4.4 — Xe đạp có đĩa 48 răng ở bàn đạp, líp 16 răng gắn đồng trục với bánh sau bán kính $0,34 \text{ m}$, xích nối đĩa với líp. Người đi đạp 60 vòng/phút, bánh lăn không trượt. Tính số vòng/phút của bánh sau, tốc độ xe, và gia tốc hướng tâm của một điểm trên vành bánh sau đối với khung xe.

A bicycle has a 48-tooth chainring at the pedals and a 16-tooth sprocket on the same shaft as the rear wheel of radius 0.34 m , joined by a chain. The rider pedals at 60 rev/min and the wheel rolls without slipping. Find the rev/min of the rear wheel, the speed of the bicycle, and the centripetal acceleration of a rim point of the rear wheel relative to the frame.

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 4.5 / Problem 4.5 — Thanh AB dài $1,2 \text{ m}$ có đầu A trượt trên sàn ngang, đầu B trượt trên mặt phẳng nghiêng 60° so với sàn, mặt nghiêng cắt sàn tại O . Tại thời điểm xét $OA = 1,2 \text{ m}$ (ba điểm O, A, B tạo tam giác đều) và đầu A chạy ra xa O với tốc độ $0,5 \text{ m/s}$. Tính tốc độ góc của thanh, vận tốc đầu B (độ lớn và hướng) và tốc độ trung điểm M của thanh.

Rod AB , 1.2 m long, has end A sliding on a horizontal floor and end B sliding on a plane inclined at 60° to the floor, the incline meeting the floor at O . At the instant considered $OA = 1.2 \text{ m}$ (O, A, B form an equilateral triangle) and end A moves away from O at 0.5 m/s . Find the angular speed of the rod, the velocity of end B (magnitude and direction) and the speed of the midpoint M of the rod.

Bài 4.6 / Problem 4.6 — Cuộn chỉ gồm lõi bán kính $r = 1,0 \text{ cm}$ và hai đĩa bán kính $R = 3,0 \text{ cm}$, đặt trên sàn ngang, lăn không trượt trên sàn. Sợi chỉ quấn quanh lõi, đầu chỉ được kéo theo phương ngang với tốc độ không đổi $u = 0,12 \text{ m/s}$. Tính vận tốc tâm cuộn và tốc độ góc trong hai trường hợp: (a) chỉ đi ra từ phía dưới lõi, (b) chỉ đi ra từ phía trên lõi. (c) Trong trường hợp (a), khi cuộn quay 5 vòng thì tâm cuộn và đầu chỉ dời đi bao xa?

A cotton reel has a core of radius $r = 1.0 \text{ cm}$ and two flanges of radius $R = 3.0 \text{ cm}$; it stands on a horizontal floor and rolls without slipping. The thread is wound on the core and its end is pulled horizontally at a constant speed $u = 0.12 \text{ m/s}$. Find the velocity of the reel's centre and its angular speed in two cases: (a) the thread leaves from the bottom of the core, (b) the thread leaves from the top of the core. (c) In case (a), how far do the centre and the thread end move while the reel turns 5 times?

Bài 4.7 / Problem 4.7 — Bánh bán kính $r = 2,0 \text{ cm}$ lăn không trượt bên ngoài vành tròn cố định bán kính $R = 6,0 \text{ cm}$; tâm bánh đi hết một vòng quanh tâm vành trong $8,0 \text{ s}$. Tính tốc độ tâm bánh, tốc độ góc tự quay của bánh, số vòng bánh tự quay (đối với phương cố định) trong một chu kỳ của tâm, và tốc độ điểm của bánh xa tâm vành nhất.

A wheel of radius $r = 2.0 \text{ cm}$ rolls without slipping on the outside of a fixed ring of radius $R = 6.0 \text{ cm}$; the wheel's centre goes once round the ring's centre in 8.0 s . Find the speed of the wheel's centre, its spin angular speed, the number of turns it spins (relative to a fixed direction) in one period of the centre, and the speed of the point of the wheel farthest from the ring's centre.

Bài 4.8 / Problem 4.8 — Bánh tàu hỏa lăn không trượt trên ray ở vòng tiếp xúc bán kính $R = 0,45 \text{ m}$; gờ bánh có bán kính $R_g = 0,50 \text{ m}$. Tâm bánh chuyển động thẳng đều với $v_0 = 18 \text{ m/s}$. Tính vận tốc điểm thấp nhất của gờ, và phần chu kỳ trong đó một điểm của gờ chuyển động lùi so với mặt đất.

A train wheel rolls without slipping on the rail at its tread radius $R = 0.45\text{ m}$; the flange has radius $R_f = 0.50\text{ m}$. The centre moves uniformly in a straight line at $v_0 = 18\text{ m/s}$. Find the velocity of the lowest point of the flange, and the fraction of the period during which a point of the flange moves backwards relative to the ground.

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 4.9 / Problem 4.9 — Vật ném xiên từ mặt đất với tốc độ đầu 25 m/s , góc ném α chưa biết. Biết bán kính cong tại điểm ném lớn gấp 3 lần bán kính cong tại đỉnh quỹ đạo. Tìm α , bán kính cong tại đỉnh và tầm xa ($g = 9,8\text{ m/s}^2$).

A body is thrown from the ground at 25 m/s at an unknown angle α . The radius of curvature at launch is 3 times that at the top of the path. Find α , the radius of curvature at the top and the range ($g = 9.8\text{ m/s}^2$).

Bài 4.10 / Problem 4.10 — Bánh bán kính R lăn đều không trượt. Chứng minh rằng bán kính cong của quỹ đạo của điểm M trên vành, khi bánh đã quay góc φ kể từ lúc M chạm đất ($0 < \varphi \leq \pi$), là $R_c = 4R \sin(\varphi/2)$. Tính R_c khi $R = 0,25\text{ m}$ và $\varphi = 90^\circ$.

A wheel of radius R rolls uniformly without slipping. Show that the radius of curvature of the path of a rim point M , when the wheel has turned by φ since M touched the ground ($0 < \varphi \leq \pi$), is $R_c = 4R \sin(\varphi/2)$. Find R_c for $R = 0.25\text{ m}$ and $\varphi = 90^\circ$.

Bài 4.11 / Problem 4.11 — Cơ cấu tay quay – con trượt: thanh OA dài $r = 0,10\text{ m}$ quay đều quanh O với 20 rad/s ngược chiều kim đồng hồ; thanh AB dài $\ell = 0,40\text{ m}$ nối bản lề với OA tại A , đầu B trượt dọc trục Ox đi qua O . Tính tốc độ góc của thanh AB và vận tốc đầu B khi OA hợp với Ox góc (a) 90° , (b) 60° .

Crank and slider: crank OA of length $r = 0.10\text{ m}$ turns uniformly about O at 20 rad/s anticlockwise; rod AB of length $\ell = 0.40\text{ m}$ is hinged to OA at A and its end B slides along the axis Ox through O . Find the angular speed of rod AB and the velocity of end B when OA makes an angle with Ox of (a) 90° , (b) 60° .

Bài 4.12 / Problem 4.12 — Đồng hồ có ba kim quay đều (kim giây không nhảy bước). Trong khoảng thời gian từ 0 giờ đúng (tính cả thời điểm này) đến trước 12 giờ đúng, đếm số thời điểm: (a) kim giây trùng kim phút, (b) kim giây trùng kim giờ, (c) cả ba kim trùng nhau.

A clock has three hands turning uniformly (the second hand does not tick). From exactly 0:00 (counting that instant) up to but not including exactly 12:00, count the instants at which: (a) the second hand coincides with the minute hand, (b) the second hand coincides with the hour hand, (c) all three hands coincide.

4.10. Lời giải bài tự luyện — Solutions to practice problems

Bài 4.1 — Problem 4.1

1. Đổi $\omega_0 = 1500 \cdot 2\pi/60 = 50\pi \approx 157,1\text{ rad/s}$. Hãm đều đến dừng: $\omega = \omega_0 + \gamma t = 0$ tại $t = 20\text{ s}$.

Convert $\omega_0 = 1500 \cdot 2\pi/60 = 50\pi \approx 157.1\text{ rad/s}$. Uniform braking to rest: $\omega = \omega_0 + \gamma t = 0$ at $t = 20\text{ s}$.

$$\gamma = -\omega_0/t = -5\pi/2\text{ rad/s}^2$$

2. $\gamma \approx -7,85 \text{ rad/s}^2$. Góc quay đến lúc dừng $\theta = \omega_0 t/2 = 50\pi \cdot 10 = 500\pi \text{ rad}$, tức 250 vòng.
 $\gamma \approx -7.85 \text{ rad/s}^2$. The angle turned until rest is $\theta = \omega_0 t/2 = 50\pi \cdot 10 = 500\pi \text{ rad}$, i.e. 250 turns.
 3. Tại $t = 5 \text{ s}$: $\omega = 50\pi - (5\pi/2) \cdot 5 = 37,5\pi \approx 117,8 \text{ rad/s}$. Khi đó $a_n = \omega^2 r \approx 117,8^2 \cdot 0,25 \approx 3470 \text{ m/s}^2$ và $a_t = |\gamma| r \approx 1,96 \text{ m/s}^2$, $\vec{a}_t$ ngược chiều vận tốc.
At $t = 5 \text{ s}$: $\omega = 50\pi - (5\pi/2) \cdot 5 = 37.5\pi \approx 117.8 \text{ rad/s}$. Then $a_n = \omega^2 r \approx 117.8^2 \cdot 0.25 \approx 3470 \text{ m/s}^2$ and $a_t = |\gamma| r \approx 1.96 \text{ m/s}^2$, with $\vec{a}_t$ opposite to the velocity.
- Vậy $\gamma \approx -7,85 \text{ rad/s}^2$, bánh quay 250 vòng, $a_n \approx 3470 \text{ m/s}^2$ và $a_t \approx 1,96 \text{ m/s}^2$.
Hence $\gamma \approx -7.85 \text{ rad/s}^2$, the wheel makes 250 turns, $a_n \approx 3470 \text{ m/s}^2$ and $a_t \approx 1.96 \text{ m/s}^2$. ■

Bài 4.2 — Problem 4.2

1. Cùng chiều: định lý 4.22 cho chu kỳ gặp nhau:
Same sense: theorem 4.22 gives the meeting period:
$$T_g = T_1 T_2 / (T_2 - T_1) = 4 \cdot 6 / (6 - 4)$$
2. $T_g = 12 \text{ s}$: A quay 3 vòng, B quay 2 vòng.
 $T_g = 12 \text{ s}$: A makes 3 turns, B makes 2.
3. Ngược chiều: $T_g = T_1 T_2 / (T_1 + T_2) = 24/10 = 2,4 \text{ s}$. Lần gặp thứ ba lúc $t = 3 \cdot 2,4 = 7,2 \text{ s}$. A đã quay $7,2/4 = 1,8$ vòng, tức cách điểm xuất phát $0,8$ vòng $= 288^\circ$ theo chiều của A (B quay $7,2/6 = 1,2$ vòng theo chiều ngược lại, cũng đến vị trí đó).
Opposite senses: $T_g = T_1 T_2 / (T_1 + T_2) = 24/10 = 2.4 \text{ s}$. The third meeting is at $t = 3 \cdot 2.4 = 7.2 \text{ s}$. A has made $7.2/4 = 1.8$ turns, so it is $0.8 \text{ turn} = 288^\circ$ from the start in A's sense (B has made $7.2/6 = 1.2$ turns the other way and arrives at the same place).
4. Lúc $t = 1 \text{ s}$: A ở 90° (chiều dương), B ở -60° . Góc giữa hai bán kính là 150° , nên khoảng cách $d = 2r \sin(150^\circ/2) = 2 \cdot 0,5 \cdot \sin 75^\circ \approx 0,966 \text{ m}$.
At $t = 1 \text{ s}$: A is at 90° (positive sense), B at -60° . The angle between the radii is 150° , so the distance is $d = 2r \sin(150^\circ/2) = 2 \cdot 0.5 \cdot \sin 75^\circ \approx 0.966 \text{ m}$.

Vậy (a) 12 s; (b) 7,2 s, cách điểm xuất phát 288° theo chiều của A; (c) khoảng 0,966 m.
Hence (a) 12 s; (b) 7.2 s, 288° from the start in A's sense; (c) about 0.966 m. ■

Bài 4.3 — Problem 4.3

1. Tại điểm ném $\vec{v}$ nằm ngang, $\vec{g}$ vuông góc với $\vec{v}$ nên $a_n = g$ và $R = v_0^2/g = 144/9,8 \approx 14,7 \text{ m}$.
At launch $\vec{v}$ is horizontal and $\vec{g}$ is perpendicular to it, so $a_n = g$ and $R = v_0^2/g = 144/9.8 \approx 14.7 \text{ m}$.
2. Sau 1,0 s: $v_x = 12 \text{ m/s}$, $v_y = gt = 9,8 \text{ m/s}$, $v^2 = 144 + 96,04 = 240,04$, $v \approx 15,5 \text{ m/s}$.
After 1.0 s: $v_x = 12 \text{ m/s}$, $v_y = gt = 9.8 \text{ m/s}$, $v^2 = 144 + 96.04 = 240.04$, $v \approx 15.5 \text{ m/s}$.
3. Góc θ giữa $\vec{v}$ và phương ngang có $\cos \theta = v_x/v \approx 0,775$, nên $a_n = g \cos \theta \approx 7,59 \text{ m/s}^2$ và:
The angle θ between $\vec{v}$ and the horizontal has $\cos \theta = v_x/v \approx 0.775$, so $a_n = g \cos \theta \approx 7.59 \text{ m/s}^2$ and:

$$R = v^2/a_n = 240/7,59$$

Vậy $R \approx 14,7$ m tại điểm ném và $R \approx 31,6$ m sau 1,0 s (khớp $R = R_1/\cos^3\theta$ với $R_1 = 14,7$ m).

Hence $R \approx 14.7$ m at launch and $R \approx 31.6$ m after 1.0 s (consistent with $R = R_1/\cos^3\theta$ and $R_1 = 14.7$ m). ■

Bài 4.4 — Problem 4.4

1. Xích nối đĩa với líp: $\omega_{\text{đĩa}}Z_{\text{đĩa}} = \omega_{\text{líp}}Z_{\text{líp}}$ theo (4.19), nên $n_{\text{líp}} = 60 \cdot 48/16 = 180$ vòng/phút.
The chain joins chainring and sprocket: $\omega_{\text{ring}}Z_{\text{ring}} = \omega_{\text{spr}}Z_{\text{spr}}$ by (4.19), so $n_{\text{spr}} = 60 \cdot 48/16 = 180$ rev/min.

2. Líp cùng trục với bánh sau nên bánh sau cũng 180 vòng/phút, $\omega = 180 \cdot 2\pi/60 = 6\pi \approx 18,85$ rad/s.

The sprocket shares the shaft with the rear wheel, so the wheel also turns at 180 rev/min, $\omega = 180 \cdot 2\pi/60 = 6\pi \approx 18.85$ rad/s.

$$v = \omega R, \quad a_n = \omega^2 R$$

3. $v = 18,85 \cdot 0,34 \approx 6,41$ m/s (khoảng 23 km/h). Đối với khung xe, điểm vành quay đều quanh trục với $a_n = \omega^2 R \approx 355,3 \cdot 0,34 \approx 121$ m/s².

$v = 18.85 \cdot 0.34 \approx 6.41$ m/s (about 23 km/h). Relative to the frame a rim point turns uniformly about the axle with $a_n = \omega^2 R \approx 355.3 \cdot 0.34 \approx 121$ m/s².

Vậy bánh sau quay 180 vòng/phút, xe chạy khoảng 6,41 m/s, gia tốc hướng tâm của điểm vành đối với khung xe khoảng 121 m/s².

Hence the rear wheel turns at 180 rev/min, the bicycle moves at about 6.41 m/s, and the centripetal acceleration of a rim point relative to the frame is about 121 m/s². ■

Bài 4.5 — Problem 4.5

1. Chọn O làm gốc, Ox dọc sàn. $A = (1,2; 0)$, $B = (0,6; 0,6\sqrt{3}) \approx (0,6; 1,039)$ m. Vận tốc A nằm ngang, vận tốc B dọc theo mặt nghiêng (phương 60°).

Take O as origin with Ox along the floor. $A = (1.2, 0)$, $B = (0.6, 0.6\sqrt{3}) \approx (0.6, 1.039)$ m. The velocity of A is horizontal, that of B is along the incline (direction 60°).

2. Tâm quay tức thời P là giao của đường thẳng đứng qua A ($x = 1,2$) với đường qua B vuông góc mặt nghiêng, có phương $(-\sqrt{3}/2; 1/2)$. Từ B đi s theo phương đó: $0,6 - (\sqrt{3}/2)s = 1,2$ cho $s = -0,4\sqrt{3} \approx -0,693$ m, nên $P = (1,2; 0,693)$ m.

The instantaneous centre P is where the vertical line through A ($x = 1.2$) meets the line through B perpendicular to the incline, with direction $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$. From B go a distance s along it: $0.6 - (\sqrt{3}/2)s = 1.2$ gives $s = -0.4\sqrt{3} \approx -0.693$ m, so $P = (1.2, 0.693)$ m.

$$PA = PB = 2\sqrt{3}/5 \approx 0,693 \text{ m}$$

3. $\omega = v_A/PA = 0,5/0,693 \approx 0,722$ rad/s. Vì $PB = PA$ nên $v_B = \omega \cdot PB = 0,5$ m/s, hướng vuông góc với PB, tức dọc mặt nghiêng. Hình chiếu vận tốc lên AB (hướng từ A tới B là $(-1/2; \sqrt{3}/2)$): v_A cho $-0,25$ m/s nên v_B phải chiếu ra $-0,25$ m/s, cho v_B đi xuống mặt nghiêng về phía O.

$\omega = v_A/PA = 0.5/0.693 \approx 0.722$ rad/s. Since $PB = PA$, $v_B = \omega \cdot PB = 0.5$ m/s, perpendicular to PB, i.e. along the incline. The projection of the velocities on AB (direction from A to B is

$(-1/2, \sqrt{3}/2)$: v_A gives -0.25 m/s, so v_B must project to -0.25 m/s, which makes B move down the incline towards O .

4. Trung điểm $M = (0,9; 0,520)$ cách P : $PM = \sqrt{(0,3^2 + 0,173^2)} \approx 0,346$ m, nên $v_M = \omega \cdot PM \approx 0,722 \cdot 0,346 = 0,25$ m/s.

The midpoint $M = (0.9, 0.520)$ is at $PM = \sqrt{(0.3^2 + 0.173^2)} \approx 0.346$ m from P , so $v_M = \omega \cdot PM \approx 0.722 \cdot 0.346 = 0.25$ m/s.

Vậy $\omega \approx 0,72$ rad/s, $v_B = 0,5$ m/s đi xuống dọc mặt nghiêng về phía O , $v_M = 0,25$ m/s.

Hence $\omega \approx 0.72$ rad/s, $v_B = 0.5$ m/s down the incline towards O , $v_M = 0.25$ m/s. ■

Bài 4.6 — Problem 4.6

1. Cuộn chỉ lăn không trượt nên điểm tiếp xúc sàn là tâm quay tức thời. Gọi ω là tốc độ góc, tâm cuộn có $v_O = \omega R$, cuộn quay thuận chiều kim đồng hồ khi đi sang phải.
The reel rolls without slipping, so the point of contact with the floor is the instantaneous centre. With angular speed ω the centre has $v_O = \omega R$ and the reel turns clockwise when moving right.

2. (a) Chỉ đi ra từ điểm dưới của lõi, cách tâm r về phía dưới, cách điểm tiếp xúc $R - r$. Tốc độ của điểm đó cũng là tốc độ đầu chỉ vì chỉ căng và nằm ngang:

(a) The thread leaves from the bottom point of the core, a distance r below the centre and $R - r$ above the contact point. The speed of that point is also the speed of the thread end, since the thread is taut and horizontal:

$$u = \omega(R - r), \quad v_O = \omega R = uR/(R - r)$$

3. $\omega = 0,12/0,02 = 6,0$ rad/s và $v_O = 6,0 \cdot 0,03 = 0,18$ m/s, cùng chiều kéo.
 $\omega = 0.12/0.02 = 6.0$ rad/s and $v_O = 6.0 \cdot 0.03 = 0.18$ m/s, in the direction of the pull.

4. (b) Chỉ đi ra từ điểm trên của lõi, cách điểm tiếp xúc $R + r$: $u = \omega(R + r)$, nên $\omega = 0,12/0,04 = 3,0$ rad/s và $v_O = 3,0 \cdot 0,03 = 0,09$ m/s, vẫn cùng chiều kéo.

(b) The thread leaves from the top point of the core, a distance $R + r$ above the contact point: $u = \omega(R + r)$, so $\omega = 0.12/0.04 = 3.0$ rad/s and $v_O = 3.0 \cdot 0.03 = 0.09$ m/s, still in the direction of the pull.

5. (c) Cuộn quay 5 vòng, tâm dời $5 \cdot 2\pi R = 0,3\pi \approx 0,942$ m. Tỷ số tốc độ đầu chỉ trên tâm là $(R - r)/R = 2/3$ nên đầu chỉ dời $0,628$ m.

(c) Five turns move the centre $5 \cdot 2\pi R = 0.3\pi \approx 0.942$ m. The ratio of the thread end's speed to the centre's is $(R - r)/R = 2/3$, so the thread end moves 0.628 m.

Vậy (a) $v_O = 0,18$ m/s, $\omega = 6,0$ rad/s; (b) $v_O = 0,09$ m/s, $\omega = 3,0$ rad/s; (c) tâm dời $0,942$ m, đầu chỉ dời $0,628$ m.

Hence (a) $v_O = 0.18$ m/s, $\omega = 6.0$ rad/s; (b) $v_O = 0.09$ m/s, $\omega = 3.0$ rad/s; (c) the centre moves 0.942 m, the thread end 0.628 m. ■

Bài 4.7 — Problem 4.7

1. Tốc độ góc quỹ đạo $\Omega = 2\pi/8,0 = \pi/4 \approx 0,785$ rad/s. Tâm bánh cách tâm vành $R + r = 0,080$ m.

The orbital angular speed is $\Omega = 2\pi/8.0 = \pi/4 \approx 0.785$ rad/s. The wheel's centre is $R + r = 0.080$ m from the ring's centre.

$$v_0 = \Omega(R + r), \quad \omega = v_0/r = \Omega(R + r)/r$$

- $v_0 = 0,080\pi/4 \approx 0,0628 \text{ m/s}$ và $\omega = 0,0628/0,020 = \pi \approx 3,14 \text{ rad/s}$, cùng chiều chuyển động quanh vành.
 $v_0 = 0.080\pi/4 \approx 0.0628 \text{ m/s}$ and $\omega = 0.0628/0.020 = \pi \approx 3.14 \text{ rad/s}$, in the same sense as the motion round the ring.
- Trong 8,0 s bánh quay $\omega T/(2\pi) = \pi \cdot 8,0/(2\pi) = 4$ vòng, đúng $(R + r)/r = 4$.
In 8.0 s the wheel turns $\omega T/(2\pi) = \pi \cdot 8.0/(2\pi) = 4$ turns, exactly $(R + r)/r = 4$.
- Tiếp điểm K đứng yên và nằm giữa tâm vành và tâm bánh. Điểm xa tâm vành nhất đối tâm với K qua O của bánh, cách K đoạn $2r$, nên có tốc độ $\omega \cdot 2r = 2v_0 \approx 0,126 \text{ m/s}$.
The contact point K is at rest and lies between the ring's centre and the wheel's centre. The point farthest from the ring's centre is diametrically opposite K through the wheel's centre, at distance $2r$ from K, so its speed is $\omega \cdot 2r = 2v_0 \approx 0.126 \text{ m/s}$.

Vậy $v_0 \approx 0,0628 \text{ m/s}$, $\omega = \pi \text{ rad/s}$, bánh tự quay 4 vòng mỗi chu kỳ, điểm xa nhất có tốc độ khoảng $0,126 \text{ m/s}$.

Hence $v_0 \approx 0.0628 \text{ m/s}$, $\omega = \pi \text{ rad/s}$, the wheel spins 4 times per period, and the farthest point moves at about 0.126 m/s . ■

Bài 4.8 — Problem 4.8

- Lăn không trượt ở vòng bán kính R : $\omega = v_0/R = 18/0,45 = 40 \text{ rad/s}$.
Rolling without slipping at radius R : $\omega = v_0/R = 18/0.45 = 40 \text{ rad/s}$.
- Điểm của gờ, ở vị trí góc ψ tính từ phương thẳng đứng hướng xuống, có thành phần ngang của vận tốc theo (4.10):
A flange point at angle ψ from the downward vertical has horizontal velocity component, by (4.10):

$$v_x = v_0 - \omega R_g \cos \psi$$

- Điểm thấp nhất của gờ ($\psi = 0$): $v_x = 18 - 40 \cdot 0,50 = -2 \text{ m/s}$, tức chuyển động lùi 2 m/s .
The lowest flange point ($\psi = 0$): $v_x = 18 - 40 \cdot 0.50 = -2 \text{ m/s}$, i.e. moving backwards at 2 m/s .
- Điểm gờ lùi khi $v_x < 0$, tức $\cos \psi > v_0/(\omega R_g) = R/R_g = 0,9$, hay $|\psi| < \arccos 0,9 \approx 25,84^\circ$. Góc ψ tăng đều theo thời gian nên phần chu kỳ là $2 \cdot 25,84^\circ/360^\circ \approx 0,144$.
The flange point moves backwards when $v_x < 0$, i.e. $\cos \psi > v_0/(\omega R_f) = R/R_f = 0.9$, or $|\psi| < \arccos 0.9 \approx 25.84^\circ$. The angle ψ grows uniformly in time, so the fraction of the period is $2 \cdot 25.84^\circ/360^\circ \approx 0.144$.

Vậy điểm thấp nhất của gờ chạy lùi 2 m/s , và mỗi điểm của gờ chuyển động lùi trong khoảng $14,4\%$ chu kỳ.

Hence the lowest flange point runs backwards at 2 m/s , and each flange point moves backwards for about 14.4% of the period. ■

Bài 4.9 — Problem 4.9

- Theo hệ quả 4.9: $R_2/R_1 = [v_0^2/(g \cos \alpha)] / [v_0^2 \cos^2 \alpha/g] = 1/\cos^3 \alpha$.
By corollary 4.9: $R_2/R_1 = [v_0^2/(g \cos \alpha)] / [v_0^2 \cos^2 \alpha/g] = 1/\cos^3 \alpha$.

$$1/\cos^3\alpha = 3 \Rightarrow \cos\alpha = 3^{-1/3}$$

2. $\cos\alpha \approx 0,6934$, nên $\alpha \approx 46,1^\circ$. Khi đó $\cos^2\alpha \approx 0,4808$ và $R_1 = v_0^2\cos^2\alpha/g \approx 625 \cdot 0,4808/9,8 \approx 30,7$ m ($R_2 \approx 92,0$ m).
 $\cos\alpha \approx 0.6934$, so $\alpha \approx 46.1^\circ$. Then $\cos^2\alpha \approx 0.4808$ and $R_1 = v_0^2\cos^2\alpha/g \approx 625 \cdot 0.4808/9.8 \approx 30.7$ m ($R_2 \approx 92.0$ m).
3. Tầm xa $L = v_0^2\sin 2\alpha/g$ với $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \approx 2 \cdot 0,7206 \cdot 0,6934 \approx 0,9993$, nên $L \approx 625 \cdot 0,9993/9,8 \approx 63,7$ m.
The range is $L = v_0^2\sin 2\alpha/g$ with $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \approx 2 \cdot 0.7206 \cdot 0.6934 \approx 0.9993$, so $L \approx 625 \cdot 0.9993/9.8 \approx 63.7$ m.

Vậy $\alpha \approx 46,1^\circ$, bán kính cong tại đỉnh khoảng 30,7 m, tầm xa khoảng 63,7 m.

Hence $\alpha \approx 46.1^\circ$, the radius of curvature at the top is about 30.7 m, and the range is about 63.7 m. ■

Bài 4.10 — Problem 4.10

1. Gọi O là tâm, P là điểm tiếp xúc (tâm quay tức thời). Tam giác OPM cân tại O với góc đỉnh φ , nên $PM = 2R \sin(\varphi/2)$ và góc $OMP = (\pi - \varphi)/2$.
Let O be the centre and P the contact point (instantaneous centre). Triangle OPM is isosceles at O with apex angle φ , so $PM = 2R \sin(\varphi/2)$ and angle $OMP = (\pi - \varphi)/2$.
2. Vận tốc của M vuông góc với PM, độ lớn $v = \omega \cdot PM = 2\omega R \sin(\varphi/2)$. Pháp tuyến của quỹ đạo tại M do đó nằm dọc MP.
The velocity of M is perpendicular to PM with magnitude $v = \omega \cdot PM = 2\omega R \sin(\varphi/2)$. The normal to the path at M therefore lies along MP.
3. Gia tốc của M có độ lớn $\omega^2 R$ và hướng từ M tới O (tính chất 4.18). Thành phần dọc MP là gia tốc pháp tuyến:
The acceleration of M has magnitude $\omega^2 R$ and points from M to O (property 4.18). Its component along MP is the normal acceleration:

$$a_n = \omega^2 R \cos[(\pi - \varphi)/2] = \omega^2 R \sin(\varphi/2)$$

$$R_c = v^2/a_n = 4\omega^2 R^2 \sin^2(\varphi/2) / [\omega^2 R \sin(\varphi/2)] = 4R \sin(\varphi/2)$$

4. Với $R = 0,25$ m và $\varphi = 90^\circ$: $R_c = 4 \cdot 0,25 \cdot \sin 45^\circ = 1,0 \cdot 0,7071 \approx 0,707$ m.
With $R = 0.25$ m and $\varphi = 90^\circ$: $R_c = 4 \cdot 0.25 \cdot \sin 45^\circ = 1.0 \cdot 0.7071 \approx 0.707$ m.

Vậy $R_c = 4R \sin(\varphi/2)$; tại $\varphi = \pi$ cho $4R$ (đỉnh vòm), khi φ dần tới 0 thì R_c dần tới 0 (mũi nhọn), và với dữ kiện đã cho $R_c \approx 0,707$ m.

Hence $R_c = 4R \sin(\varphi/2)$; at $\varphi = \pi$ it gives $4R$ (the top of the arch), as φ tends to 0 so does R_c (the cusp), and for the given data $R_c \approx 0.707$ m. ■

Bài 4.11 — Problem 4.11

1. $v_A = \omega r = 2,0$ m/s, vuông góc với OA. B chỉ chạy dọc Ox nên $\vec{v}_B$ nằm ngang.
 $v_A = \omega r = 2.0$ m/s, perpendicular to OA. B runs only along Ox, so $\vec{v}_B$ is horizontal.
2. (a) OA vuông góc với Ox nên $\vec{v}_A$ nằm ngang, song song $\vec{v}_B$. Hai đường vuông góc với vận tốc song song và thẳng đứng nên tâm quay tức thời ở vô cực: thanh AB tịnh tiến tức thời, $\omega_{AB} = 0$ và $v_B = v_A = 2,0$ m/s, hướng theo -x.

(a) OA is perpendicular to Ox , so $\vec{v}_A$ is horizontal, parallel to $\vec{v}_B$. The perpendiculars to the velocities are parallel and vertical, so the instantaneous centre is at infinity: rod AB is in instantaneous translation, $\omega_{AB} = 0$ and $v_B = v_A = 2.0$ m/s, along $-x$.

3. (b) $\theta = 60^\circ$: $A = (0.05; 0.0866)$ m, $\vec{v}_A = (-1.732; 1.0)$ m/s. Hoành độ B: $x_B = r \cos \theta + \sqrt{\ell^2 - r^2 \sin^2 \theta} = 0.05 + 0.3905 = 0.4405$ m. Tâm quay tức thời P là giao của đường thẳng OA (vuông góc với $\vec{v}_A$) với đường thẳng đứng qua B, nên $P = (x_B; x_B \tan \theta) = (0.4405; 0.7630)$ m.

(b) $\theta = 60^\circ$: $A = (0.05, 0.0866)$ m, $\vec{v}_A = (-1.732, 1.0)$ m/s. The abscissa of B is $x_B = r \cos \theta + \sqrt{\ell^2 - r^2 \sin^2 \theta} = 0.05 + 0.3905 = 0.4405$ m. The instantaneous centre P is where line OA (perpendicular to $\vec{v}_A$) meets the vertical through B, so $P = (x_B, x_B \tan \theta) = (0.4405, 0.7630)$ m.

$$PA = (x_B - r \cos \theta) / \cos \theta, \quad \omega_{AB} = v_A / PA, \quad v_B = \omega_{AB} \cdot PB$$

4. $PA = 0.3905/0.5 = 0.781$ m nên $\omega_{AB} = 2.0/0.781 \approx 2.56$ rad/s (thuận chiều kim đồng hồ). $PB = 0.7630$ m nên $v_B = 2.56 \cdot 0.763 \approx 1.95$ m/s, hướng theo $-x$.

$PA = 0.3905/0.5 = 0.781$ m so $\omega_{AB} = 2.0/0.781 \approx 2.56$ rad/s (clockwise). $PB = 0.7630$ m so $v_B = 2.56 \cdot 0.763 \approx 1.95$ m/s, along $-x$.

Vậy (a) $\omega_{AB} = 0$ và $v_B = 2.0$ m/s; (b) $\omega_{AB} \approx 2.56$ rad/s và $v_B \approx 1.95$ m/s, cả hai hướng về phía O theo chiều âm của Ox .

Hence (a) $\omega_{AB} = 0$ and $v_B = 2.0$ m/s; (b) $\omega_{AB} \approx 2.56$ rad/s and $v_B \approx 1.95$ m/s, both towards O along the negative direction of Ox . ■

Bài 4.12 — Problem 4.12

1. Tốc độ góc theo vòng/giờ: kim giờ $1/12$, kim phút 1, kim giây 60. Hai kim trùng nhau khi hiệu góc là số nguyên vòng, theo định lý 4.22.

Angular speeds in turns per hour: hour hand $1/12$, minute hand 1, second hand 60. Two hands coincide when their angle difference is a whole number of turns, by theorem 4.22.

2. (a) Tốc độ tương đối kim giây – kim phút là 59 vòng/giờ, từ $t = 0$ hai kim trùng tại $t = m/59$ giờ, $m = 0, 1, 2, \dots$. Điều kiện $t < 12$ cho $m < 708$, tức $m = 0$ đến 707: 708 thời điểm.

(a) The relative speed of second and minute hands is 59 turns per hour, and from $t = 0$ they coincide at $t = m/59$ hours, $m = 0, 1, 2, \dots$. The condition $t < 12$ gives $m < 708$, i.e. $m = 0$ to 707: 708 instants.

3. (b) Tốc độ tương đối kim giây – kim giờ là $60 - 1/12 = 719/12$ vòng/giờ, trùng tại $t = 12m/719$ giờ. $t < 12$ cho $m < 719$, tức $m = 0$ đến 718: 719 thời điểm.

(b) The relative speed of second and hour hands is $60 - 1/12 = 719/12$ turns per hour, and they coincide at $t = 12m/719$ hours. $t < 12$ gives $m < 719$, i.e. $m = 0$ to 718: 719 instants.

4. (c) Ba kim trùng khi kim giờ trùng kim phút và kim giây trùng kim giờ. Kim phút trùng kim giờ tại $t = 12k/11$ giờ (k nguyên). Cần $12k/11 = 12m/719$, tức $719k = 11m$. Vì 719 là số nguyên tố khác 11 nên 11 chia hết k , suy ra $t = 12 \cdot (k/11)$ là bội số của 12 giờ. Trong khoảng đang xét chỉ còn $t = 0$.

(c) All three coincide when the minute hand meets the hour hand and the second hand meets the hour hand. The minute hand meets the hour hand at $t = 12k/11$ hours (k an integer). We

need $12k/11 = 12m/719$, i.e. $719k = 11m$. Since 719 is a prime different from 11, 11 divides k , so $t = 12 \cdot (k/11)$ is a multiple of 12 hours. In the interval considered only $t = 0$ remains.

Vậy (a) 708 thời điểm, (b) 719 thời điểm, (c) đúng 1 thời điểm là 0 giờ đúng.

Hence (a) 708 instants, (b) 719 instants, (c) exactly 1 instant, exactly 0:00. ■

Chương 5. Các định luật Newton và các lực cơ học — Chapter 5. Newton's laws and mechanical forces

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Áp dụng ba định luật Newton trong hệ quy chiếu quán tính: tách vật, vẽ đủ lực, chọn trục, chiếu và giải.
Apply Newton's three laws in an inertial frame: isolate each body, draw every force, choose axes, project and solve.
- Phân biệt và tính đúng lực đàn hồi, ma sát nghỉ, ma sát trượt, lực cản của chất lưu; dùng góc ma sát và tìm lực kéo nhỏ nhất.
Tell apart and compute elastic force, static and kinetic friction and fluid drag; use the friction angle and find the smallest pulling force.
- Xử lý dây có khối lượng, hệ vật nối bằng dây, máy Atwood và ròng rọc động bằng điều kiện dây không giãn.
Handle massive ropes, bodies joined by strings, the Atwood machine and movable pulleys through the inextensible-string condition.
- Biện luận trạng thái của hệ (đứng yên hay chuyển động, dây căng hay chùng, vật còn tựa mặt hay không) trước khi tính gia tốc.
Decide the state of the system (rest or motion, taut or slack string, contact kept or lost) before computing any acceleration.

5.1. Ba định luật Newton, hệ quy chiếu quán tính và khối lượng — Newton's three laws, inertial frames and mass

Quy ước ký hiệu của chương. Tiếng Việt: trọng lực P , ma sát F_{ms} , lực đàn hồi F_{dh} , lực cản F_c , hệ số ma sát nghỉ μ_n và hệ số ma sát trượt μ . Tiếng Anh: weight W , friction F_{fr} , elastic force F_{el} , drag F_d , coefficients μ_s and μ . Trong các dòng công thức riêng, dùng chung cho hai ngôn ngữ, ma sát viết là f , hệ số ma sát nghỉ là μ_0 . Khi đề chỉ cho một hệ số ma sát μ thì hiểu $\mu_n = \mu$. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Notation for the chapter. English: weight W , friction F_{fr} , elastic force F_{el} , drag F_d , coefficients μ_s (static) and μ (kinetic). Vietnamese: P , F_{ms} , F_{dh} , F_c , μ_n , μ . In the displayed formulas, shared by both languages, friction is written f and the static coefficient μ_0 . When a problem gives a single coefficient μ , read $\mu_s = \mu$. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

ĐỊNH NGHĨA 5.1 (Hệ quy chiếu quán tính) / DEFINITION 5.1 (Inertial frame) — Hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu trong đó một vật không chịu lực nào, hoặc chịu các lực triệt tiêu nhau, giữ nguyên trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều. Mọi hệ chuyển động thẳng đều so với một hệ quán tính cũng là hệ quán tính.

An inertial frame is a frame in which a body acted on by no force, or by forces that cancel, stays at rest or moves in a straight line at constant speed. Every frame moving uniformly relative to an inertial frame is inertial as well.

ĐỊNH LUẬT 5.2 (Định luật I Newton) / LAW 5.2 (Newton's first law) — Tồn tại những hệ quy chiếu quán tính. Trong hệ quán tính, vật có hợp lực tác dụng bằng 0 thì đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Inertial frames exist. In an inertial frame, a body with zero net force on it stays at rest or moves uniformly in a straight line.

ĐỊNH LUẬT 5.3 (Định luật II Newton) / LAW 5.3 (Newton's second law) — Trong hệ quán tính, gia tốc của một chất điểm cùng hướng với hợp lực tác dụng lên nó, độ lớn tỉ lệ với hợp lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng: $\vec{F} = m\vec{a}$. Ở đây $\vec{F}$ là tổng vector của mọi lực tác dụng lên chính vật đang xét.

In an inertial frame the acceleration of a particle points along the net force on it, and its magnitude is proportional to that force and inversely proportional to the mass: $\vec{F} = m\vec{a}$. Here $\vec{F}$ is the vector sum of all forces acting on the body under study.

ĐỊNH LUẬT 5.4 (Định luật III Newton) / LAW 5.4 (Newton's third law) — Khi vật 1 tác dụng lên vật 2 lực $\vec{F}_{12}$, vật 2 tác dụng lại vật 1 lực $\vec{F}_{21}$ cùng độ lớn, ngược chiều, cùng đường tác dụng: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Hai lực đặt vào hai vật khác nhau và cùng bản chất.

When body 1 exerts a force $\vec{F}_{12}$ on body 2, body 2 exerts on body 1 a force $\vec{F}_{21}$ of equal magnitude, opposite direction and the same line of action: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. The two forces act on different bodies and are of the same kind.

Phạm vi: ba định luật dùng cho vật có tốc độ nhỏ hơn nhiều so với tốc độ ánh sáng, và cho chất điểm hoặc vật chuyển động tịnh tiến. Định luật III đúng ở mọi thời điểm với lực tiếp xúc; hai lực của cặp này không bao giờ khử nhau vì chúng đặt vào hai vật.

Scope: the laws hold for speeds far below the speed of light, and for a particle or a body in pure translation. The third law applies at every instant for contact forces; the two forces of a pair never cancel, because they act on two different bodies.

HỆ QUẢ 5.5 (Khối lượng đo mức quán tính) / COROLLARY 5.5 (Mass measures inertia)

— Hai vật chỉ tương tác với nhau, không chịu lực ngoài, có gia tốc a_1, a_2 thỏa $m_1a_1 = m_2a_2$. Tỉ số khối lượng bằng nghịch đảo tỉ số độ lớn gia tốc: $m_1/m_2 = a_2/a_1$.

Two bodies that interact only with each other, with no external force, have accelerations a_1, a_2 obeying $m_1a_1 = m_2a_2$. The mass ratio equals the inverse ratio of the acceleration magnitudes: $m_1/m_2 = a_2/a_1$.

Chứng minh. / Proof.

Theo định luật II, $m_1a_1 = F_{21}$ và $m_2a_2 = F_{12}$, cả hai là độ lớn lực mà vật kia tác dụng lên.

By the second law, $m_1a_1 = F_{21}$ and $m_2a_2 = F_{12}$, the magnitudes of the force each body receives from the other.

Theo định luật III, $F_{12} = F_{21}$, nên $m_1a_1 = m_2a_2$.

By the third law $F_{12} = F_{21}$, so $m_1a_1 = m_2a_2$.

$$m_1/m_2 = a_2/a_1 \quad (5.1)$$

■

Vật nặng hơn thì gia tốc nhỏ hơn khi cùng nhận một lực. Hai xe đẩy nối bằng lò xo nén rồi buông ra có gia tốc tỉ lệ nghịch với khối lượng, nên xe nặng gấp ba chạy chậm đi ba lần ở mỗi thời điểm.

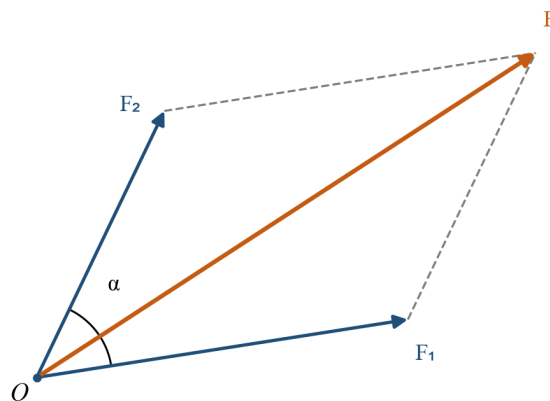
In practice a heavier body accelerates less under the same force. Two carts pushed apart by a compressed spring have accelerations in inverse ratio to their masses, so a cart three times heavier is three times slower at every instant.

NHẬN XÉT / REMARK — Ngựa kéo xe và xe kéo ngựa bằng hai lực bằng nhau, vậy sao xe chuyển động? Hai lực của cặp định luật III đặt vào hai vật nên không khử nhau. Xe chuyển động tiến lên vì lực kéo của ngựa lớn hơn ma sát tác dụng lên xe. Ngựa tiến lên vì chân ngựa đẩy đất ra sau và đất đẩy ngựa ra trước bằng ma sát nghỉ, lực này lớn hơn lực xe kéo ngựa lại. *The horse pulls the cart and the cart pulls the horse with equal force, so why does the cart move? The two forces of a third-law pair act on two bodies and do not cancel. The cart speeds up because the horse's pull exceeds the friction on the cart. The horse moves forward because its hooves push the ground back and the ground pushes the horse forward by static friction, a force larger than the cart's pull on the horse.*

5.2. Tổng hợp và phân tích lực — Composition and resolution of forces

Lực là đại lượng vector, đặc trưng bởi điểm đặt, phương, chiều và độ lớn (đơn vị $N = kg \cdot m/s^2$). Các lực cùng đặt vào một chất điểm thay được bằng hợp lực, bằng tổng vector của chúng, vẽ theo quy tắc hình bình hành hoặc quy tắc đa giác (nối đầu lực này với gốc lực kia). Phân tích một lực là thay nó bằng hai hay nhiều thành phần mà tổng vector bằng chính nó; phép phân tích thuận tiện nhất khi các phương chọn trùng với phương gia tốc và phương vuông góc với nó.

Force is a vector with a point of application, a direction and a magnitude (unit $N = kg \cdot m/s^2$). Forces acting on one particle can be replaced by their resultant, the vector sum, drawn by the parallelogram rule or the polygon rule (head of one force to the tail of the next). Resolving a force means replacing it by two or more components whose vector sum is the force itself; the most convenient directions are the line of the acceleration and the line perpendicular to it.



Hình 5.1. Hợp của hai lực theo quy tắc hình bình hành

Figure 5.1. Resultant of two forces by the parallelogram rule

ĐỊNH LÝ 5.6 (Độ lớn của hợp lực) / THEOREM 5.6 (Magnitude of the resultant) — Hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đặt vào một chất điểm, hợp nhau góc α , có hợp lực với độ lớn $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos \alpha$. Do đó $|F_1 - F_2| \leq F \leq F_1 + F_2$, dấu bằng bên phải ứng với $\alpha = 0$, bên trái ứng với $\alpha = 180^\circ$.

Two forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ acting on a particle at angle α have a resultant of magnitude $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$. Hence $|F_1 - F_2| \leq F \leq F_1 + F_2$; the right-hand equality holds for $\alpha = 0$, the left-hand one for $\alpha = 180^\circ$.

Chứng minh. / Proof.

Đặt $\vec{F}_1$ dọc trục x. Khi đó $\vec{F}_2$ có thành phần $F_2\cos\alpha$ và $F_2\sin\alpha$. Hợp lực có $F_x = F_1 + F_2\cos\alpha$, $F_y = F_2\sin\alpha$.

Put $\vec{F}_1$ along the x axis. Then $\vec{F}_2$ has components $F_2\cos\alpha$ and $F_2\sin\alpha$. The resultant has $F_x = F_1 + F_2\cos\alpha$, $F_y = F_2\sin\alpha$.

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 = F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha + F_2^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \quad (5.2)$$

Vì $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ta được công thức cần chứng minh. Do $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, F^2 nằm giữa $(F_1 - F_2)^2$ và $(F_1 + F_2)^2$.

Since $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ the formula follows. As $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, F^2 lies between $(F_1 - F_2)^2$ and $(F_1 + F_2)^2$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho độ lớn các lực và góc giữa chúng, không cho hệ trục. Công thức độ lớn hợp lực trả lời thẳng, không cần dựng trục để chiếu. Ba câu hỏi cùng một công thức: khoảng giá trị khi góc tự do, góc khi biết hợp lực, hợp lực khi biết góc.

The statement gives the force magnitudes and the angle between them, with no axes. The resultant formula answers directly, with no need to build axes and project. Three questions use the same formula: the range of values when the angle is free, the angle when the resultant is known, the resultant when the angle is known.

VÍ DỤ 5.1 (Độ lớn hợp lực) / EXAMPLE 5.1 (Magnitude of a resultant) — Hai lực đồng phẳng 6 N và 10 N đặt vào cùng một chất điểm. (a) Hợp lực có thể nhận những giá trị nào? (b) Hợp lực bằng 14 N thì hai lực hợp nhau góc bao nhiêu? (c) Hai lực vuông góc thì hợp lực bao nhiêu?

Two coplanar forces of 6 N and 10 N act on the same particle. (a) Which values can the resultant take? (b) For a resultant of 14 N, what is the angle between the forces? (c) What is the resultant when they are perpendicular?

Lời giải. / Solution.

1. Theo (5.2), F biến thiên từ $|10 - 6| = 4$ N (hai lực ngược chiều) đến $10 + 6 = 16$ N (cùng chiều); mọi giá trị trong khoảng đó đều đạt được khi α thay đổi.

By (5.2), F ranges from $|10 - 6| = 4$ N (opposite forces) to $10 + 6 = 16$ N (same direction); every value in between occurs as α varies.

2. Với F = 14 N: $196 = 36 + 100 + 120\cos\alpha$, suy ra $\cos\alpha = 1/2$ và $\alpha = 60^\circ$.

For F = 14 N: $196 = 36 + 100 + 120\cos\alpha$, so $\cos\alpha = 1/2$ and $\alpha = 60^\circ$.

3. Với $\alpha = 90^\circ$, $\cos\alpha = 0$ nên $F = \sqrt{36 + 100} = \sqrt{136} \approx 11,7$ N.

For $\alpha = 90^\circ$, $\cos\alpha = 0$ so $F = \sqrt{36 + 100} = \sqrt{136} \approx 11.7$ N.

Vậy $4 \text{ N} \leq F \leq 16 \text{ N}$; góc giữa hai lực là 60° khi F = 14 N; hợp lực khi hai lực vuông góc là khoảng 11,7 N.

Hence $4\text{ N} \leq F \leq 16\text{ N}$; the angle is 60° for $F = 14\text{ N}$; the resultant of perpendicular forces is about 11.7 N . ■

HỆ QUẢ 5.7 (Hệ thức Lami) / COROLLARY 5.7 (Lami's relation) — Ba lực đồng phẳng, không song song, đặt vào một chất điểm cân bằng. Khi đó đường tác dụng của chúng đồng quy, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ và $F_1/\sin \alpha_1 = F_2/\sin \alpha_2 = F_3/\sin \alpha_3$, trong đó α_1 là góc giữa $\vec{F}_2$ và $\vec{F}_3$, α_2 là góc giữa $\vec{F}_3$ và $\vec{F}_1$, α_3 là góc giữa $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.

Three coplanar, non-parallel forces act on a particle in equilibrium. Then their lines of action are concurrent, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ and $F_1/\sin \alpha_1 = F_2/\sin \alpha_2 = F_3/\sin \alpha_3$, where α_1 is the angle between $\vec{F}_2$ and $\vec{F}_3$, α_2 between $\vec{F}_3$ and $\vec{F}_1$, α_3 between $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$.

Chứng minh. / Proof.

Với chất điểm, mọi lực đặt tại cùng một điểm nên đồng quy. Tổng bằng 0 thì ba vector nối đầu nhau tạo tam giác khép kín, với các cạnh F_1, F_2, F_3 . Góc trong tam giác đối diện cạnh F_1 bằng $180^\circ - \alpha_1$, và $\sin(180^\circ - \alpha_1) = \sin \alpha_1$.

For a particle all forces act at one point, so they are concurrent. A zero sum makes the three vectors, head to tail, a closed triangle with sides F_1, F_2, F_3 . The interior angle opposite side F_1 is $180^\circ - \alpha_1$, and $\sin(180^\circ - \alpha_1) = \sin \alpha_1$.

Định lí hàm sin cho tam giác này cho:

The law of sines for this triangle gives:

$$F_1/\sin \alpha_1 = F_2/\sin \alpha_2 = F_3/\sin \alpha_3 \quad (5.3)$$

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vật treo bởi hai dây và có trọng lực: ba lực đồng phẳng đồng quy tại nút, đúng điều kiện (5.3). Hai dây hợp nhau góc vuông nên tam giác lực là tam giác vuông, độ lớn các lực đọc ngay qua sin, cos của góc dây; cách chiếu lên hai trục dùng làm phép kiểm.

A body hangs from two strings and carries its weight: three coplanar forces concurrent at the knot, which is the condition of (5.3). The strings are perpendicular, so the force triangle is right-angled and the magnitudes read off from the sines and cosines of the string angles; projecting on two axes serves as a check.

VÍ DỤ 5.2 (Ba lực đồng quy) / EXAMPLE 5.2 (Three concurrent forces) — Vật khối lượng $4,0\text{ kg}$ treo bằng hai dây nhẹ buộc vào hai điểm cố định. Dây thứ nhất hợp với phương ngang góc 30° , dây thứ hai hợp với phương ngang góc 60° về phía đối diện (hai dây vuông góc nhau). Tính lực căng mỗi dây. Lấy $g = 9,8\text{ m/s}^2$.

A 4.0 kg body hangs from two light strings tied to two fixed points. The first string makes 30° with the horizontal, the second makes 60° with the horizontal on the opposite side (the strings are perpendicular). Find the tension in each string. Take $g = 9.8\text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Ba lực tại nút: trọng lực $mg = 39,2\text{ N}$ xuống, T_1 theo dây 30° , T_2 theo dây 60° .

Three forces at the knot: weight $mg = 39.2\text{ N}$ downward, T_1 along the 30° string, T_2 along the 60° string.

2. Chiếu lên phương ngang (hai thành phần ngang triệt tiêu) và phương thẳng đứng:
Project onto the horizontal (the two horizontal components cancel) and the vertical:

$$T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 60^\circ, \quad T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ = mg$$

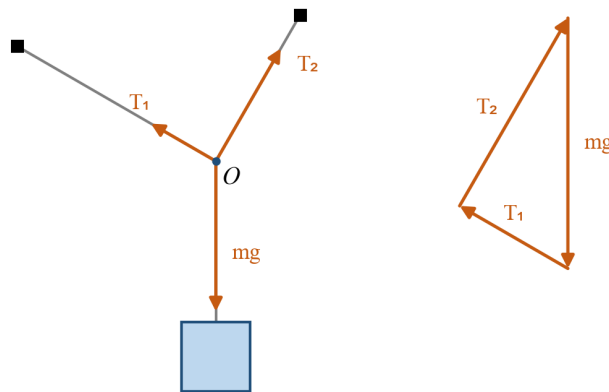
3. Từ phương trình đầu $T_2 = T_1 \cos 30^\circ / \cos 60^\circ = T_1 \sqrt{3}$. Thay vào phương trình sau:
 $T_1(1/2 + 3/2) = mg$, nên $T_1 = mg/2 = 19,6 \text{ N}$ và $T_2 = T_1 \sqrt{3} \approx 33,9 \text{ N}$.
From the first equation $T_2 = T_1 \cos 30^\circ / \cos 60^\circ = T_1 \sqrt{3}$. Into the second: $T_1(1/2 + 3/2) = mg$, so $T_1 = mg/2 = 19.6 \text{ N}$ and $T_2 = T_1 \sqrt{3} \approx 33.9 \text{ N}$.

4. Kiểm bằng Lami: $\alpha_3 = 90^\circ$ nên $T_1 = mg \sin 30^\circ$ và $T_2 = mg \sin 60^\circ$, trùng với kết quả trên.

Check with Lami: $\alpha_3 = 90^\circ$ so $T_1 = mg \sin 30^\circ$ and $T_2 = mg \sin 60^\circ$, as above.

Vậy $T_1 = 19,6 \text{ N}$ và $T_2 \approx 33,9 \text{ N}$; dây gần phương thẳng đứng hơn chịu lực căng lớn hơn.
Hence $T_1 = 19.6 \text{ N}$ and $T_2 \approx 33.9 \text{ N}$; the string closer to the vertical carries the larger tension.

■



Hình 5.2. Vật treo bằng hai dây và tam giác lực khép kín

Figure 5.2. A body on two strings and its closed force triangle

NHẬN XÉT / REMARK — Hệ thức Lami chỉ dùng được cho đúng ba lực. Gặp bốn lực trở lên, hoặc ba lực không đồng quy trên vật rắn, quay về chiếu lên hai trục (hoặc dùng moment ở Chương 7).

Lami's relation needs exactly three forces. With four or more forces, or three non-concurrent forces on an extended body, go back to projecting on two axes (or use moments, covered in the statics chapter).

5.3. Trọng lực, phản lực pháp tuyến và lực căng dây — *Weight, normal force and string tension*

Trọng lực $P = mg$ đặt tại trọng tâm, hướng xuống, có $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ ở gần mặt đất. Phản lực pháp tuyến N vuông góc với mặt tiếp xúc và hướng về phía vật; nó không có công thức riêng, giá trị của nó do phương trình chiếu quyết định, và $N = 0$ là lúc vật bắt đầu rời mặt. Lực căng T của dây hướng dọc dây, về phía dây kéo vật, và dây chỉ kéo không đẩy nên $T \geq 0$; $T = 0$ là dây chùng.

The weight $W = mg$ acts at the centre of mass, points down, and $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ near the ground. The normal force N is perpendicular to the surface of contact and points toward the body; it has no formula of its own, since the projected equations fix its value, and $N = 0$ marks the moment the body leaves the surface. The tension T acts along the string, toward the side the string pulls the body, and a string pulls but never pushes, so $T \geq 0$; $T = 0$ means a slack string.

TÍNH CHẤT 5.8 (Dây nhẹ không dẫn) / PROPERTY 5.8 (Light inextensible string) —

Dây nhẹ không dẫn: (i) mọi điểm trên một đoạn dây thẳng có cùng lực căng nếu không có lực nào đặt giữa đoạn đó; (ii) dây vắt qua ròng rọc nhẹ, không ma sát giữ nguyên lực căng ở hai phía; (iii) các điểm của dây có cùng tốc độ và cùng độ lớn gia tốc dọc theo dây.

Light inextensible string: (i) every point of a straight stretch of string carries the same tension if no force acts along that stretch; (ii) a string over a light frictionless pulley keeps the same tension on both sides; (iii) all points of the string have the same speed and the same acceleration magnitude along the string.

Chứng minh. / Proof.

(i) Xét một đoạn dây thẳng, khối lượng $m \approx 0$. Hai lực tác dụng lên đoạn là hai lực căng ở hai đầu, ngược chiều. Định luật II cho $T_B - T_A = ma \approx 0$, nên $T_A = T_B$.

(i) Take a straight stretch of string of mass $m \approx 0$. Its two end tensions are the only forces and point oppositely. The second law gives $T_B - T_A = ma \approx 0$, so $T_A = T_B$.

(ii) Trên vành ròng rọc không ma sát, phản lực từ vành vuông góc với dây. Chiếu lên phương tiếp tuyến cho một đoạn dây nhỏ, khối lượng bằng 0, ta lại có hai lực căng bằng nhau; ròng rọc nhẹ không ma sát chỉ đổi hướng của lực căng.

(ii) On the rim of a frictionless pulley the rim's reaction is perpendicular to the string. Projecting on the tangent for a small massless piece again gives equal tensions; a light frictionless pulley only turns the direction of the tension.

(iii) Dây không dẫn nên khoảng cách giữa hai điểm của dây không đổi, kéo theo cùng tốc độ dọc dây tại mọi thời điểm, và cùng độ lớn gia tốc dọc dây.

(iii) An inextensible string keeps the distance between any two of its points, so all points share the same speed along the string at every instant, and the same acceleration magnitude along it.



ĐỊNH LÝ 5.9 (Lực căng trong dây có khối lượng) / THEOREM 5.9 (Tension in a

massive rope) — Dây đồng chất khối lượng M , chiều dài L nằm trên mặt ngang nhẵn, bị kéo dọc dây bằng lực F đặt ở một đầu. Dây chuyển động với gia tốc $a = F/M$, và lực căng tại điểm cách đầu bị kéo một đoạn x là $T = F(L - x)/L$. Lực căng giảm đều từ F ở đầu bị kéo xuống 0 ở đầu tự do.

A uniform rope of mass M and length L lies on a smooth horizontal surface and is pulled along its length by a force F at one end. It moves with acceleration $a = F/M$, and the tension at a point a distance x from the pulled end is $T = F(L - x)/L$. The tension falls linearly from F at the pulled end to 0 at the free end.

Chứng minh. / Proof.

Cả dây là một vật khối lượng M chịu lực ngang duy nhất F , nên $a = F/M$. Cắt dây tại điểm cách đầu bị kéo x . Đoạn còn lại (phía đầu tự do) dài $L - x$, khối lượng $M(L - x)/L$, chỉ chịu lực căng T tại chỗ cắt.

The whole rope is one body of mass M under the single horizontal force F , so $a = F/M$. Cut the rope at a distance x from the pulled end. The remaining piece (free-end side) has length $L - x$ and mass $M(L - x)/L$, and is acted on only by the tension T at the cut.

$$T = (M(L - x)/L) \cdot (F/M) = F(L - x)/L \quad (5.4)$$

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Dây có khối lượng nên lực căng đổi dọc dây, khác dây nhẹ. Hai bước: lấy cả hệ (vật cùng dây) để tìm gia tốc chung, rồi cắt dây tại điểm cần tìm và viết định luật II cho phần nằm ở phía không bị kéo; phần đó chịu trọng lực của nó và lực căng tại chỗ cắt.

A massive rope has a tension that varies along it, unlike a light string. Two steps: take the whole system (body and rope) for the common acceleration, then cut the rope where the tension is wanted and write the second law for the piece on the side away from the pull; that piece carries its own weight and the tension at the cut.

VÍ DỤ 5.3 (Cắt dây để tìm lực căng) / EXAMPLE 5.3 (Cutting the rope to find the tension) —

Vật 3,0 kg buộc vào đầu dưới của sợi dây đồng chất khối lượng 1,0 kg, dài 2,0 m. Kéo đầu trên của dây thẳng đứng lên bằng lực 60 N. Tính gia tốc, lực căng ở đầu trên, ở điểm giữa dây và ở chỗ buộc vật. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A 3.0 kg body is tied to the lower end of a uniform 1.0 kg rope 2.0 m long. The upper end of the rope is pulled vertically upward with a force of 60 N. Find the acceleration and the tension at the top, at the midpoint and where the body is tied. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Hệ (vật + dây) có khối lượng 4,0 kg, chịu lực kéo 60 N lên và trọng lực 39,2 N xuống: $a = (60 - 39,2)/4,0 = 5,2 \text{ m/s}^2$, hướng lên.

The system (body + rope) has mass 4.0 kg under 60 N upward and weight 39.2 N downward: $a = (60 - 39.2)/4.0 = 5.2 \text{ m/s}^2$, upward.

2. Đầu trên: lực kéo 60 N, đó cũng là lực căng ở đầu trên.

Top: the pulling force of 60 N is the tension there.

3. Chỗ buộc vật: vật 3,0 kg có $T - mg = ma$, nên $T = 3,0 \times (9,8 + 5,2) = 45 \text{ N}$.

At the body: for the 3.0 kg body $T - mg = ma$, so $T = 3.0 \times (9.8 + 5.2) = 45 \text{ N}$.

4. Điểm giữa: phần dưới gồm vật và 1,0 m dây, khối lượng $3,0 + 0,5 = 3,5 \text{ kg}$: $T = 3,5 \times (9,8 + 5,2) = 52,5 \text{ N}$.

Midpoint: the lower part is the body plus 1.0 m of rope, mass $3.0 + 0.5 = 3.5 \text{ kg}$: $T = 3.5 \times (9.8 + 5.2) = 52.5 \text{ N}$.

Vậy $a = 5,2 \text{ m/s}^2$ hướng lên; lực căng là 60 N ở đầu trên, 52,5 N ở giữa dây và 45 N ở chỗ buộc vật. Lực căng tăng đều theo chiều dài dây, mỗi mét thêm 7,5 N.

Hence $a = 5.2 \text{ m/s}^2$ upward; the tension is 60 N at the top, 52.5 N at the midpoint and 45 N at the body. It rises uniformly along the rope, by 7.5 N per metre. ■

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho lực căng bằng nhau ở mọi điểm của dây có khối lượng, hoặc cho $T = mg$ khi vật còn gia tốc. Dây nhẹ mới có lực căng đều, và $T = mg$ chỉ khi vật treo đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Taking the tension equal everywhere on a massive rope, or setting $T = mg$ while the body still accelerates. Only a light string has uniform tension, and $T = mg$ holds only for a hanging body at rest or in uniform motion.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết phản lực $N = mg$ cho mọi vật nằm trên mặt. $N = mg$ chỉ đúng khi mặt ngang và không còn lực nào khác có thành phần thẳng đứng; vật trên mặt nghiêng, hoặc có lực kéo xiên, thì N đổi.

Writing $N = mg$ for every body resting on a surface. $N = mg$ holds only for a horizontal surface with no other force having a vertical component; on an incline, or with an oblique pull, N changes.

5.4. Lực đàn hồi của lò xo — Elastic force of a spring

ĐỊNH LUẬT 5.10 (Định luật Hooke) / LAW 5.10 (Hooke's law) — Trong giới hạn đàn hồi, lực đàn hồi của lò xo tỉ lệ với độ biến dạng, hướng ngược chiều biến dạng: $F_{\text{đh}} = k|\Delta l|$, với $\Delta l = l - l_0$, k là độ cứng (N/m).

Within the elastic limit the elastic force of a spring is proportional to its deformation and opposes it: $F_{\text{el}} = k|\Delta l|$, where $\Delta l = l - l_0$ and k is the stiffness (N/m).

Phạm vi: lò xo nhẹ (khối lượng bỏ qua) nên hai đầu chịu lực đàn hồi bằng nhau; ngoài giới hạn đàn hồi, F không còn tỉ lệ với Δl . Độ cứng k tỉ lệ nghịch với chiều dài lò xo cùng chất, cùng tiết diện (xem (5.7) bên dưới).

Scope: a light spring (mass neglected) has equal elastic forces at its two ends; beyond the elastic limit F is no longer proportional to Δl . The stiffness k is inversely proportional to the length of a spring of the same material and cross-section (see (5.7) below).

HỆ QUẢ 5.11 (Lò xo ghép song song) / COROLLARY 5.11 (Springs in parallel) — Hai lò xo độ cứng k_1, k_2 ghép song song (cùng giãn một đoạn) tương đương một lò xo có $k = k_1 + k_2$.

Two springs of stiffness k_1, k_2 in parallel (same extension) are equivalent to one spring with $k = k_1 + k_2$.

Chứng minh. / Proof.

Cùng độ giãn x , lực tổng cộng là $F = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x$.

With the same extension x the total force is $F = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x$.

$$k = k_1 + k_2 \quad (5.5)$$

■

HỆ QUẢ 5.12 (Lò xo ghép nối tiếp) / COROLLARY 5.12 (Springs in series) — Hai lò xo độ cứng k_1, k_2 ghép nối tiếp (cùng chịu một lực) tương đương một lò xo có $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$.

Two springs of stiffness k_1, k_2 in series (same force) are equivalent to one spring with $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$.

Chứng minh. / Proof.

Lò xo nhẹ nên lực ở hai lò xo cùng bằng F , còn độ giãn cộng lại: $x = F/k_1 + F/k_2 = F(1/k_1 + 1/k_2)$.

The springs are light so both carry the same force F , while the extensions add: $x = F/k_1 + F/k_2 = F(1/k_1 + 1/k_2)$.

$$1/k = 1/k_1 + 1/k_2 \quad (5.6)$$

■

HỆ QUẢ 5.13 (Cắt lò xo) / COROLLARY 5.13 (Cutting a spring) — Lò xo đồng đều có độ cứng k , chiều dài tự nhiên l_0 . Cắt lấy một đoạn dài l_1 thì đoạn đó có độ cứng $k_1 = k \cdot l_0/l_1$. Đoạn càng ngắn càng cứng.

A uniform spring has stiffness k and natural length l_0 . A piece of length l_1 cut from it has stiffness $k_1 = k \cdot l_0/l_1$. The shorter the piece the stiffer it is.

Chứng minh. / Proof.

Chia lò xo thành n đoạn bằng nhau, mỗi đoạn có độ cứng k_n . n đoạn ghép nối tiếp cho $k = k_n/n$ theo (5.6), nên $k_n = nk$.

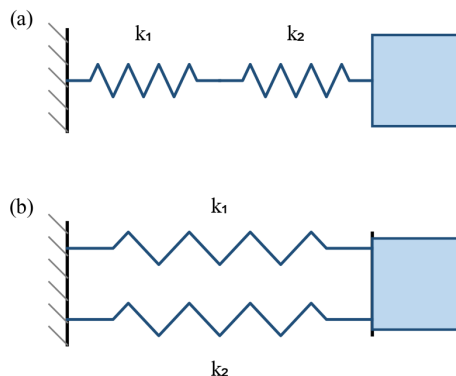
Divide the spring into n equal pieces, each of stiffness k_n . The n pieces in series give $k = k_n/n$ by (5.6), so $k_n = nk$.

Một đoạn gồm p phần như thế ($l_1 = p \cdot l_0/n$) là p lò xo k_n nối tiếp: $k_1 = k_n/p = nk/p = k \cdot l_0/l_1$. Với tỉ số l_1/l_0 bất kỳ, lấy p/n xấp xỉ tùy ý.

A piece of p such parts ($l_1 = p \cdot l_0/n$) is p springs k_n in series: $k_1 = k_n/p = nk/p = k \cdot l_0/l_1$. For any ratio l_1/l_0 , approximate it by p/n as closely as wanted.

$$k_1 l_1 = k l_0 \quad (5.7)$$

■



Hình 5.3. Hai lò xo ghép: (a) nối tiếp, (b) song song

Figure 5.3. Two springs combined: (a) in series, (b) in parallel

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho lò xo, độ cứng và chiều dài, rồi cắt hoặc ghép. Quy trình: cắt trước (độ cứng tỉ lệ nghịch chiều dài), rồi ghép (song song cộng độ cứng, nối tiếp cộng nghịch đảo), cuối cùng mới treo vật và dùng định luật Hooke.

The problem gives a spring, its stiffness and length, then cuts or joins it. Procedure: cut first (stiffness inversely proportional to length), then join (parallel adds stiffness, series adds reciprocals), and only then hang the body and use Hooke's law.

VÍ DỤ 5.4 (Cắt rồi ghép lò xo) / EXAMPLE 5.4 (Cut then combine springs) — Lò xo đồng đều độ cứng 90 N/m, chiều dài tự nhiên 30 cm, được cắt thành hai đoạn dài 10 cm và 20 cm. Hai đoạn ghép song song rồi cùng treo vào một vật 2,0 kg. Tính độ cứng của bộ và độ giãn khi cân bằng, so với lò xo ban đầu. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A uniform spring of stiffness 90 N/m and natural length 30 cm is cut into pieces 10 cm and 20 cm long. The pieces are joined in parallel and together support a 2.0 kg body. Find the stiffness of the pair and the extension at equilibrium, compared with the original spring. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Theo (5.7): $k_1 = 90 \times 30/10 = 270 \text{ N/m}$ cho đoạn 10 cm, $k_2 = 90 \times 30/20 = 135 \text{ N/m}$ cho đoạn 20 cm.

By (5.7): $k_1 = 90 \times 30/10 = 270 \text{ N/m}$ for the 10 cm piece, $k_2 = 90 \times 30/20 = 135 \text{ N/m}$ for the 20 cm piece.

2. Ghép song song: $k = 270 + 135 = 405 \text{ N/m}$. (Hai đoạn có chiều dài tự nhiên khác nhau nên các điểm treo đặt sao cho hai đoạn cùng bị giãn một đoạn x .)

In parallel: $k = 270 + 135 = 405 \text{ N/m}$. (The pieces have different natural lengths, so the suspension points are set to make both stretch by the same x .)

3. Cân bằng: $kx = mg$, nên $x = 2,0 \times 9,8/405 \approx 0,048 \text{ m} = 4,8 \text{ cm}$.

Equilibrium: $kx = mg$, so $x = 2.0 \times 9.8/405 \approx 0.048 \text{ m} = 4.8 \text{ cm}$.

4. Lò xo ban đầu: $x_0 = 19,6/90 \approx 0,218 \text{ m} = 21,8 \text{ cm}$.

The original spring: $x_0 = 19.6/90 \approx 0.218 \text{ m} = 21.8 \text{ cm}$.

Vậy bộ có độ cứng 405 N/m, giãn khoảng 4,8 cm, bằng khoảng 1/4,5 độ giãn của lò xo ban đầu (21,8 cm).

Hence the pair has stiffness 405 N/m and stretches about 4.8 cm, about 1/4.5 of the original spring's extension (21.8 cm). ■

NHẬN XÉT / REMARK — Cắt lò xo thành hai nửa rồi ghép song song cho độ cứng gấp bốn lần ban đầu: mỗi nửa cứng gấp đôi, hai nửa song song cộng lại. Ghép nối tiếp hai nửa thì trở về đúng lò xo ban đầu.

Cutting a spring in half and joining the halves in parallel gives four times the original stiffness: each half is twice as stiff, and two in parallel add. Joining the two halves in series returns the original spring.

5.5. Ma sát nghỉ, ma sát trượt, ma sát lăn và góc ma sát — Static, kinetic and rolling friction; the friction angle

Ma sát xuất hiện ở mặt tiếp xúc khi hai vật trượt, hoặc có xu hướng trượt, lên nhau. Lực ma sát nằm trong mặt tiếp xúc, ngược với chuyển động (hoặc xu hướng chuyển động) của vật so với mặt.

Friction arises at the surface of contact when two bodies slide, or tend to slide, over each other. The friction force lies in the contact surface and opposes the motion (or the tendency to move) of the body relative to the surface.

ĐỊNH LUẬT 5.14 (Định luật ma sát Coulomb) / LAW 5.14 (Coulomb's laws of friction)

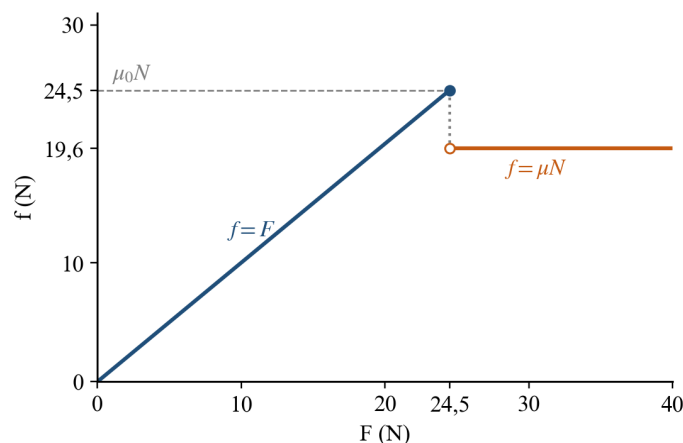
— (a) Ma sát nghỉ: khi vật chưa trượt, f cân bằng với thành phần lực làm vật có xu hướng trượt, và $0 \leq f \leq \mu_n N$. (b) Ma sát trượt: khi vật đang trượt, $f = \mu N$, hướng ngược vận tốc của vật so với mặt. Hệ số μ không phụ thuộc diện tích tiếp xúc, và $\mu \leq \mu_n$.

(a) Static friction: while the body does not slide, f balances the component of force that tends to make it slide, and $0 \leq f \leq \mu_s N$. (b) Kinetic friction: while the body slides, $f = \mu N$, directed against the velocity of the body relative to the surface. The coefficient μ is independent of contact area, and $\mu \leq \mu_s$.

$$0 \leq f \leq \mu_0 N \text{ (nghỉ)} \quad f = \mu N \text{ (trượt)} \quad (5.8)$$

Phạm vi: mô hình đúng với mặt khô, tốc độ trượt không quá lớn; μ phụ thuộc cặp vật liệu và độ nhám, tính bằng số không đơn vị. Ma sát nghỉ là lực bị động: độ lớn của nó do điều kiện cân bằng quyết định, và chỉ đạt giá trị $\mu_n N$ khi vật sắp trượt. Ma sát lăn của bánh xe, ổ bi nhỏ hơn ma sát trượt chục lần, nên bài toán thường cho lăn không có ma sát cản (động lực học lăn xem ở chương về vật rắn).

Scope: the model holds for dry surfaces and moderate sliding speeds; μ depends on the pair of materials and the roughness and has no unit. Static friction is a passive force: its size is fixed by the equilibrium condition, and it reaches $\mu_s N$ only when the body is about to slip. Rolling resistance of wheels and bearings is tens of times smaller than sliding friction, so problems often let a rolling body meet no resistance (rolling dynamics belongs to the rigid-body chapter).



Hình 5.4. Ma sát tác dụng lên vật 5 kg trên sàn ngang khi lực kéo ngang F tăng dần ($\mu_0 = 0,5$; $\mu = 0,4$)

Figure 5.4. Friction on a 5 kg body on a horizontal floor as the horizontal pull F grows ($\mu_0 = 0.5$; $\mu = 0.4$)

ĐỊNH NGHĨA 5.15 (Góc ma sát) / DEFINITION 5.15 (Friction angle) — Gọi $R = N + f$ là phản lực toàn phần của mặt lên vật (tổng vector của N và f). Góc ma sát φ của cặp bề mặt là góc thỏa $\tan \varphi = \mu_n$. Vật còn đứng yên khi R nằm trong hình nón có trục là pháp tuyến, nửa góc ở đỉnh φ (hình nón ma sát).

Let $R = N + f$ be the total reaction of the surface on the body (vector sum of N and f). The friction angle φ of the pair of surfaces satisfies $\tan \varphi = \mu_s$. The body stays at rest while R lies inside the cone whose axis is the normal and whose half-angle is φ (the friction cone).

Lí do: góc θ giữa R và pháp tuyến thỏa $\tan \theta = f/N$. Điều kiện ma sát nghỉ $f \leq \mu_n N$ tương đương $\tan \theta \leq \tan \varphi$, tức $\theta \leq \varphi$.

Reason: the angle θ between R and the normal satisfies $\tan \theta = f/N$. The static condition $f \leq \mu_s N$ is equivalent to $\tan \theta \leq \tan \varphi$, that is $\theta \leq \varphi$.

HỆ QUẢ 5.16 (Điều kiện đứng yên trên mặt nghiêng) / COROLLARY 5.16 (Condition for rest on an incline) — Vật đặt trên mặt phẳng nghiêng góc α đứng yên khi và chỉ khi $\alpha \leq \varphi$, tức $\tan \alpha \leq \mu_n$. Góc nghiêng mà vật bắt đầu trượt cho phép đo $\mu_n = \tan \alpha$.

A body on an incline of angle α stays at rest if and only if $\alpha \leq \varphi$, that is $\tan \alpha \leq \mu_s$. The tilt angle at which the body starts to slide gives $\mu_s = \tan \alpha$.

Chứng minh. / Proof.

Chiếu lên pháp tuyến và lên phương dốc: $N = mg \cos \alpha$, $f = mg \sin \alpha$.

Project onto the normal and along the slope: $N = mg \cos \alpha$, $f = mg \sin \alpha$.

Điều kiện nghỉ $f \leq \mu_n N$ cho $mg \sin \alpha \leq \mu_n mg \cos \alpha$, tức $\tan \alpha \leq \mu_n = \tan \varphi$.

The static condition $f \leq \mu_s N$ gives $mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha$, that is $\tan \alpha \leq \mu_s = \tan \varphi$. ■

ĐỊNH LÝ 5.17 (Lực kéo nhỏ nhất) / THEOREM 5.17 (Smallest pulling force) — Kéo vật khối lượng m trượt đều trên sàn ngang nhám (hệ số μ) bằng lực F hợp với phương ngang góc β (hướng lên): $F = \mu mg / (\cos \beta + \mu \sin \beta)$. Lực nhỏ nhất $F_{\min} = \mu mg / \sqrt{1 + \mu^2} = mg \sin \varphi$ đạt khi $\tan \beta = \mu$, tức $\beta = \varphi$, miễn $F \sin \beta \leq mg$.

Pull a body of mass m along a rough horizontal floor (coefficient μ) at constant speed with a force F at angle β above the horizontal: $F = \mu mg / (\cos \beta + \mu \sin \beta)$. The smallest force $F_{\min} = \mu mg / \sqrt{1 + \mu^2} = mg \sin \varphi$ occurs when $\tan \beta = \mu$, that is $\beta = \varphi$, provided $F \sin \beta \leq mg$.

Chứng minh. / Proof.

Theo phương ngang, $F \cos \beta = f$; theo phương thẳng đứng, $N = mg - F \sin \beta$; vật trượt nên $f = \mu N$.

Horizontally $F \cos \beta = f$; vertically $N = mg - F \sin \beta$; the body slides so $f = \mu N$.

$$F \cos \beta = \mu(mg - F \sin \beta) \Rightarrow F = \mu mg / (\cos \beta + \mu \sin \beta) \quad (5.9)$$

Đặt $\mu = \tan \varphi$, tức $\cos \varphi = 1 / \sqrt{1 + \mu^2}$ và $\sin \varphi = \mu / \sqrt{1 + \mu^2}$. Khi đó $\cos \beta + \mu \sin \beta = \sqrt{1 + \mu^2}(\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi) = \sqrt{1 + \mu^2} \cos(\beta - \varphi)$.

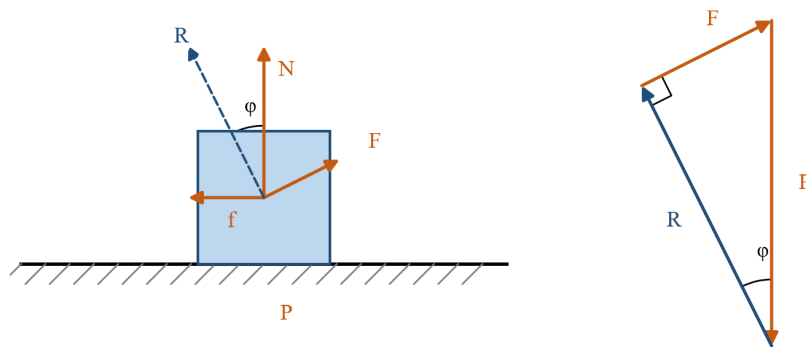
Put $\mu = \tan \varphi$, so $\cos \varphi = 1 / \sqrt{1 + \mu^2}$ and $\sin \varphi = \mu / \sqrt{1 + \mu^2}$. Then $\cos \beta + \mu \sin \beta = \sqrt{1 + \mu^2}(\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi) = \sqrt{1 + \mu^2} \cos(\beta - \varphi)$.

Mẫu số lớn nhất bằng $\sqrt{1 + \mu^2}$ khi $\cos(\beta - \varphi) = 1$, tức $\beta = \varphi$; lúc đó F nhỏ nhất và bằng $\mu mg / \sqrt{1 + \mu^2} = mg \sin \varphi$.

The denominator is largest, $\sqrt{1 + \mu^2}$, when $\cos(\beta - \varphi) = 1$, that is $\beta = \varphi$; then F is smallest, $\mu mg / \sqrt{1 + \mu^2} = mg \sin \varphi$. ■

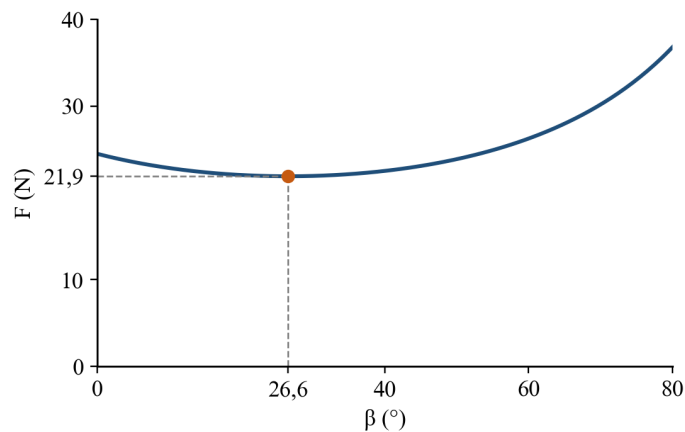
Cách giải hình học: phản lực R của sàn hợp với phương thẳng đứng góc φ , và P , R , F tạo tam giác lực khép kín (Hình 5.5). Khi P và hướng R cố định, F nhỏ nhất ứng với F vuông góc R ; tam giác vuông cho $F_{\min} = mg \sin \varphi$ ngay lập tức.

Geometric route: the floor's reaction R makes angle φ with the vertical, and W , R , F form a closed force triangle (Figure 5.5). With W and the direction of R fixed, F is smallest when F is perpendicular to R ; the right triangle gives $F_{\min} = mg \sin \varphi$ at once.



Hình 5.5. Kéo vật trên sàn nhám bằng lực xiên và tam giác lực với hình nón ma sát ($\mu = 0,5$; $\tan \beta = \mu$)

Figure 5.5. Pulling a body over a rough floor with an oblique force, and the force triangle with the friction cone ($\mu = 0.5$; $\tan \beta = \mu$)



Hình 5.6. Lực kéo F theo góc β cho vật 5 kg, $\mu = 0,5$; F nhỏ nhất ở $\tan \beta = \mu$

Figure 5.6. Pulling force F against angle β for a 5 kg body, $\mu = 0.5$; F is smallest at $\tan \beta = \mu$

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề hỏi lực nhỏ nhất khi được chọn góc kéo. Hai hướng: đại số (viết F theo β rồi đưa mẫu số về dạng tích với $\cos(\beta - \varphi)$) và hình học (tam giác lực với hình nón ma sát). Một cách dùng để giải, cách kia để kiểm.

The question asks for the smallest force when the pulling angle is free. Two routes: algebraic (write F

against β and bring the denominator to a product with $\cos(\beta - \phi)$ and geometric (force triangle with the friction cone). Use one to solve and the other to check.

VÍ DỤ 5.5 (Góc kéo tối ưu) / EXAMPLE 5.5 (Optimal pulling angle) — Kéo thùng 5,0 kg trượt đều trên sàn ngang, $\mu = 0,5$, bằng sợi dây hợp phương ngang góc β . Tìm β để lực kéo nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất đó, và so với lực kéo nằm ngang. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Pull a 5.0 kg crate at constant speed over a horizontal floor, $\mu = 0.5$, with a rope at angle β to the horizontal. Find β for the smallest pull, that smallest value, and compare with a horizontal pull. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Chiếu lên hai phương, theo (5.9): $F = \mu mg / (\cos \beta + \mu \sin \beta)$.

Project on the two directions; by (5.9): $F = \mu mg / (\cos \beta + \mu \sin \beta)$.

2. Lực nhỏ nhất khi $\tan \beta = \mu = 0,5$, tức $\beta \approx 26,6^\circ$ (góc có $\tan \beta = 0,5$).

The pull is smallest when $\tan \beta = \mu = 0.5$, that is $\beta \approx 26.6^\circ$ (the angle with $\tan \beta = 0.5$).

3. $F_{\min} = \mu mg / \sqrt{1 + \mu^2} = 0,5 \times 49 / \sqrt{1,25} \approx 21,9 \text{ N}$.

$F_{\min} = \mu mg / \sqrt{1 + \mu^2} = 0.5 \times 49 / \sqrt{1.25} \approx 21.9 \text{ N}$.

4. Kiểm điều kiện: $N = mg - F \sin \beta = 49 - 21,9 \times 0,447 \approx 39,2 \text{ N} > 0$, thùng chưa rời sàn. Kéo ngang ($\beta = 0$) cần $F = \mu mg = 24,5 \text{ N}$.

Check: $N = mg - F \sin \beta = 49 - 21.9 \times 0.447 \approx 39.2 \text{ N} > 0$, so the crate stays on the floor.

A horizontal pull ($\beta = 0$) needs $F = \mu mg = 24.5 \text{ N}$.

Vậy lực nhỏ nhất khoảng 21,9 N, ứng với $\beta \approx 26,6^\circ$, nhỏ hơn lực kéo ngang 24,5 N khoảng 11%.

Hence the smallest force is about 21.9 N at $\beta \approx 26.6^\circ$, about 11% below the 24.5 N of a horizontal pull. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đẩy chéo xuống mặt sàn làm tăng phản lực N , nên ma sát tăng theo lực đẩy. Nên hỏi trước: có giá trị lực nào đủ để đẩy không? Dấu của mẫu số trong biểu thức F trả lời câu hỏi đó trước khi thay số.

Pushing obliquely down into the floor raises the normal force N , so friction grows with the push. Ask first: is there any force that suffices? The sign of the denominator in the expression for F answers that before any numbers go in.

VÍ DỤ 5.6 (Điều kiện kẹt) / EXAMPLE 5.6 (Jamming condition) — Đẩy thùng 10 kg trên sàn ngang nhám ($\mu = 0,4$) bằng lực hợp phương ngang góc β hướng xuống. (a) Với $\beta = 45^\circ$, lực đẩy nhỏ nhất để thùng trượt đều. (b) Góc β lớn nhất để còn đẩy được thùng, bất kể độ lớn lực. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Push a 10 kg crate over a rough horizontal floor ($\mu = 0.4$) with a force at angle β below the horizontal. (a) For $\beta = 45^\circ$, the smallest push that keeps the crate sliding at constant speed. (b) The largest β at which the crate can still be pushed, whatever the size of the force. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Chiếu: $F \cos \beta = f = \mu N$ và $N = mg + F \sin \beta$. Thế N vào:

Project: $F \cos \beta = f = \mu N$ and $N = mg + F \sin \beta$. Substitute N :

$$F(\cos \beta - \mu \sin \beta) = \mu mg \quad (5.10)$$

2. (a) $\beta = 45^\circ$: $\cos \beta - \mu \sin \beta = 0,7071 \times (1 - 0,4) = 0,4243$, nên $F = 0,4 \times 98/0,4243 \approx 92,4 \text{ N}$.

(a) $\beta = 45^\circ$: $\cos \beta - \mu \sin \beta = 0.7071 \times (1 - 0.4) = 0.4243$, so $F = 0.4 \times 98/0.4243 \approx 92.4 \text{ N}$.

3. (b) F dương hữu hạn khi $\cos \beta - \mu \sin \beta > 0$, tức $\tan \beta < 1/\mu = 2,5$, $\beta < 68,2^\circ$. Từ $\beta = 68,2^\circ$ trở lên về trái không vượt 0 dù F lớn bao nhiêu: thùng bị kẹt.

(b) F is positive and finite when $\cos \beta - \mu \sin \beta > 0$, that is $\tan \beta < 1/\mu = 2.5$, $\beta < 68.2^\circ$.

From $\beta = 68.2^\circ$ upward the left side cannot exceed 0 however large F is: the crate jams.

Vậy ở $\beta = 45^\circ$ cần đẩy ít nhất khoảng 92,4 N; thùng bị kẹt khi $\beta \geq 68,2^\circ$ ($\tan \beta \geq 1/\mu$).

Hence at $\beta = 45^\circ$ the push must be at least about 92.4 N; the crate jams for $\beta \geq 68.2^\circ$ ($\tan \beta \geq 1/\mu$). ■

NHẬN XÉT / REMARK — Điều kiện kẹt $\tan \beta \geq 1/\mu$ nói rằng góc giữa lực đẩy và pháp tuyến của sàn không vượt góc ma sát: $\tan(90^\circ - \beta) \leq \mu$. Khi lực đẩy nằm trong hình nón ma sát, ma sát nghỉ tự điều chỉnh để cân bằng mọi lực có độ lớn bất kỳ.

The jamming condition $\tan \beta \geq 1/\mu$ says the push makes with the floor's normal an angle not above the friction angle: $\tan(90^\circ - \beta) \leq \mu$. When the push lies inside the friction cone, static friction adjusts itself to balance a force of any size.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vật trên mặt nghiêng cũng chịu F song song mặt nghiêng.

Chưa biết vật đứng yên hay trượt, nên chưa biết ma sát nghỉ đang bao nhiêu và hướng nào.

Cách làm: xét hai tình huống tới hạn (vật sắp trượt xuống, vật sắp trượt lên), ở mỗi tình huống ma sát nghỉ đạt giá trị lớn nhất với hướng đã biết; khoảng F cần tìm nằm giữa hai tình huống đó.

A body on an incline is also acted on by a force F parallel to the incline. It is not known whether the body rests or slides, so neither the size nor the direction of static friction is known. Method: consider the two limiting cases (about to slide down, about to slide up); in each, static friction is at its maximum with a known direction; the required range of F lies between these two cases.

VÍ DỤ 5.7 (Ma sát nghỉ đổi chiều) / EXAMPLE 5.7 (Static friction reverses) — Vật 2,0

kg trên mặt phẳng nghiêng 30° , $\mu = 0,3$. Giữ vật bằng lực F song song mặt nghiêng, hướng lên. Tìm khoảng giá trị của F để vật đứng yên; với $F = 12 \text{ N}$, ma sát nghỉ có độ lớn và hướng thế nào? Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A 2.0 kg body on a 30° incline, $\mu = 0.3$, is held by a force F parallel to the incline and pointing up the slope. Find the range of F for which the body stays at rest; for $F = 12 \text{ N}$, what are the magnitude and direction of static friction? Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

1. $mg \sin 30^\circ = 9,8 \text{ N}$; $N = mg \cos 30^\circ \approx 16,97 \text{ N}$; $\mu N \approx 5,09 \text{ N}$. Vì $\tan 30^\circ \approx 0,577 > 0,3$, không có F thì vật trượt xuống.

$mg \sin 30^\circ = 9.8 \text{ N}$; $N = mg \cos 30^\circ \approx 16.97 \text{ N}$; $\mu N \approx 5.09 \text{ N}$. Since $\tan 30^\circ \approx 0.577 > 0.3$, with no F the body slides down.

2. Sắp trượt xuống: ma sát nghỉ cực đại hướng lên mặt dốc, $F_1 + \mu N = mg \sin 30^\circ$, nên $F_1 = 9,8 - 5,09 \approx 4,71 \text{ N}$.

About to slide down: maximum static friction up the slope, $F_1 + \mu N = mg \sin 30^\circ$, so $F_1 = 9.8 - 5.09 \approx 4.71 \text{ N}$.

3. Sắp trượt lên: ma sát nghỉ cực đại hướng xuống dốc, $F_2 = mg \sin 30^\circ + \mu N = 9.8 + 5.09 \approx 14.9 \text{ N}$.

About to slide up: maximum static friction down the slope, $F_2 = mg \sin 30^\circ + \mu N = 9.8 + 5.09 \approx 14.9 \text{ N}$.

4. $F = 12 \text{ N}$ nằm trong khoảng. Chiều dương lên dốc: $F + f - mg \sin 30^\circ = 0$, nên $f = 9.8 - 12 = -2.2 \text{ N}$: ma sát nghỉ hướng xuống dốc, độ lớn 2.2 N , nhỏ hơn $\mu N = 5.09 \text{ N}$.

$F = 12 \text{ N}$ lies inside the range. With up-slope positive: $F + f - mg \sin 30^\circ = 0$, so $f = 9.8 - 12 = -2.2 \text{ N}$: static friction points down the slope, magnitude 2.2 N , less than $\mu N = 5.09 \text{ N}$.

Vậy vật đứng yên khi $4.71 \text{ N} \leq F \leq 14.9 \text{ N}$. Ở $F = 12 \text{ N}$, ma sát nghỉ là 2.2 N hướng xuống dốc.

Hence the body rests for $4.71 \text{ N} \leq F \leq 14.9 \text{ N}$. At $F = 12 \text{ N}$ static friction is 2.2 N , pointing down the slope. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Khi $F = mg \sin \alpha = 9.8 \text{ N}$, ma sát nghỉ bằng 0; F nhỏ hơn giá trị này thì ma sát hướng lên dốc, lớn hơn thì hướng xuống. Ma sát nghỉ đổi chiều khi F đi qua giá trị đó, và độ lớn của nó đổi liên tục từ 0.

When $F = mg \sin \alpha = 9.8 \text{ N}$, static friction is zero; below this value friction points up the slope, above it down the slope. Static friction reverses as F passes this value, its magnitude varying continuously through 0.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng $f = \mu N$ cho ma sát nghỉ. Ma sát nghỉ chỉ bằng μN ở trạng thái tới hạn; vật 5 kg kéo bằng 10 N ngang mà chưa trượt thì $f = 10 \text{ N}$, không phải μN .

Using $f = \mu N$ for static friction. Static friction equals $\mu_s N$ only at the point of slipping; a 5 kg body pulled by 10 N horizontally that has not slipped has $f = 10 \text{ N}$, not μN .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho ma sát luôn ngược chiều chuyển động của vật so với đất. Ma sát tác dụng ngược chiều chuyển động tương đối giữa hai mặt tiếp xúc; ma sát nghỉ giữa khối trên và khối dưới có thể cùng chiều với chuyển động của khối trên so với đất (Ví dụ 5.11).

Taking friction to always oppose the body's motion relative to the ground. Friction opposes the relative motion of the two surfaces in contact; static friction between an upper and a lower block can point along the upper block's motion relative to the ground (Example 5.11).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Giữ nguyên $N = mg$ khi có lực kéo hay đẩy xiên. $N = mg - F \sin \beta$ khi kéo lên, $N = mg + F \sin \beta$ khi đẩy xuống; ma sát đổi theo.

Keeping $N = mg$ when the pull or push is oblique. $N = mg - F \sin \beta$ for an upward pull, $N = mg + F \sin \beta$ for a downward push; friction changes with it.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ma sát nghỉ: $0 \leq f \leq \mu_s N$, giá trị do cân bằng quyết định. Ma sát trượt: $f = \mu N$. Góc ma sát tan $\varphi = \mu$. Lực kéo nhỏ nhất trên sàn ngang: $F_{\min} = mg \sin \varphi$ tại $\tan \beta = \mu$.

Static friction: $0 \leq f \leq \mu_s N$, fixed by equilibrium. Kinetic friction: $f = \mu N$. Friction angle $\tan \varphi = \mu$. Smallest pull on a horizontal floor: $F_{\min} = mg \sin \varphi$ at $\tan \beta = \mu$.

5.6. Lực cản của chất lưu và lực nâng — Fluid drag and lift

ĐỊNH LUẬT 5.18 (Lực cản của chất lưu) / LAW 5.18 (Fluid drag) — Vật chuyển động trong chất lưu (khí, lỏng) chịu lực cản ngược chiều vận tốc. Ở tốc độ nhỏ hoặc trong chất lưu nhớt: $F_c = bv$. Ở tốc độ lớn trong không khí: $F_c = cv^2$. Các hệ số b, c phụ thuộc hình dạng vật; c còn tỉ lệ với khối lượng riêng của chất lưu và với tiết diện chắn dòng.

A body moving through a fluid (gas or liquid) feels a drag opposite to its velocity. At low speed or in a viscous fluid: $F_d = bv$. At high speed in air: $F_d = cv^2$. The coefficients b, c depend on the shape of the body; c also grows with the density of the fluid and with the cross-section facing the flow.

Phạm vi: đây là hai mô hình thực nghiệm. Bài toán cho sẵn dạng lực cản và hệ số (hoặc vận tốc giới hạn); ranh giới giữa hai chế độ phụ thuộc kích thước vật và độ nhớt, không do định luật Newton quyết định. Lực đẩy Archimedes của không khí được bỏ qua.

Scope: these are two empirical models. A problem gives the form of the drag and its coefficient (or the terminal speed); the boundary between the two regimes depends on the size of the body and the viscosity, and Newton's laws do not decide it. The buoyancy of air is neglected.

ĐỊNH LÝ 5.19 (Vận tốc giới hạn) / THEOREM 5.19 (Terminal speed) — Vật rơi từ trạng thái nghỉ trong chất lưu, chịu trọng lực mg và lực cản F_c , có gia tốc giảm dần và đạt vận tốc giới hạn không đổi v_{gh} khi $F_c = mg$: $v_{gh} = mg/b$ (lực cản bv) hoặc $v_{gh} = \sqrt{(mg/c)}$ (lực cản cv^2). Ở vận tốc v , gia tốc là $a = g(1 - v/v_{gh})$ hoặc $a = g(1 - v^2/v_{gh}^2)$.

A body falling from rest in a fluid under its weight mg and drag F_d has a decreasing acceleration and reaches a constant terminal speed v_t when $F_d = mg$: $v_t = mg/b$ (drag bv) or $v_t = \sqrt{(mg/c)}$ (drag cv^2). At speed v the acceleration is $a = g(1 - v/v_t)$ or $a = g(1 - v^2/v_t^2)$.

Chứng minh. / Proof.

Chiều dương hướng xuống: $mg - F_c = ma$. Với $F_c = bv$: $a = g - bv/m = g(1 - v/v_{gh})$ nếu đặt $v_{gh} = mg/b$. Với $F_c = cv^2$: $a = g - cv^2/m = g(1 - v^2/v_{gh}^2)$ nếu đặt $v_{gh}^2 = mg/c$.

Take down as positive: $mg - F_d = ma$. With $F_d = bv$: $a = g - bv/m = g(1 - v/v_t)$ if $v_t = mg/b$. With $F_d = cv^2$: $a = g - cv^2/m = g(1 - v^2/v_t^2)$ if $v_t^2 = mg/c$.

Khi $v < v_{gh}$, $a > 0$ nên v còn tăng; khi v tiến tới v_{gh} , a tiến tới 0. Nếu $v > v_{gh}$ thì $a < 0$ và v giảm, nên vận tốc không vượt v_{gh} khi thả từ nghỉ.

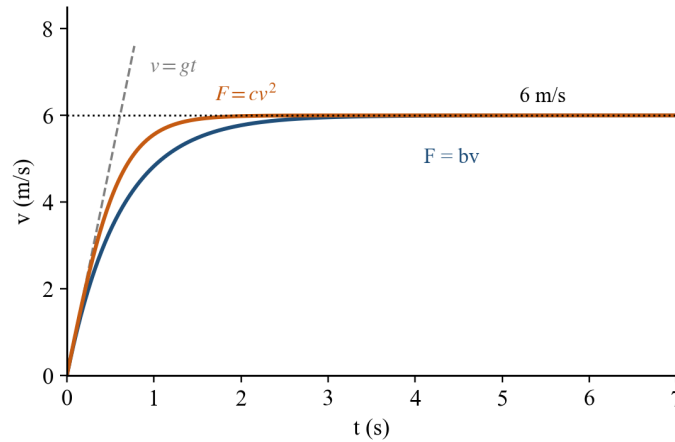
While $v < v_t$, $a > 0$ so v still grows; as v approaches v_t , a approaches 0. If $v > v_t$ then $a < 0$ and v falls, so the speed never passes v_t when released from rest.

$$v_{gh} = mg/b \quad \text{hoặc} \quad v_{gh}^2 = mg/c \quad (5.11)$$

Lực nâng là thành phần lực chất lưu tác dụng lên vật, vuông góc với vận tốc tương đối của vật và chất lưu. Một cánh nghiêng bẻ dòng khí xuống dưới; theo định luật III, dòng khí đẩy cánh lên. Quả bóng xoáy kéo lớp khí quanh nó, làm quỹ đạo cong ra khỏi mặt phẳng ném. Bài toán lớp 10 không tính lực nâng bằng số, chỉ cần nhận ra chiều và nguyên nhân của nó.

Lift is the component of the fluid force on a body that is perpendicular to the relative velocity of body and fluid. A tilted wing turns the airstream downward; by the third law the air pushes the

wing up. A spinning ball drags the air layer around it, curving its path out of the plane of the throw. At this level lift is not computed numerically; only its direction and cause need to be identified.



Hình 5.7. Vận tốc theo thời gian của vật rơi từ nghỉ với cùng vận tốc giới hạn 6 m/s: lực cản tỉ lệ v , tỉ lệ v^2 và rơi tự do

Figure 5.7. Speed against time for a body released from rest with the same terminal speed of 6 m/s: drag proportional to v , to v^2 , and free fall

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho vận tốc giới hạn của vật rơi trong không khí. Từ v_{gh} suy ra hệ số c , rồi mọi yêu cầu khác (gia tốc ở một vận tốc, vận tốc giới hạn khi đổi khối lượng) chỉ là thay vào $a = g(1 - v^2/v_{gh}^2)$ hoặc $v_{gh} \propto \sqrt{m}$.

The problem gives the terminal speed of a body falling in air. From v_t find the coefficient c ; every further request (acceleration at a given speed, terminal speed after a change of mass) is then a substitution in $a = g(1 - v^2/v_t^2)$ or $v_t \propto \sqrt{m}$.

VÍ DỤ 5.8 (Vận tốc giới hạn của dù) / EXAMPLE 5.8 (Terminal speed of a parachute)

— Người nhảy dù cùng dù nặng 80 kg có vận tốc giới hạn 6,0 m/s, lực cản $F_c = cv^2$. Tính c ; gia tốc khi $v = 3,0$ m/s và khi $v = 0,99v_{gh}$; vận tốc giới hạn khi tổng khối lượng thành 100 kg (cùng dù). Lấy $g = 9,8$ m/s².

A parachutist with the canopy, 80 kg in all, has a terminal speed of 6.0 m/s, with drag $F_d = cv^2$. Find c ; the acceleration at $v = 3.0$ m/s and at $v = 0.99v_t$; the terminal speed when the total mass becomes 100 kg (same canopy). Take $g = 9.8$ m/s².

Lời giải. / Solution.

- Ở vận tốc giới hạn $cv_{gh}^2 = mg$, nên $c = mg/v_{gh}^2 = 80 \times 9,8/36 \approx 21,8$ kg/m.

At terminal speed $cv_t^2 = mg$, so $c = mg/v_t^2 = 80 \times 9.8/36 \approx 21.8$ kg/m.

- $v = 3,0$ m/s: $a = g(1 - 9/36) = 0,75g = 7,35$ m/s².

$v = 3.0$ m/s: $a = g(1 - 9/36) = 0.75g = 7.35$ m/s².

- $v = 0,99v_{gh}$: $a = g(1 - 0,98) = 0,0199g \approx 0,195$ m/s².

$v = 0.99v_t$: $a = g(1 - 0.98) = 0.0199g \approx 0.195$ m/s².

- Khối lượng 100 kg, cùng c : $v_{gh}' = \sqrt{(mg/c)} = v_{gh}\sqrt{(100/80)} = 6,0 \times 1,118 \approx 6,71$ m/s.

With 100 kg and the same c : $v_t' = \sqrt{(mg/c)} = v_t\sqrt{(100/80)} = 6.0 \times 1.118 \approx 6.71$ m/s.

Vậy $c \approx 21,8 \text{ kg/m}$; $a = 7,35 \text{ m/s}^2$ tại $3,0 \text{ m/s}$ và $\approx 0,195 \text{ m/s}^2$ tại $0,99v_{gh}$; v_{gh} mới $\approx 6,71 \text{ m/s}$.

Hence $c \approx 21.8 \text{ kg/m}$; $a = 7.35 \text{ m/s}^2$ at 3.0 m/s and $\approx 0.195 \text{ m/s}^2$ at $0.99v_i$; the new $v_i \approx 6.71 \text{ m/s}$.

NHẬN XÉT / REMARK — Gia tốc giảm khi v tăng, nên đồ thị $v-t$ cong xuống và tiệm cận đường $v = v_{gh}$ (Hình 5.7). Lực cản tỉ lệ v^2 đưa vận tốc về v_{gh} nhanh hơn lực cản tỉ lệ v khi hai trường hợp có cùng v_{gh} . Thả vật từ lúc có vận tốc lớn hơn v_{gh} thì $a < 0$ và vận tốc giảm dần về v_{gh} từ phía trên.

The acceleration falls as v grows, so the $v-t$ graph bends over and approaches the line $v = v_t$ (Figure 5.7). Drag proportional to v^2 brings the speed up to v_t sooner than drag proportional to v when both have the same v_t . A body released with speed above v_t has $a < 0$ and slows toward v_t from above.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho vật rơi trong không khí vẫn có gia tốc g mãi mãi, hoặc dùng $v_{gh} = mg/b$ cho lực cản bậc hai. Hai dạng lực cản cho hai công thức v_{gh} khác nhau; kiểm tra dạng lực cản đề cho trước khi áp dụng.

Letting a body fall in air with acceleration g for ever, or using $v_t = mg/b$ for quadratic drag. The two drag laws give two different formulas for v_t ; check which drag the problem gives before applying either.

5.7. Phương pháp giải; hệ vật nối, máy Atwood và ròng rọc động — Method; connected bodies, the Atwood machine and movable pulleys

Sáu bước dùng cho mọi bài động lực học của chương:

Six steps for every dynamics problem of the chapter:

1. Tách vật: chọn vật hoặc hệ để viết định luật II. Vật nối bằng dây được xét riêng từng vật, hoặc gộp cả hệ khi cần tìm gia tốc chung và các lực căng bên trong bị triệt tiêu.
Isolate: choose the body or system for the second law. Bodies joined by strings are taken one by one, or as a whole when the common acceleration is wanted and the internal tensions cancel.
2. Vẽ lực: mỗi lực ghi rõ vật nào gây ra nó. Chỉ vẽ lực tác dụng lên vật đang xét; không vẽ lực mà vật tác dụng lên mặt hay dây, và không thêm lực hướng tâm hay lực đà.
Draw the forces: name the body that exerts each one. Draw only forces acting on the body under study; omit forces the body exerts on the surface or string, and add no centripetal force or force of momentum.
3. Chọn trục: một trục theo hướng gia tốc (hoặc chuyển động dự kiến), trục kia vuông góc. Với vật nối bằng dây, chọn chiều dương của mỗi vật theo chiều chuyển động dự kiến để mọi gia tốc cùng dấu.
Choose axes: one along the acceleration (or expected motion), the other perpendicular. For bodies joined by a string, take each body's positive direction along its expected motion so that every acceleration has the same sign.
4. Viết định luật II cho từng vật, chiếu lên từng trục. Phương vuông góc cho N , phương chuyển động cho a .

Write the second law for each body and project it on each axis. The perpendicular direction gives N , the direction of motion gives a .

5. Liên kết: dây không dẫn cho cùng độ lớn gia tốc (có hệ số 2 ở ròng rọc động); hai vật tựa nhau cùng gia tốc theo phương vuông góc mặt tiếp xúc.

Constraints: an inextensible string gives equal acceleration magnitudes (with a factor 2 at a movable pulley); two bodies in contact share the acceleration normal to their surface.

6. Giải và kiểm: $N \geq 0$, $T \geq 0$, $f \leq \mu_n N$ khi vật đứng yên, dấu của a khớp với chiều đã giả sử, đơn vị, trường hợp giới hạn ($\mu = 0$, một khối lượng bằng 0). Nếu a ra ngược dấu thì chiều thật ngược lại: đổi chiều ma sát và giải lại.

Solve and check: $N \geq 0$, $T \geq 0$, $f \leq \mu_s N$ for a body at rest, the sign of a agrees with the assumed direction, units, limiting cases ($\mu = 0$, a mass equal to 0). If a comes out with the opposite sign the real direction is reversed: flip the friction and solve again.

ĐỊNH LÝ 5.20 (Máy Atwood) / THEOREM 5.20 (Atwood machine) — Máy Atwood: hai vật $m_1 > m_2$ nối bằng dây nhẹ không dẫn vắt qua ròng rọc cố định nhẹ không ma sát. Vật m_1 đi xuống với gia tốc $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$; lực căng $T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2)$; lực tác dụng lên trục ròng rọc là $2T$.

Atwood machine: two bodies $m_1 > m_2$ joined by a light inextensible string over a light frictionless fixed pulley. Body m_1 descends with acceleration $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$; the tension is $T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2)$; the force on the pulley axle is $2T$.

Chứng minh. / Proof.

Theo tính chất 5.8, hai phía có cùng T và hai vật cùng độ lớn gia tốc a . Chiều dương xuống cho m_1 , lên cho m_2 :

By property 5.8, both sides carry the same T and both bodies the same acceleration magnitude a . Positive downward for m_1 , upward for m_2 :

$$m_1g - T = m_1a, \quad T - m_2g = m_2a$$

Cộng hai phương trình: $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$. Thế a vào phương trình thứ hai:

Add the two equations: $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$. Put a in the second equation:

$$a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2), \quad T = m_2(g + a) = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2) \quad (5.12)$$

Ròng rọc nhẹ đứng yên chịu hai lực căng cùng hướng xuống và lực đỡ của trục nên lực lên trục là $2T$.

The light pulley at rest carries two downward tensions and the axle's support, so the force on the axle is $2T$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Trường hợp giới hạn kiểm công thức (5.12): $m_1 = m_2$ cho $a = 0$, $T = mg$ (hệ cân bằng). $m_2 = 0$ cho $a = g$, $T = 0$ (vật m_1 rơi tự do). Lực lên trục $2T = 4m_1m_2g/(m_1 + m_2)$ luôn nhỏ hơn tổng trọng lực $(m_1 + m_2)g$ khi $m_1 \neq m_2$, vì hệ có gia tốc khối tâm hướng xuống.

Limiting cases check formula (5.12): $m_1 = m_2$ gives $a = 0$, $T = mg$ (equilibrium). $m_2 = 0$ gives $a = g$, $T = 0$ (body m_1 in free fall). The axle force $2T = 4m_1m_2g/(m_1 + m_2)$ is always below the total weight $(m_1 + m_2)g$ when $m_1 \neq m_2$, because the centre of mass of the system accelerates downward.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Ba vật nối thành chuỗi: hai vật trên bàn (có ma sát khác nhau) và một vật treo. Dây không dẫn nên cả ba có cùng độ lớn a . Cộng ba phương trình thì các lực căng bên trong khử nhau, cho a ngay; sau đó mỗi lực căng lấy từ phương trình của vật đứng ở hai đầu. Phải kiểm trước: vật treo có đủ nặng thắng ma sát nghỉ tối đa không.

Three bodies in a chain: two on the table (with different friction) and one hanging. The string is inextensible so all three share the magnitude a . Adding the three equations cancels the internal tensions and gives a at once; each tension then comes from the equation of a body at an end. Check first: is the hanging body heavy enough to beat the maximum static friction?

VÍ DỤ 5.9 (Hệ ba vật nối tiếp) / EXAMPLE 5.9 (Chain of three bodies) — Trên mặt bàn ngang có vật $m_1 = 2,0 \text{ kg}$ ($\mu_1 = 0,1$) nối bằng dây với vật $m_2 = 3,0 \text{ kg}$ ($\mu_2 = 0,3$). Dây thứ hai buộc m_2 vắt qua ròng rọc ở mép bàn và treo $m_3 = 4,0 \text{ kg}$ (Hình 5.8). Thả hệ từ nghỉ. Tính gia tốc và các lực căng. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

On a horizontal table, body $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ ($\mu_1 = 0.1$) is tied to body $m_2 = 3.0 \text{ kg}$ ($\mu_2 = 0.3$). A second string ties m_2 over a pulley at the table edge to a hanging body $m_3 = 4.0 \text{ kg}$ (Figure 5.8). Release the system from rest. Find the acceleration and the tensions. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

1. Kiểm điều kiện chuyển động: $m_3g = 39,2 \text{ N}$ lớn hơn tổng ma sát tối đa $\mu_1m_1g + \mu_2m_2g = 1,96 + 8,82 = 10,78 \text{ N}$, nên hệ chuyển động theo chiều m_3 đi xuống.

Motion check: $m_3g = 39.2 \text{ N}$ exceeds the total maximum friction $\mu_1m_1g + \mu_2m_2g = 1.96 + 8.82 = 10.78 \text{ N}$, so the system moves with m_3 descending.

2. Định luật II cho từng vật, chiều dương theo chiều chuyển động:

Second law for each body, positive along the motion:

$$T_{12} - \mu_1m_1g = m_1a$$

$$T_{23} - T_{12} - \mu_2m_2g = m_2a$$

$$m_3g - T_{23} = m_3a$$

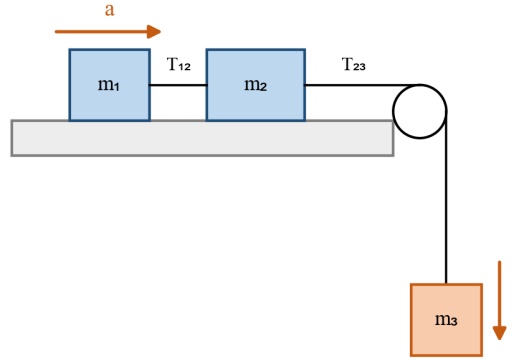
3. Cộng ba phương trình: $m_3g - \mu_1m_1g - \mu_2m_2g = (m_1 + m_2 + m_3)a$, nên $a = (39,2 - 1,96 - 8,82)/9,0 \approx 3,16 \text{ m/s}^2$.

Add the three: $m_3g - \mu_1m_1g - \mu_2m_2g = (m_1 + m_2 + m_3)a$, so $a = (39.2 - 1.96 - 8.82)/9.0 \approx 3.16 \text{ m/s}^2$.

4. $T_{23} = m_3(g - a) = 4,0 \times (9,8 - 3,158) \approx 26,6 \text{ N}$; $T_{12} = m_1(a + \mu_1g) = 2,0 \times (3,158 + 0,98) \approx 8,28 \text{ N}$. Kiểm bằng phương trình của m_2 : $26,57 - 8,28 - 8,82 = 9,47 \text{ N} = m_2a$.
 $T_{23} = m_3(g - a) = 4.0 \times (9.8 - 3.158) \approx 26.6 \text{ N}$; $T_{12} = m_1(a + \mu_1g) = 2.0 \times (3.158 + 0.98) \approx 8.28 \text{ N}$. Check with the equation of m_2 : $26.57 - 8.28 - 8.82 = 9.47 \text{ N} = m_2a$.

Vậy $a \approx 3,16 \text{ m/s}^2$, $T_{12} \approx 8,28 \text{ N}$, $T_{23} \approx 26,6 \text{ N}$.

Hence $a \approx 3.16 \text{ m/s}^2$, $T_{12} \approx 8.28 \text{ N}$, $T_{23} \approx 26.6 \text{ N}$. ■



Hình 5.8. Hai vật trên bàn nhám nối với vật treo qua ròng rọc
Figure 5.8. Two bodies on a rough table joined to a hanging body over a pulley

TÍNH CHẤT 5.21 (Ròng rọc động) / PROPERTY 5.21 (Movable pulley) — Ròng rọc động nhẹ không ma sát được treo bằng một dây nhẹ không giãn vòng qua nó, hai nhánh dây thẳng đứng. (i) Vật treo vào trục chịu lực nâng $2T$ từ hai nhánh dây. (ii) Khi trục dịch chuyển đoạn s thì đầu dây ở phía kia dịch chuyển $2s$; do đó gia tốc của đầu dây gấp đôi gia tốc của trục.

A light frictionless movable pulley hangs on a light inextensible string looped around it, with two vertical branches. (i) A body hung from the axle is lifted by the force $2T$ from the two branches. (ii) When the axle moves a distance s , the other end of the string moves $2s$; hence the acceleration of that end is twice that of the axle.

Chứng minh. / Proof.

(i) Ròng rọc nhẹ ($m \approx 0$) cân bằng lực: hai nhánh dây kéo lên với T mỗi nhánh, vật treo kéo xuống, nên lực treo bằng $2T$.

(i) The light pulley ($m \approx 0$) is in force balance: the two branches pull up with T each and the hung body pulls down, so the hanging force is $2T$.

(ii) Tổng chiều dài dây không đổi. Trục hạ xuống s thì hai nhánh thẳng đứng dài thêm s mỗi nhánh, tổng cộng $2s$; phần dây còn lại phải ngắn đi $2s$. Đầu dây dịch chuyển $2s$ trong cùng khoảng thời gian, nên vận tốc và gia tốc của đầu dây gấp đôi.

(ii) The total length of string is fixed. If the axle drops by s , the two vertical branches lengthen by s each, $2s$ in all; the rest of the string must shorten by $2s$. The end moves $2s$ in the same time, so its speed and acceleration are doubled. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Vật m_2 treo ở đầu dây, đầu kia vòng qua ròng rọc động mang vật M rồi buộc vào trần. Hai ẩn gia tốc nhưng chỉ một liên kết: $a_2 = 2a_M$. Hai phương trình động lực học (cho m_2 và cho M), cộng liên kết, đủ giải. Lấy chiều dương của m_2 hướng xuống, của M hướng lên, vì dự đoán m_2 đi xuống khi $2m_2 > M$.

Body m_2 hangs at one end of a string whose other end passes around a movable pulley carrying body M and is tied to the ceiling. Two unknown accelerations but one constraint: $a_2 = 2a_M$. Two dynamic equations (for m_2 and for M) plus the constraint suffice. Take m_2 positive downward and M positive upward, since m_2 is expected to descend when $2m_2 > M$.

VÍ DỤ 5.10 (Liên kết ở ròng rọc động) / EXAMPLE 5.10 (Constraint at a movable pulley) — Dây nhẹ một đầu buộc vật $m_2 = 3,0$ kg, vắt qua ròng rọc cố định, vòng qua ròng rọc động nhẹ treo vật $M = 4,0$ kg rồi buộc vào trần (Hình 5.9). Thả từ nghỉ. Tính gia tốc của m_2 và của M , lực căng dây. Lấy $g = 9,8$ m/s².

A light string is tied at one end to body $m_2 = 3.0$ kg, passes over a fixed pulley, loops around a light movable pulley that carries body $M = 4.0$ kg, and is tied to the ceiling (Figure 5.9). Release from rest. Find the accelerations of m_2 and of M , and the tension. Take $g = 9.8$ m/s².

Lời giải. / Solution.

1. Liên kết theo tính chất 5.21: m_2 đi xuống a_2 thì ròng rọc động, cùng M , đi lên $a_M = a_2/2$.

Constraint by property 5.21: if m_2 descends with a_2 the movable pulley, and M with it, rises with $a_M = a_2/2$.

$$m_2g - T = m_2a_2, \quad 2T - Mg = Ma_M = Ma_2/2$$

2. Thế $T = m_2(g - a_2)$ vào phương trình thứ hai: $2m_2g - 2m_2a_2 - Mg = Ma_2/2$, nên

Put $T = m_2(g - a_2)$ into the second equation: $2m_2g - 2m_2a_2 - Mg = Ma_2/2$, so

$$a_2 = (2m_2 - M)g / (2m_2 + M/2) \quad (5.13)$$

3. Số: $a_2 = (6,0 - 4,0) \times 9,8 / (6,0 + 2,0) = 2,45$ m/s²; $a_M = 1,225$ m/s² $\approx 1,23$ m/s²; $T = 3,0 \times (9,8 - 2,45) = 22,05$ N.

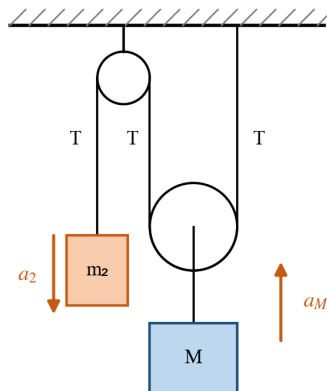
Numbers: $a_2 = (6.0 - 4.0) \times 9.8 / (6.0 + 2.0) = 2.45$ m/s²; $a_M = 1.225$ m/s² ≈ 1.23 m/s²; $T = 3.0 \times (9.8 - 2.45) = 22.05$ N.

4. Kiểm cho M : $2T = 44,1$ N và $M(g + a_M) = 4,0 \times 11,025 = 44,1$ N.

Check for M : $2T = 44.1$ N and $M(g + a_M) = 4.0 \times 11.025 = 44.1$ N.

Vậy m_2 đi xuống với 2,45 m/s², M đi lên với khoảng 1,23 m/s², lực căng dây 22,05 N ($\approx 22,1$ N).

Hence m_2 descends at 2.45 m/s², M rises at about 1.23 m/s², and the tension is 22.05 N (≈ 22.1 N). ■



Hình 5.9. Dây qua ròng rọc cố định và ròng rọc động: m_2 đi xuống, M đi lên

Figure 5.9. String over a fixed and a movable pulley: m_2 descends, M rises

NHẬN XÉT / REMARK — Ròng rọc động cho lợi về lực, thiệt về đường đi: nhánh dây đi $2s$ khi vật lên s . Với $m_2 = M/2$ hệ cân bằng ($a_2 = 0$ trong công thức), đúng với cân bằng lực $2T = Mg$ và $T = m_2g$.

A movable pulley gains in force and loses in distance: the string end moves $2s$ while the body rises s . For $m_2 = M/2$ the system balances ($a_2 = 0$ in the formula), in agreement with the force balance $2T = Mg$ and $T = m_2g$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho $a_2 = a_M$ ở hệ có ròng rọc động, hoặc cho lực căng hai nhánh của ròng rọc nhẹ khác nhau. Quãng đường đầu dây gấp đôi quãng đường trục; lực căng ở mọi nhánh của một dây nhẹ vắt qua ròng rọc nhẹ bằng nhau.

Setting $a_2 = a_M$ in a system with a movable pulley, or taking different tensions in the two branches of a light pulley. The string end covers twice the distance of the axle; the tension in every branch of one light string over light pulleys is the same.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai khối chồng lên nhau, hai mặt tiếp xúc có hai ma sát. Giả sử trước: hai khối cùng gia tốc. Khi đó ma sát nghỉ cần cho khối trên được tính từ a chung; so với giá trị tối đa $\mu_1 m_1 g$. Vượt thì giả thiết sai, chuyển sang trượt tương đối với ma sát trượt và gia tốc khác nhau. Hỏi "F nhỏ nhất để trượt" tức là đặt đúng bằng giá trị tối đa.

Two blocks stacked, two surfaces in contact, two frictions. Assume first that both blocks share one acceleration. The static friction needed on the upper block follows from the common a ; compare it with the maximum $\mu_1 m_1 g$. If it is exceeded the assumption fails, and the blocks slide relative to each other with kinetic friction and different accelerations. "The smallest F for slipping" means setting it exactly equal to the maximum.

VÍ DỤ 5.11 (Hai khối chồng lên nhau) / EXAMPLE 5.11 (Stacked blocks) — Khối $m_1 = 2,0$ kg nằm trên khối $m_2 = 4,0$ kg, khối dưới đặt trên sàn ngang. Hệ số ma sát giữa hai khối là $0,3$ (nghỉ bằng trượt), giữa khối dưới và sàn là $0,1$. Kéo khối dưới bằng lực ngang F . (a) F nhỏ nhất để khối dưới bắt đầu trượt. (b) F lớn nhất để hai khối chuyển động cùng nhau. (c) Gia tốc của mỗi khối khi $F = 30$ N. Lấy $g = 9,8$ m/s².

Block $m_1 = 2.0$ kg lies on block $m_2 = 4.0$ kg, which rests on a horizontal floor. The coefficient between the blocks is 0.3 (static equal to kinetic), between the lower block and the floor 0.1 . Pull the lower block with a horizontal force F . (a) The smallest F for the lower block to start sliding. (b) The largest F for the blocks to move together. (c) The accelerations of the blocks when $F = 30$ N. Take $g = 9.8$ m/s².

Lời giải. / Solution.

- (a) Khi F còn nhỏ, cả hai khối đứng yên. Khối dưới bắt đầu trượt khi F bằng ma sát nghỉ tối đa của sàn: $F = \mu_2(m_1 + m_2)g = 0,1 \times 6,0 \times 9,8 = 5,88$ N.
(a) For small F both blocks stay at rest. The lower block starts to slide when F equals the floor's maximum static friction: $F = \mu_2(m_1 + m_2)g = 0.1 \times 6.0 \times 9.8 = 5.88$ N.
- (b) Cùng gia tốc a : khối trên chỉ chịu ma sát nghỉ từ khối dưới, $f = m_1 a \leq \mu_1 m_1 g$, nên $a \leq \mu_1 g = 2,94$ m/s². Cả hệ: $F - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$. Với a lớn nhất:
(b) With common acceleration a , the upper block feels only static friction from the lower one, $f = m_1 a \leq \mu_1 m_1 g$, so $a \leq \mu_1 g = 2.94$ m/s². Whole system: $F - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$. With the largest a :

$$F_{\max} = (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)g \quad (5.14)$$

3. $F_{\max} = 6,0 \times 0,4 \times 9,8 = 23,52 \text{ N}$.

$F_{\max} = 6.0 \times 0.4 \times 9.8 = 23.52 \text{ N}$.

4. (c) $F = 30 \text{ N} > 23,52 \text{ N}$ nên hai khối trượt lên nhau. Khối trên nhận ma sát trượt $\mu_1 m_1 g$ hướng tiến, $a_1 = \mu_1 g = 2,94 \text{ m/s}^2$. Khối dưới: $F - \mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = m_2 a_2$, nên $a_2 = (30 - 5,88 - 5,88)/4,0 = 4,56 \text{ m/s}^2$.

(c) $F = 30 \text{ N} > 23.52 \text{ N}$ so the blocks slip. The upper block gets kinetic friction $\mu_1 m_1 g$ pointing forward, $a_1 = \mu_1 g = 2.94 \text{ m/s}^2$. Lower block: $F - \mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = m_2 a_2$, so $a_2 = (30 - 5.88 - 5.88)/4.0 = 4.56 \text{ m/s}^2$.

Vậy: (a) 5,88 N; (b) 23,52 N; (c) $a_1 = 2,94 \text{ m/s}^2$ và $a_2 = 4,56 \text{ m/s}^2$, khối dưới chạy nhanh hơn khối trên.

Hence: (a) 5.88 N; (b) 23.52 N; (c) $a_1 = 2.94 \text{ m/s}^2$ and $a_2 = 4.56 \text{ m/s}^2$, the lower block running ahead of the upper. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai vật nối bằng dây vắt qua đỉnh một nêm cố định có hai mặt nghiêng 30° và 60° , có ma sát. Không biết vật nào trượt, hoặc có trượt không. Xét hai tình huống tới hạn như bài kéo trên mặt nghiêng: ở mỗi tình huống ma sát nghỉ đạt cực đại, mỗi vật có dạng cân bằng lực đã biết hướng ma sát. Hai bất phương trình cho khoảng giá trị của m_2 để hệ đứng yên.

Two bodies are joined by a string over the top of a fixed wedge with faces at 30° and 60° , both rough. It is not known which body slides, or whether either does. Take the two limiting cases as in the pull on an incline: in each, static friction is at its maximum and each body has a force balance with known friction directions. Two inequalities give the range of m_2 for which the system stays at rest.

VÍ DỤ 5.12 (Hai mặt nghiêng có ma sát) / EXAMPLE 5.12 (Two rough faces) — Nêm cố định có hai mặt nghiêng 30° và 60° (Hình 5.10), hệ số ma sát 0,10 trên cả hai mặt. Vật $m_1 = 3,0 \text{ kg}$ ở mặt 30° nối bằng dây nhẹ không dẫn vắt qua ròng rọc ở đỉnh với vật m_2 ở mặt 60° . (a) Tìm khoảng giá trị của m_2 để hệ đứng yên. (b) Với $m_2 = 2,5 \text{ kg}$, tính gia tốc và lực căng dây. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A fixed wedge has faces at 30° and 60° (Figure 5.10), with friction coefficient 0.10 on both. Body $m_1 = 3.0 \text{ kg}$ on the 30° face is joined by a light inextensible string over a pulley at the apex to body m_2 on the 60° face. (a) Find the range of m_2 for which the system stays at rest. (b) For $m_2 = 2.5 \text{ kg}$, find the acceleration and the tension. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

1. (a) Tới hạn m_2 đi xuống (m_1 đi lên): ma sát hướng ngược chuyển động trên cả hai mặt. Cân bằng ở ngưỡng:

(a) At the threshold of m_2 descending (m_1 rising): friction opposes motion on both faces. Balance at the threshold:

$$m_2 g \sin 60^\circ = m_1 g \sin 30^\circ + \mu m_1 g \cos 30^\circ + \mu m_2 g \cos 60^\circ$$

2. Rút gọn: $m_2(\sin 60^\circ - \mu \cos 60^\circ) = m_1(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ)$, nên $m_2 = 3,0 \times 0,5866/0,816 \approx 2,16 \text{ kg}$.

Simplify: $m_2(\sin 60^\circ - \mu \cos 60^\circ) = m_1(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ)$, so $m_2 = 3.0 \times 0.5866/0.816 \approx 2.16 \text{ kg}$.

3. Tới hạn m_1 đi xuống (m_2 đi lên): $m_1 g \sin 30^\circ = m_2 g \sin 60^\circ + \mu m_1 g \cos 30^\circ + \mu m_2 g \cos 60^\circ$, nên $m_2 = m_1(\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ)/(\sin 60^\circ + \mu \cos 60^\circ) = 3,0 \times 0,4134/0,916 \approx 1,35 \text{ kg}$.

Threshold of m_1 descending (m_2 rising): $m_1 g \sin 30^\circ = m_2 g \sin 60^\circ + \mu m_1 g \cos 30^\circ + \mu m_2 g \cos 60^\circ$, so $m_2 = m_1(\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ)/(\sin 60^\circ + \mu \cos 60^\circ) = 3.0 \times 0.4134/0.916 \approx 1.35 \text{ kg}$.

4. (b) $m_2 = 2,5 \text{ kg} > 2,16 \text{ kg}$ nên m_2 trượt xuống. Chiều dương theo chiều chuyển động, hai vật cùng a :

(b) $m_2 = 2.5 \text{ kg} > 2.16 \text{ kg}$ so m_2 slides down. Positive along the motion, both bodies share a :

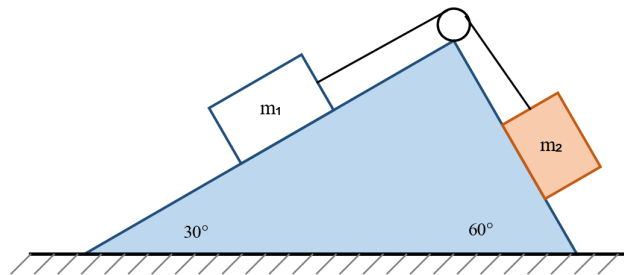
$$m_2 g \sin 60^\circ - T - \mu m_2 g \cos 60^\circ = m_2 a, \quad T - m_1 g \sin 30^\circ - \mu m_1 g \cos 30^\circ = m_1 a$$

5. Cộng: $a = [m_2(\sin 60^\circ - \mu \cos 60^\circ) - m_1(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ)]g/(m_1 + m_2) = (2,5 \times 0,816 - 3,0 \times 0,5866) \times 9,8/5,5 \approx 0,50 \text{ m/s}^2$. Lực căng $T = m_1(a + g \sin 30^\circ + \mu g \cos 30^\circ) = 3,0 \times (0,50 + 4,9 + 0,85) \approx 18,7 \text{ N}$.

Add: $a = [m_2(\sin 60^\circ - \mu \cos 60^\circ) - m_1(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ)]g/(m_1 + m_2) = (2.5 \times 0.816 - 3.0 \times 0.5866) \times 9.8/5.5 \approx 0.50 \text{ m/s}^2$. The tension is $T = m_1(a + g \sin 30^\circ + \mu g \cos 30^\circ) = 3.0 \times (0.50 + 4.9 + 0.85) \approx 18.7 \text{ N}$.

Vậy hệ đứng yên khi $1,35 \text{ kg} \leq m_2 \leq 2,16 \text{ kg}$; với $m_2 = 2,5 \text{ kg}$ thì $a \approx 0,50 \text{ m/s}^2$ (m_2 đi xuống) và $T \approx 18,7 \text{ N}$.

Hence the system rests for $1.35 \text{ kg} \leq m_2 \leq 2.16 \text{ kg}$; for $m_2 = 2.5 \text{ kg}$, $a \approx 0.50 \text{ m/s}^2$ (m_2 descending) and $T \approx 18.7 \text{ N}$. ■



Hình 5.10. Hai vật nối dây vắt qua đỉnh nêm có hai mặt nghiêng 30° và 60°

Figure 5.10. Two bodies joined by a string over the apex of a wedge with faces at 30° and 60°

NHẬN XÉT / REMARK — Khoảng đứng yên $1,35 \text{ kg}$ đến $2,16 \text{ kg}$ rộng hơn khi ma sát lớn hơn: đặt $\mu = 0$, khoảng co lại thành một giá trị $m_2 = m_1 \sin 30^\circ / \sin 60^\circ \approx 1,73 \text{ kg}$ (cân bằng không ma sát). Ma sát nghỉ biến cân bằng thành một khoảng.

The range of rest, 1.35 kg to 2.16 kg , widens with friction: for $\mu = 0$ it shrinks to the single value $m_2 = m_1 \sin 30^\circ / \sin 60^\circ \approx 1.73 \text{ kg}$ (frictionless balance). Static friction turns an equilibrium point into an interval.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho hệ vật nối dây luôn chuyển động theo chiều vật nặng hơn mà không so lực kéo với ma sát nghỉ tối đa, hoặc giả sử dây căng mà không kiểm $T \geq 0$. Ví dụ 5.9 phải so $m_3 g$ với tổng ma sát tối đa trước khi viết phương trình

chuyển động.

Letting a system of connected bodies always move toward the heavier body without comparing the pull with the maximum static friction, or assuming a taut string without checking $T \geq 0$. Example 5.9 must compare m_3g with the total maximum friction before any equation of motion is written.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Máy Atwood: $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$, $T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2)$. Ròng rọc động: lực nâng $2T$, đầu dây đi gấp đôi. Dây nhẹ qua ròng rọc nhẹ không ma sát: T bằng nhau hai phía.

Atwood machine: $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$, $T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2)$. Movable pulley: lifting force $2T$, string end moves twice as far. Light string over a light frictionless pulley: the same T on both sides.

5.8. Bảng chiến lược và thuật ngữ — Strategy table and glossary

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Ba lực đồng phẳng tác dụng lên vật cân bằng, biết các góc <i>Three coplanar forces on a body in equilibrium, angles known</i>	Hệ thức Lami hoặc tam giác lực khép kín <i>Lami's relation or the closed force triangle</i>	5.2
Cho độ lớn hai lực, hỏi hợp lực hoặc góc giữa chúng <i>Two force magnitudes given, resultant or angle wanted</i>	$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$, và giới hạn $ F_1 - F_2 \leq F \leq F_1 + F_2$ <i>$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$, with the bounds $F_1 - F_2 \leq F \leq F_1 + F_2$</i>	5.1
Cắt, ghép lò xo rồi treo vật <i>Cutting or joining springs, then hanging a body</i>	$k_1l_1 = kl_0$; song song cộng k , nối tiếp cộng $1/k$; sau cùng $kx = mg$ <i>$k_1l_1 = kl_0$; parallel adds k, series adds $1/k$; finally $kx = mg$</i>	5.4
"Lực nhỏ nhất", "góc kéo tối ưu" <i>"Smallest force", "best pulling angle"</i>	Tam giác lực với hình nón ma sát; $F = \mu mg/(\cos\beta + \mu\sin\beta)$, $\tan\beta = \mu$ <i>Force triangle with the friction cone; $F = \mu mg/(\cos\beta + \mu\sin\beta)$, $\tan\beta = \mu$</i>	5.5
Đẩy thế nào cũng không trượt, hỏi góc giới hạn <i>The body never moves however hard it is pushed, limiting angle wanted</i>	Mẫu số $\cos\beta - \mu\sin\beta \leq 0$, tức $\tan\beta \geq 1/\mu$ (lực nằm trong hình nón ma sát) <i>Denominator $\cos\beta - \mu\sin\beta \leq 0$, that is $\tan\beta \geq 1/\mu$ (force inside the friction cone)</i>	5.6
Vật chưa trượt, hỏi khoảng giá trị lực, góc hay khối lượng <i>Body not yet sliding, range of force, angle or mass wanted</i>	Hai tình huống tới hạn, ma sát nghỉ cực đại ở mỗi chiều <i>Two limiting cases, maximum static friction in each direction</i>	5.7, 5.12
Rơi trong không khí hoặc chất lỏng, cho vận tốc giới hạn <i>Fall in air or liquid, terminal speed given</i>	$a = g(1 - v^2/v_{gh}^2)$ hoặc $a = g(1 - v/v_{gh})$; $v_{gh} \propto \sqrt{m}$ cho lực cản v^2 <i>$a = g(1 - v^2/v_t^2)$ or $a = g(1 - v/v_t)$; $v_t \propto \sqrt{m}$ for v^2 drag</i>	5.8

Dấu hiệu trong đề <i>Sign in the problem</i>	Công cụ nên thử <i>Tool to try</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Dây hay xích có khối lượng, hỏi lực căng tại một điểm <i>Rope or chain with mass, tension at a point wanted</i>	Gia tốc từ cả hệ, rồi cắt dây tại điểm xét và viết định luật II cho một phần <i>Acceleration from the whole system, then cut at the point and write the second law for one part</i>	5.3
Nhiều vật nối dây, bàn có ma sát, ròng rọc cố định hoặc động <i>Several bodies on strings, rough table, fixed or movable pulleys</i>	Dây không giãn: cùng a (hệ số 2 ở ròng rọc động); cộng phương trình để triệt lực căng trong <i>Inextensible string: same a (factor 2 at a movable pulley); add equations to cancel internal tensions</i>	5.9, 5.10
Hai khối chồng lên nhau, "bắt đầu trượt tương đối" <i>Stacked blocks, "start to slip relative to each other"</i>	Giả sử cùng a , tính ma sát nghỉ cần và so với $\mu_1 m_1 g$ <i>Assume a common a, compute the static friction needed and compare with $\mu_1 m_1 g$</i>	5.11

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hệ quy chiếu quán tính	Inertial frame	hệ trong đó vật không chịu lực thì đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều <i>a frame in which a force-free body rests or moves uniformly</i>
Khối lượng	Mass	đo mức quán tính, hệ số trong $F = ma$ <i>measure of inertia, the factor in $F = ma$</i>
Hợp lực	Resultant force	tổng vector các lực tác dụng lên vật <i>vector sum of the forces on a body</i>
Phân tích lực	Resolution of a force	thay một lực bằng các thành phần <i>replacing a force by its components</i>
Cặp lực và phản lực	Action and reaction pair	hai lực của định luật III, đặt vào hai vật khác nhau <i>the two forces of the third law, on two different bodies</i>
Sơ đồ vật tự do	Free-body diagram	hình vẽ riêng một vật cùng mọi lực tác dụng lên nó <i>a single body drawn with every force acting on it</i>
Trọng lực	Weight	lực hấp dẫn của Trái Đất lên vật, $P = mg$ <i>gravitational pull of the Earth on a body, $W = mg$</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Phản lực pháp tuyến	Normal force	lực của mặt tiếp xúc, vuông góc với mặt <i>force of the contact surface, perpendicular to it</i>
Lực căng dây	Tension	lực dây kéo vật dọc theo dây <i>force a string exerts along itself</i>
Độ cứng lò xo	Spring stiffness	hệ số k trong $F = k\Delta l$, đơn vị N/m <i>the factor k in $F = k\Delta l$, unit N/m</i>
Giới hạn đàn hồi	Elastic limit	biến dạng lớn nhất mà vật còn lấy lại hình dạng cũ <i>largest deformation from which the body still recovers its shape</i>
Ma sát nghỉ	Static friction	lực giữ vật khỏi trượt, $0 \leq f \leq \mu_n N$ <i>force preventing sliding, $0 \leq f \leq \mu_s N$</i>
Ma sát trượt	Kinetic friction	$f = \mu N$, ngược chiều vận tốc tương đối <i>$f = \mu N$, against the relative velocity</i>
Hệ số ma sát	Coefficient of friction	tỉ số f/N , không có đơn vị <i>the ratio f/N, without unit</i>
Góc ma sát	Friction angle	góc φ có $\tan \varphi = \mu_n$ <i>the angle φ with $\tan \varphi = \mu_s$</i>
Hình nón ma sát	Friction cone	nón các hướng của phản lực toàn phần mà vật còn đứng yên <i>cone of directions of the total reaction that keep the body at rest</i>
Lực cản của chất lưu	Fluid drag	lực của chất lưu ngược chiều vận tốc <i>force of the fluid opposing the velocity</i>
Vận tốc giới hạn	Terminal speed	tốc độ mà lực cản cân bằng trọng lực <i>the speed at which drag balances weight</i>
Lực nâng	Lift	thành phần lực chất lưu vuông góc vận tốc tương đối <i>fluid force component perpendicular to the relative velocity</i>
Máy Atwood	Atwood machine	hai vật nối dây vắt qua ròng rọc cố định <i>two bodies joined by a string over a fixed pulley</i>
Ròng rọc động	Movable pulley	ròng rọc có trục dịch chuyển, treo trên dây <i>pulley whose axle moves, hung on the string</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Liên kết	Constraint	hệ thức giữa gia tốc các vật do dây hoặc tiếp xúc <i>relation between accelerations imposed by a string or contact</i>

5.9. Bài tự luyện — Practice problems

Mức 1 — Học sinh giỏi cấp tỉnh — Level 1 — Provincial olympiad

Bài 5.1 / Problem 5.1 — Vật 5,0 kg nằm trên sàn ngang, $\mu = 0,25$, được kéo từ nghỉ bằng lực ngang 20 N. (a) Tính gia tốc. (b) Vận tốc và quãng đường sau 4,0 s. (c) Bỏ lực kéo ở thời điểm đó, vật đi thêm bao xa thì dừng? Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A 5.0 kg body lies on a horizontal floor, $\mu = 0.25$, and is pulled from rest by a horizontal force of 20 N. (a) Find the acceleration. (b) The speed and distance after 4.0 s. (c) The pull is removed at that moment; how much farther does the body go before stopping? Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 5.2 / Problem 5.2 — Vật 0,50 kg treo vào đầu một lò xo làm lò xo giãn 4,9 cm. (a) Tính độ cứng. (b) Treo cùng vật vào hai lò xo giống thế ghép nối tiếp, rồi ghép song song: độ giãn mỗi trường hợp. (c) Cắt lò xo ban đầu làm đôi, treo cùng vật vào một nửa: độ giãn. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A 0.50 kg body hung from a spring stretches it 4.9 cm. (a) Find the stiffness. (b) Hang the same body from two such springs in series, then in parallel: the extension in each case. (c) Cut the original spring in half and hang the body from one half: the extension. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 5.3 / Problem 5.3 — Đèn 2,0 kg treo bằng hai dây nhẹ đối xứng buộc vào hai điểm ngang nhau trên trần. (a) Góc giữa hai dây là 120° : lực căng mỗi dây. (b) Góc giữa hai dây là 90° : lực căng. (c) Mỗi dây chịu tối đa 25 N: góc lớn nhất giữa hai dây. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A 2.0 kg lamp hangs from two light symmetric strings tied to two points at the same height on the ceiling. (a) The angle between the strings is 120° : the tension in each. (b) The angle is 90° : the tension. (c) Each string can bear at most 25 N: the largest angle between the strings. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 5.4 / Problem 5.4 — Máy Atwood có hai vật 0,60 kg và 0,40 kg, dây nhẹ không dẫn, ròng rọc nhẹ không ma sát, thả từ nghỉ. Tính gia tốc, lực căng dây, lực tác dụng lên trục ròng rọc, và vận tốc cùng quãng đường sau 2,0 s. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

An Atwood machine has bodies of 0.60 kg and 0.40 kg, a light inextensible string and a light frictionless pulley, released from rest. Find the acceleration, the tension, the force on the pulley axle, and the speed and distance after 2.0 s. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Mức 2 — Học sinh giỏi quốc gia — Level 2 — National olympiad

Bài 5.5 / Problem 5.5 — Đẩy vật 4,0 kg lên đều trên mặt nghiêng 30° , $\mu = 0,20$, bằng lực F nằm ngang (hướng vào mặt nghiêng). (a) Tính F. (b) Khi góc nghiêng α lớn dần, đến giá trị nào thì không thể đẩy vật lên bằng lực ngang dù F lớn đến đâu? Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Push a 4.0 kg body up a 30° incline at constant speed, $\mu = 0.20$, with a horizontal force F (directed into the incline). (a) Find F. (b) As the angle α grows, at what value is it impossible to push the body up with a horizontal force however large F is? Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 5.6 / Problem 5.6 — Vật $m_1 = 2,0$ kg nằm trên bàn ngang nhẵn, nối bằng dây nhẹ vắt qua ròng rọc cố định ở mép bàn, rồi xuống vòng qua ròng rọc động nhẹ treo vật $m_2 = 3,0$ kg và buộc đầu dây vào giá cố định (ngang với mép bàn). Thả hệ từ nghỉ. Tính gia tốc m_1 , m_2 và lực căng dây. Lấy $g = 9,8$ m/s².

Body $m_1 = 2.0$ kg lies on a smooth horizontal table, tied by a light string over a fixed pulley at the table edge, down and around a light movable pulley that carries body $m_2 = 3.0$ kg, with the string end tied to a fixed support (level with the table edge). Release from rest. Find the accelerations of m_1 and m_2 and the tension. Take $g = 9.8$ m/s².

Bài 5.7 / Problem 5.7 — Khối $m_1 = 1,0$ kg nằm trên khối $m_2 = 2,0$ kg, khối dưới đặt trên sàn ngang. Hệ số ma sát giữa hai khối 0,20, giữa khối dưới và sàn 0,10. Một dây nhẹ buộc khối trên, vắt qua ròng rọc gắn vào tường bên trái rồi buộc vào khối dưới. Kéo khối dưới sang phải bằng lực ngang 20 N, khối trên đi sang trái. Tính gia tốc và lực căng dây. Lấy $g = 9,8$ m/s².

Block $m_1 = 1.0$ kg lies on block $m_2 = 2.0$ kg, which rests on a horizontal floor. The coefficient between the blocks is 0.20, between the lower block and the floor 0.10. A light string tied to the upper block passes over a pulley fixed to the left-hand wall and is tied to the lower block. The lower block is pulled to the right by a horizontal 20 N force, and the upper block moves left. Find the acceleration and the tension. Take $g = 9.8$ m/s².

Bài 5.8 / Problem 5.8 — Khi rơi trong không khí với lực cản $F_c = cv^2$, một vật có gia tốc 8,4 m/s² khi vận tốc là 4,0 m/s. Tính vận tốc giới hạn; gia tốc khi $v = 8,0$ m/s; vận tốc giới hạn nếu khối lượng vật gấp bốn lần (cùng hình dạng, cùng c). Lấy $g = 9,8$ m/s².

A body falling in air with drag $F_d = cv^2$ has acceleration 8.4 m/s² when its speed is 4.0 m/s. Find its terminal speed; the acceleration at $v = 8.0$ m/s; the terminal speed if the mass is four times larger (same shape, same c). Take $g = 9.8$ m/s².

Mức 3 — Olympic quốc tế — Level 3 — International olympiad

Bài 5.9 / Problem 5.9 — Sợi dây đồng chất dài 2,0 m, khối lượng 1,2 kg nằm trên mặt bàn ngang nhám ($\mu = 0,40$, nghỉ bằng trượt), một đoạn x thông qua mép bàn. Mép bàn coi là nhẵn và tròn. (a) Giá trị lớn nhất của x để dây còn đứng yên. (b) Thả dây khi $x = 1,0$ m: gia tốc ngay sau khi thả. (c) Lực căng tại mép bàn ở lúc đó. Lấy $g = 9,8$ m/s².

A uniform rope 2.0 m long, mass 1.2 kg, lies on a rough horizontal table ($\mu = 0.40$, static equal to kinetic) with a length x hanging over the edge. The edge is smooth and rounded. (a) The largest x for which the rope stays at rest. (b) The rope is released when $x = 1.0$ m: its acceleration just after release. (c) The tension at the table edge at that moment. Take $g = 9.8$ m/s².

Bài 5.10 / Problem 5.10 — Dây thứ nhất vắt qua ròng rọc cố định nối vật m_1 với trục của ròng rọc động P (nhẹ). Dây thứ hai vắt qua P mang hai vật $m_2 = 2,0$ kg và $m_3 = 3,0$ kg ở hai đầu. Dây nhẹ không dẫn, ròng rọc không ma sát. (a) Với $m_1 = 4,0$ kg: gia tốc ba vật và lực căng hai dây. (b) Tìm m_1 để m_3 đứng yên so với đất, và kiểm bằng gia tốc của m_1 và m_2 . Lấy $g = 9,8$ m/s².

A first string over a fixed pulley joins body m_1 to the axle of a light movable pulley P. A second string over P carries bodies $m_2 = 2.0$ kg and $m_3 = 3.0$ kg at its ends. Strings are light and inextensible, pulleys frictionless. (a) For $m_1 = 4.0$ kg: the accelerations of the three bodies and the tensions in both strings. (b) Find m_1 for which m_3 stays at rest relative to the ground, and check with the accelerations of m_1 and m_2 . Take $g = 9.8$ m/s².

Bài 5.11 / Problem 5.11 — Vật 2,0 kg nằm trên mặt nghiêng 20°, $\mu = 0,50$ (nghỉ bằng trượt). Một lực F nằm trong mặt nghiêng, vuông góc với đường dốc chính (theo phương ngang của

mặt nghiêng), tăng dần từ 0. (a) F lớn nhất để vật còn đứng yên. (b) Với $F = 8,0 \text{ N}$, gia tốc đầu và hướng chuyển động so với đường dốc chính. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A 2.0 kg body lies on a 20° incline, $\mu = 0.50$ (static equal to kinetic). A force F lying in the plane of the incline, perpendicular to the line of steepest descent (along the horizontal of the incline), grows from 0. (a) The largest F for which the body stays at rest. (b) For $F = 8.0 \text{ N}$, the initial acceleration and the direction of motion relative to the line of steepest descent. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Bài 5.12 / Problem 5.12 — Kéo vật 6,0 kg trượt đều lên mặt nghiêng 25° , $\mu = 0,30$, bằng lực F hợp với mặt nghiêng góc β (hướng lên khỏi mặt). Chứng minh $F = mg \sin(\alpha + \varphi)/\cos(\beta - \varphi)$ với $\tan \varphi = \mu$, tìm β để F nhỏ nhất, tính $F_{\min}$ và so với lực kéo song song mặt nghiêng. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Pull a 6.0 kg body at constant speed up a 25° incline, $\mu = 0.30$, with a force F at angle β to the incline (pointing up and away from the surface). Show that $F = mg \sin(\alpha + \varphi)/\cos(\beta - \varphi)$ with $\tan \varphi = \mu$, find β for the smallest F , compute $F_{\min}$, and compare with a pull parallel to the incline. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

5.10. Lời giải bài tự luyện — Solutions to practice problems

Bài 5.1 — Problem 5.1

- (a) $N = mg = 49 \text{ N}$, $f = \mu N = 12,25 \text{ N}$. Định luật II theo phương ngang: $F - f = ma$, nên $a = (20 - 12,25)/5,0 = 1,55 \text{ m/s}^2$.
(a) $N = mg = 49 \text{ N}$, $f = \mu N = 12.25 \text{ N}$. Second law horizontally: $F - f = ma$, so $a = (20 - 12.25)/5.0 = 1.55 \text{ m/s}^2$.
- (b) $v = at = 1,55 \times 4,0 = 6,2 \text{ m/s}$; $s = at^2/2 = 1,55 \times 16/2 = 12,4 \text{ m}$.
(b) $v = at = 1.55 \times 4.0 = 6.2 \text{ m/s}$; $s = at^2/2 = 1.55 \times 16/2 = 12.4 \text{ m}$.
- (c) Sau khi bỏ lực kéo chỉ còn ma sát trượt: $a' = -\mu g = -2,45 \text{ m/s}^2$. Quãng đường dừng $s' = v^2/(2\mu g) = 6,2^2/4,9 \approx 7,84 \text{ m}$.
(c) With the pull removed only kinetic friction remains: $a' = -\mu g = -2.45 \text{ m/s}^2$. Stopping distance $s' = v^2/(2\mu g) = 6.2^2/4.9 \approx 7.84 \text{ m}$.

Vậy $a = 1,55 \text{ m/s}^2$; sau 4,0 s vật có $v = 6,2 \text{ m/s}$ và đi được 12,4 m; sau đó đi thêm khoảng 7,84 m thì dừng.

Hence $a = 1.55 \text{ m/s}^2$; after 4.0 s the body has $v = 6.2 \text{ m/s}$ and has gone 12.4 m; it then travels about 7.84 m more before stopping. ■

Bài 5.2 — Problem 5.2

- (a) $kx = mg$ nên $k = 0,50 \times 9,8/0,049 = 100 \text{ N/m}$.
(a) $kx = mg$ so $k = 0.50 \times 9.8/0.049 = 100 \text{ N/m}$.
- (b) Nối tiếp: $k_{nt} = k/2 = 50 \text{ N/m}$, độ giãn $x = 4,9/50 = 0,098 \text{ m} = 9,8 \text{ cm}$. Song song: $k_{ss} = 2k = 200 \text{ N/m}$, $x = 4,9/200 = 0,0245 \text{ m} = 2,45 \text{ cm}$.
(b) Series: $k_s = k/2 = 50 \text{ N/m}$, extension $x = 4.9/50 = 0.098 \text{ m} = 9.8 \text{ cm}$. Parallel: $k_p = 2k = 200 \text{ N/m}$, $x = 4.9/200 = 0.0245 \text{ m} = 2.45 \text{ cm}$.
- (c) Nửa lò xo có $l_1 = l_0/2$, nên $k_1 = k l_0/l_1 = 200 \text{ N/m}$ và $x = 2,45 \text{ cm}$, bằng trường hợp song song.
(c) Half a spring has $l_1 = l_0/2$, so $k_1 = k l_0/l_1 = 200 \text{ N/m}$ and $x = 2.45 \text{ cm}$, the same as the parallel pair.

Vậy $k = 100 \text{ N/m}$; độ giãn $9,8 \text{ cm}$ (nối tiếp), $2,45 \text{ cm}$ (song song), $2,45 \text{ cm}$ (nửa lò xo).
Hence $k = 100 \text{ N/m}$; the extension is 9.8 cm (series), 2.45 cm (parallel), 2.45 cm (half spring).



Bài 5.3 — Problem 5.3

1. Mỗi dây hợp phương thẳng đứng góc $\theta/2$ (θ là góc giữa hai dây). Thành phần ngang của hai lực căng triệt tiêu, thành phần đứng cân bằng trọng lực:

Each string makes angle $\theta/2$ with the vertical (θ the angle between the strings). The horizontal components cancel and the vertical ones balance the weight:

$$2T \cos(\theta/2) = mg$$

2. (a) $\theta = 120^\circ$: $\cos 60^\circ = 1/2$ nên $T = mg = 19,6 \text{ N}$.

(a) $\theta = 120^\circ$: $\cos 60^\circ = 1/2$ so $T = mg = 19.6 \text{ N}$.

3. (b) $\theta = 90^\circ$: $T = mg/(2\cos 45^\circ) = 19,6/\sqrt{2} \approx 13,9 \text{ N}$.

(b) $\theta = 90^\circ$: $T = mg/(2\cos 45^\circ) = 19.6/\sqrt{2} \approx 13.9 \text{ N}$.

4. (c) $T = 25 \text{ N}$: $\cos(\theta/2) = 19,6/50 = 0,392$, $\theta/2 \approx 66,9^\circ$, $\theta \approx 133,8^\circ$.

(c) $T = 25 \text{ N}$: $\cos(\theta/2) = 19.6/50 = 0.392$, $\theta/2 \approx 66.9^\circ$, $\theta \approx 133.8^\circ$.

Vậy $T = 19,6 \text{ N}$ ở 120° , $T \approx 13,9 \text{ N}$ ở 90° ; để dây không đứt thì góc giữa hai dây không vượt quá khoảng $133,8^\circ$.

Hence $T = 19.6 \text{ N}$ at 120° , $T \approx 13.9 \text{ N}$ at 90° ; for the strings not to break the angle between them must not exceed about 133.8° . ■

Bài 5.4 — Problem 5.4

1. Theo (5.12): $a = (0,60 - 0,40) \times 9,8/(0,60 + 0,40) = 1,96 \text{ m/s}^2$; $T = 2 \times 0,60 \times 0,40 \times 9,8/1,00 = 4,704 \text{ N} \approx 4,70 \text{ N}$.

By (5.12): $a = (0.60 - 0.40) \times 9.8/(0.60 + 0.40) = 1.96 \text{ m/s}^2$; $T = 2 \times 0.60 \times 0.40 \times 9.8/1.00 = 4.704 \text{ N} \approx 4.70 \text{ N}$.

2. Lực lên trục: $2T = 9,408 \text{ N} \approx 9,41 \text{ N}$ (nhỏ hơn tổng trọng lực $9,8 \text{ N}$).

Force on the axle: $2T = 9.408 \text{ N} \approx 9.41 \text{ N}$ (less than the total weight 9.8 N).

3. Sau $2,0 \text{ s}$: $v = at = 3,92 \text{ m/s}$; $s = at^2/2 = 1,96 \times 4/2 = 3,92 \text{ m}$.

After 2.0 s : $v = at = 3.92 \text{ m/s}$; $s = at^2/2 = 1.96 \times 4/2 = 3.92 \text{ m}$.

Vậy $a = 1,96 \text{ m/s}^2$, $T \approx 4,70 \text{ N}$, lực lên trục $\approx 9,41 \text{ N}$; sau $2,0 \text{ s}$ $v = 3,92 \text{ m/s}$ và $s = 3,92 \text{ m}$.

Hence $a = 1.96 \text{ m/s}^2$, $T \approx 4.70 \text{ N}$, axle force $\approx 9.41 \text{ N}$; after 2.0 s $v = 3.92 \text{ m/s}$ and $s = 3.92 \text{ m}$. ■

Bài 5.5 — Problem 5.5

1. (a) Chiều dương lên dốc. Dọc mặt nghiêng: $F \cos \alpha - mg \sin \alpha - f = 0$. Vuông góc: $N = mg \cos \alpha + F \sin \alpha$. Ma sát trượt $f = \mu N$.

(a) Up the slope positive. Along the incline: $F \cos \alpha - mg \sin \alpha - f = 0$. Perpendicular: $N = mg \cos \alpha + F \sin \alpha$. Kinetic friction $f = \mu N$.

$$F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

2. Số: $F = 39,2 \times (0,5 + 0,2 \times 0,866)/(0,866 - 0,2 \times 0,5) = 39,2 \times 0,6732/0,766 \approx 34,5 \text{ N}$.
 Kiểm: $N = 33,95 + 34,45 \times 0,5 \approx 51,2 \text{ N}$, $f \approx 10,2 \text{ N}$; $F \cos \alpha = 29,8 \text{ N} = 19,6 + 10,2$.
Numbers: $F = 39.2 \times (0.5 + 0.2 \times 0.866)/(0.866 - 0.2 \times 0.5) = 39.2 \times 0.6732/0.766 \approx 34.5 \text{ N}$. Check: $N = 33.95 + 34.45 \times 0.5 \approx 51.2 \text{ N}$, $f \approx 10.2 \text{ N}$; $F \cos \alpha = 29.8 \text{ N} = 19.6 + 10.2$.

3. (b) F hữu hạn dương chỉ khi $\cos \alpha - \mu \sin \alpha > 0$, tức $\tan \alpha < 1/\mu = 5$, $\alpha < 78,7^\circ$. Từ $\alpha \approx 78,7^\circ$ trở lên lực ngang bị ma sát (tăng theo F) triệt hết, vật kẹt.
(b) F is finite and positive only if $\cos \alpha - \mu \sin \alpha > 0$, that is $\tan \alpha < 1/\mu = 5$, $\alpha < 78.7^\circ$. From $\alpha \approx 78.7^\circ$ upward the friction (growing with F) cancels any horizontal push and the body jams.

Vậy $F \approx 34,5 \text{ N}$; không đẩy lên được khi $\alpha \geq 78,7^\circ$.

Hence $F \approx 34.5 \text{ N}$; pushing up is impossible for $\alpha \geq 78.7^\circ$. ■

Bài 5.6 — Problem 5.6

1. Liên kết theo tính chất 5.21: m_2 đi xuống a_2 thì đoạn dây đứng dài thêm 2 phần, m_1 phải đi về phía mép bàn với $a_1 = 2a_2$.

Constraint by property 5.21: if m_2 descends with a_2 , the vertical branches lengthen twice over, so m_1 must move toward the edge with $a_1 = 2a_2$.

$$T = m_1 a_1 = 2m_1 a_2, \quad m_2 g - 2T = m_2 a_2$$

2. Thế T : $m_2 g = (m_2 + 4m_1)a_2$, nên $a_2 = 3,0 \times 9,8/(3,0 + 8,0) \approx 2,67 \text{ m/s}^2$, $a_1 \approx 5,35 \text{ m/s}^2$,
 $T = 2,0 \times 5,345 \approx 10,7 \text{ N}$.

Substitute T : $m_2 g = (m_2 + 4m_1)a_2$, so $a_2 = 3.0 \times 9.8/(3.0 + 8.0) \approx 2.67 \text{ m/s}^2$, $a_1 \approx 5.35 \text{ m/s}^2$, $T = 2.0 \times 5.345 \approx 10.7 \text{ N}$.

3. Kiểm cho m_2 : $m_2(g - a_2) = 3,0 \times 7,127 = 21,4 \text{ N} = 2T$.

Check for m_2 : $m_2(g - a_2) = 3.0 \times 7.127 = 21.4 \text{ N} = 2T$.

Vậy $a_1 \approx 5,35 \text{ m/s}^2$, $a_2 \approx 2,67 \text{ m/s}^2$, $T \approx 10,7 \text{ N}$.

Hence $a_1 \approx 5.35 \text{ m/s}^2$, $a_2 \approx 2.67 \text{ m/s}^2$, $T \approx 10.7 \text{ N}$. ■

Bài 5.7 — Problem 5.7

1. Dây không giãn: hai khối cùng độ lớn a , khối dưới đi phải, khối trên đi trái. Ma sát từ khối dưới lên khối trên hướng phải (chống lại chuyển động trái của khối trên so với khối dưới), phản lực ma sát lên khối dưới hướng trái.

Inextensible string: both blocks have the same a , the lower going right, the upper going left. Friction from the lower block on the upper points right (against the upper block's leftward motion relative to the lower), and its reaction on the lower block points left.

$$T - \mu_1 m_1 g = m_1 a, \quad F - T - \mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = m_2 a$$

2. Cộng: $F - 2\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$, nên $a = (20 - 3,92 - 2,94)/3,0 = 4,38 \text{ m/s}^2$.

Add: $F - 2\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$, so $a = (20 - 3.92 - 2.94)/3.0 = 4.38 \text{ m/s}^2$.

3. $T = m_1 a + \mu_1 m_1 g = 4,38 + 1,96 = 6,34 \text{ N}$. Kiểm cho khối dưới: $20 - 6,34 - 1,96 - 2,94 = 8,76 \text{ N} = 2,0 \times 4,38$.

$T = m_1 a + \mu_1 m_1 g = 4.38 + 1.96 = 6.34 \text{ N}$. Check for the lower block: $20 - 6.34 - 1.96 - 2.94 = 8.76 \text{ N} = 2.0 \times 4.38$.

Vậy $a = 4,38 \text{ m/s}^2$ và $T = 6,34 \text{ N}$.

Hence $a = 4.38 \text{ m/s}^2$ and $T = 6.34 \text{ N}$. ■

Bài 5.8 — Problem 5.8

1. Theo (5.11) $a = g(1 - v^2/v_{gh}^2)$. Với $v = 4,0 \text{ m/s}$: $8,4/9,8 = 1 - 16/v_{gh}^2$, nên $16/v_{gh}^2 = 1/7$ và $v_{gh}^2 = 112 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $v_{gh} \approx 10,6 \text{ m/s}$.

By (5.11) $a = g(1 - v^2/v_t^2)$. For $v = 4.0 \text{ m/s}$: $8.4/9.8 = 1 - 16/v_t^2$, so $16/v_t^2 = 1/7$ and $v_t^2 = 112 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $v_t \approx 10.6 \text{ m/s}$.

2. Khi $v = 8,0 \text{ m/s}$: $a = 9,8 \times (1 - 64/112) = 9,8 \times 3/7 = 4,2 \text{ m/s}^2$.

At $v = 8.0 \text{ m/s}$: $a = 9.8 \times (1 - 64/112) = 9.8 \times 3/7 = 4.2 \text{ m/s}^2$.

3. $v_{gh} \propto \sqrt{m}$: khối lượng gấp bốn thì v_{gh} gấp hai, bằng $2 \times 10,58 \approx 21,2 \text{ m/s}$.

$v_t \propto \sqrt{m}$: four times the mass doubles v_t , giving $2 \times 10.58 \approx 21.2 \text{ m/s}$.

Vậy $v_{gh} \approx 10,6 \text{ m/s}$; $a = 4,2 \text{ m/s}^2$ tại $v = 8,0 \text{ m/s}$; v_{gh} mới $\approx 21,2 \text{ m/s}$.

Hence $v_t \approx 10.6 \text{ m/s}$; $a = 4.2 \text{ m/s}^2$ at $v = 8.0 \text{ m/s}$; the new $v_t \approx 21.2 \text{ m/s}$. ■

Bài 5.9 — Problem 5.9

1. Khối lượng trên đơn vị dài $\lambda = 1,2/2,0 = 0,60 \text{ kg/m}$. Phần thõng có trọng lực λxg kéo dây; phần trên bàn có phản lực $N = \lambda(L - x)g$ và ma sát nghỉ tối đa $\mu\lambda(L - x)g$.

Mass per unit length $\lambda = 1.2/2.0 = 0.60 \text{ kg/m}$. The hanging part has weight λxg pulling the rope; the part on the table has $N = \lambda(L - x)g$ and maximum static friction $\mu\lambda(L - x)g$.

2. (a) Điều kiện đứng yên: $\lambda xg \leq \mu\lambda(L - x)g$, tức $x \leq \mu L/(1 + \mu) = 0,40 \times 2,0/1,40 \approx 0,571 \text{ m}$.

(a) Condition for rest: $\lambda xg \leq \mu\lambda(L - x)g$, that is $x \leq \mu L/(1 + \mu) = 0.40 \times 2.0/1.40 \approx 0.571 \text{ m}$.

3. (b) $x = 1,0 \text{ m} > 0,571 \text{ m}$ nên dây trượt. Cả dây có khối lượng M , cùng độ lớn gia tốc a : $\lambda xg - \mu\lambda(L - x)g = Ma$, nên $a = g[x - \mu(L - x)]/L = 9,8 \times (1,0 - 0,40)/2,0 = 2,94 \text{ m/s}^2$.

(b) $x = 1.0 \text{ m} > 0.571 \text{ m}$ so the rope slides. The whole rope of mass M has one acceleration magnitude a : $\lambda xg - \mu\lambda(L - x)g = Ma$, so $a = g[x - \mu(L - x)]/L = 9.8 \times (1.0 - 0.40)/2.0 = 2.94 \text{ m/s}^2$.

4. (c) Cắt dây tại mép bàn, xét phần thõng (khối lượng $\lambda x = 0,60 \text{ kg}$): $\lambda xg - T = \lambda xa$, nên $T = 0,60 \times (9,8 - 2,94) \approx 4,12 \text{ N}$. Kiểm bằng phần trên bàn: $T - \mu\lambda(L - x)g = \lambda(L - x)a$ cho $T = 0,60 \times 2,94 + 0,40 \times 0,60 \times 9,8 = 1,764 + 2,352 \approx 4,12 \text{ N}$.

(c) Cut the rope at the edge and take the hanging part (mass $\lambda x = 0.60 \text{ kg}$): $\lambda xg - T = \lambda xa$, so $T = 0.60 \times (9.8 - 2.94) \approx 4.12 \text{ N}$. Check with the part on the table: $T - \mu\lambda(L - x)g = \lambda(L - x)a$ gives $T = 0.60 \times 2.94 + 0.40 \times 0.60 \times 9.8 = 1.764 + 2.352 \approx 4.12 \text{ N}$.

Vậy $x_{\max} \approx 0,571 \text{ m}$; $a = 2,94 \text{ m/s}^2$; lực căng tại mép bàn $\approx 4,12 \text{ N}$.

Hence $x_{\max} \approx 0.571 \text{ m}$; $a = 2.94 \text{ m/s}^2$; the tension at the table edge $\approx 4.12 \text{ N}$. ■

Bài 5.10 — Problem 5.10

1. Chiều dương xuống cho cả ba vật. Dây 1: $y_1 + y_P$ không đổi, nên $a_P = -a_1$. Dây 2: $(y_2 - y_P) + (y_3 - y_P)$ không đổi, nên $a_2 + a_3 = 2a_P = -2a_1$. Ròng rọc P nhẹ: $T_1 = 2T_2$.

Positive downward for all three bodies. String 1: $y_1 + y_P$ is constant, so $a_P = -a_1$. String 2: $(y_2 - y_P) + (y_3 - y_P)$ is constant, so $a_2 + a_3 = 2a_P = -2a_1$. The light pulley P: $T_1 = 2T_2$.

$$m_1g - T_1 = m_1a_1, \quad m_2g - T_2 = m_2a_2, \quad m_3g - T_2 = m_3a_3$$

2. Thế $a_1 = g - T_1/m_1 = g - 2T_2/m_1$, $a_2 = g - T_2/m_2$, $a_3 = g - T_2/m_3$ vào $a_2 + a_3 = -2a_1$:
Put $a_1 = g - T_1/m_1 = g - 2T_2/m_1$, $a_2 = g - T_2/m_2$, $a_3 = g - T_2/m_3$ into $a_2 + a_3 = -2a_1$:

$$T_2 = 4g/(4/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3)$$

3. (a) $T_2 = 39,2/(1,0 + 0,5 + 0,333) \approx 21,4$ N; $T_1 = 2T_2 \approx 42,8$ N. $a_1 = 9,8 - 42,76/4,0 \approx -0,89$ m/s² (m_1 đi lên), $a_2 = 9,8 - 21,38/2,0 \approx -0,89$ m/s² (m_2 đi lên), $a_3 = 9,8 - 21,38/3,0 \approx 2,67$ m/s² (m_3 đi xuống). Kiểm: $a_2 + a_3 = 1,78 = -2a_1$.
(a) $T_2 = 39,2/(1,0 + 0,5 + 0,333) \approx 21,4$ N; $T_1 = 2T_2 \approx 42,8$ N. $a_1 = 9,8 - 42,76/4,0 \approx -0,89$ m/s² (m_1 rises), $a_2 = 9,8 - 21,38/2,0 \approx -0,89$ m/s² (m_2 rises), $a_3 = 9,8 - 21,38/3,0 \approx 2,67$ m/s² (m_3 descends). Check: $a_2 + a_3 = 1,78 = -2a_1$.
4. (b) $a_3 = 0$ cho $T_2 = m_3g$, tức $4/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 = 4/m_3$, nên $4/m_1 = 3/m_3 - 1/m_2 = 1,0 - 0,5 = 0,5$ và $m_1 = 8,0$ kg. Kiểm: $T_2 = 29,4$ N, $a_2 = 9,8 - 29,4/2,0 = -4,9$ m/s², $T_1 = 58,8$ N, $a_1 = 9,8 - 58,8/4,0 = 2,45$ m/s², $a_2 + a_3 = -4,9 = -2a_1$.
(b) $a_3 = 0$ gives $T_2 = m_3g$, that is $4/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 = 4/m_3$, so $4/m_1 = 3/m_3 - 1/m_2 = 1,0 - 0,5 = 0,5$ and $m_1 = 8,0$ kg. Check: $T_2 = 29,4$ N, $a_2 = 9,8 - 29,4/2,0 = -4,9$ m/s², $T_1 = 58,8$ N, $a_1 = 9,8 - 58,8/4,0 = 2,45$ m/s², $a_2 + a_3 = -4,9 = -2a_1$.

Vậy (a) m_1, m_2 đi lên $0,89$ m/s², m_3 đi xuống $2,67$ m/s², $T_1 \approx 42,8$ N, $T_2 \approx 21,4$ N; (b) $m_1 = 8,0$ kg.

Hence (a) m_1 and m_2 rise at $0,89$ m/s², m_3 descends at $2,67$ m/s², $T_1 \approx 42,8$ N, $T_2 \approx 21,4$ N; (b) $m_1 = 8,0$ kg. ■

Bài 5.11 — Problem 5.11

1. Trong mặt nghiêng có hai lực: thành phần trọng lực $mg \sin 20^\circ = 6,70$ N xuống dốc và F vuông góc với nó. Pháp tuyến: $N = mg \cos 20^\circ = 18,42$ N, ma sát nghỉ tối đa $\mu N = 9,21$ N. Ma sát nghỉ nằm trong mặt nghiêng, cân bằng hợp của hai lực trên.
In the plane of the incline there are two forces: the weight component $mg \sin 20^\circ = 6,70$ N down the slope and F perpendicular to it. Normal: $N = mg \cos 20^\circ = 18,42$ N, maximum static friction $\mu N = 9,21$ N. Static friction lies in the plane and balances the resultant of those two.
2. (a) Điều kiện đứng yên: $f = \sqrt{(F^2 + (mg \sin 20^\circ)^2)} \leq \mu N$, nên $F_{\max} = \sqrt{(9,21^2 - 6,70^2)} = \sqrt{(84,8 - 44,9)} \approx 6,31$ N.
(a) Condition for rest: $f = \sqrt{(F^2 + (mg \sin 20^\circ)^2)} \leq \mu N$, so $F_{\max} = \sqrt{(9,21^2 - 6,70^2)} = \sqrt{(84,8 - 44,9)} \approx 6,31$ N.
3. (b) $F = 8,0$ N: hợp lực của hai lực trong mặt nghiêng $R = \sqrt{(8,0^2 + 6,70^2)} \approx 10,44$ N > $9,21$ N nên vật trượt. Ban đầu vận tốc 0, vật bắt đầu chuyển động theo hướng R ; ma sát trượt ngược vận tốc, tức ngược R , nên vật giữ chuyển động trên đường thẳng theo R .
(b) $F = 8,0$ N: the resultant of the two in-plane forces is $R = \sqrt{(8,0^2 + 6,70^2)} \approx 10,44$ N > $9,21$ N so the body slides. It starts from rest along R ; kinetic friction opposes the velocity, that is opposes R , so the body keeps moving along the straight line of R .

4. Gia tốc $a = (R - \mu N)/m = (10,44 - 9,21)/2,0 \approx 0,61 \text{ m/s}^2$. Hướng chuyển động lệch khỏi đường dốc chính góc có tan bằng $F/(mg \sin 20^\circ) = 8,0/6,70$, tức khoảng 50° , về phía của F .

Acceleration $a = (R - \mu N)/m = (10.44 - 9.21)/2.0 \approx 0.61 \text{ m/s}^2$. The direction of motion departs from the line of steepest descent by the angle whose tangent is $F/(mg \sin 20^\circ) = 8.0/6.70$, about 50° , toward F .

Vậy $F_{\max} \approx 6,31 \text{ N}$; với $F = 8,0 \text{ N}$ thì $a \approx 0,61 \text{ m/s}^2$, hướng lệch khoảng 50° so với đường dốc chính về phía lực F .

Hence $F_{\max} \approx 6.31 \text{ N}$; for $F = 8.0 \text{ N}$, $a \approx 0.61 \text{ m/s}^2$, directed about 50° from the line of steepest descent toward F . ■

Bài 5.12 — Problem 5.12

1. Dọc mặt nghiêng: $F \cos \beta = mg \sin \alpha + f$. Vuông góc: $N = mg \cos \alpha - F \sin \beta$. Trượt: $f = \mu N$.

Along the incline: $F \cos \beta = mg \sin \alpha + f$. Perpendicular: $N = mg \cos \alpha - F \sin \beta$. Sliding: $f = \mu N$.

$$F(\cos \beta + \mu \sin \beta) = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

2. Đặt $\mu = \tan \varphi$. Nhân tử và mẫu cho $\cos \varphi$: về phải $mg(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi)/\cos \varphi = mg \sin(\alpha + \varphi)/\cos \varphi$; $\cos \beta + \mu \sin \beta = (\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi)/\cos \varphi = \cos(\beta - \varphi)/\cos \varphi$. Chia hai vế:

Put $\mu = \tan \varphi$. Multiply by $\cos \varphi$: the right side is $mg(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi)/\cos \varphi = mg \sin(\alpha + \varphi)/\cos \varphi$; $\cos \beta + \mu \sin \beta = (\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi)/\cos \varphi = \cos(\beta - \varphi)/\cos \varphi$.

Dividing:

$$F = mg \sin(\alpha + \varphi)/\cos(\beta - \varphi)$$

3. F nhỏ nhất khi $\cos(\beta - \varphi) = 1$, tức $\beta = \varphi = 16,7^\circ$ so với mặt nghiêng; $F_{\min} = mg \sin(\alpha + \varphi) = 58,8 \times \sin 41,7^\circ \approx 39,1 \text{ N}$. Kiểm: $N = mg \cos \alpha - F \sin \beta = 53,3 - 39,1 \times 0,287 \approx 42,1 \text{ N} > 0$.

F is smallest when $\cos(\beta - \varphi) = 1$, that is $\beta = \varphi = 16.7^\circ$ to the incline; $F_{\min} = mg \sin(\alpha + \varphi) = 58.8 \times \sin 41.7^\circ \approx 39.1 \text{ N}$. Check: $N = mg \cos \alpha - F \sin \beta = 53.3 - 39.1 \times 0.287 \approx 42.1 \text{ N} > 0$.

4. Kéo song song ($\beta = 0$): $F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 58,8 \times (0,4226 + 0,2719) \approx 40,8 \text{ N}$, lớn hơn $F_{\min}$ khoảng 4%.

Parallel pull ($\beta = 0$): $F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 58.8 \times (0.4226 + 0.2719) \approx 40.8 \text{ N}$, about 4% above $F_{\min}$.

Vậy $\beta = 16,7^\circ$ so với mặt nghiêng, $F_{\min} \approx 39,1 \text{ N}$; kéo song song mặt nghiêng cần khoảng 40,8 N.

Hence $\beta = 16.7^\circ$ to the incline, $F_{\min} \approx 39.1 \text{ N}$; a parallel pull needs about 40.8 N. ■

Chương 6. Động lực học nâng cao: hệ quy chiếu phi quán tính, chuyển động tròn, hấp dẫn — Chapter 6. Advanced dynamics: non-inertial frames, circular motion, gravitation

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Viết phương trình chuyển động trong hệ quy chiếu có gia tốc bằng cách thêm lực quán tính $-\vec{m}\vec{a}_0$, và chọn hệ quy chiếu cho lời giải ngắn nhất.
Write the equation of motion in an accelerating frame by adding the inertial force $-\vec{m}\vec{a}_0$, and pick the frame that gives the shortest solution.
- Tính trọng lượng biểu kiến, góc lệch dây treo, gia tốc của vật và nêm di động; giải cùng một bài bằng hai hệ quy chiếu rồi đối chiếu.
Find apparent weight, the tilt of a hanging string, and the accelerations of a block and a movable wedge; solve one problem in two frames and compare.
- Lập phương trình hướng tâm cho khúc cua nghiêng, con lắc nón, vòng nhào, vật trên đĩa quay, kể cả điều kiện dây căng, vật rời mặt, ma sát nghỉ.
Set up the centripetal equation for a banked bend, a conical pendulum, a loop, and bodies on a turntable, including the conditions for a taut string, loss of contact and static friction.
- Dùng lực li tâm đúng phạm vi: chỉ cho vật đứng yên trong hệ quay.
Use the centrifugal force within its limits: only for bodies at rest in the rotating frame.
- Tính vận tốc, chu kỳ, bán kính quỹ đạo vệ tinh từ định luật vạn vật hấp dẫn; dùng định luật Kepler III, g theo độ cao và theo vĩ độ.
Find the speed, period and radius of a satellite orbit from the law of gravitation; use Kepler's third law and g at altitude and at latitude.

6.1. Hệ quy chiếu phi quán tính và lực quán tính — Non-inertial frames and inertial forces

Quy ước ký hiệu của chương. Tiếng Việt: lực quán tính F_{qt} , lực li tâm F_{lt} , ma sát F_{ms} , gia tốc hướng tâm a_{ht} , gia tốc tương đối a_{td} . Tiếng Anh: inertial force F_{in} , centrifugal force F_{cf} , friction F_{fr} , centripetal acceleration a_c , relative acceleration a_{rel} . Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, bán kính Trái Đất $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$, tích GM của Trái Đất bằng $3,99 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, trừ khi đề cho khác. Mặt đất được coi là hệ quán tính, bỏ qua sự tự quay của Trái Đất.

Notation for the chapter. Vietnamese: F_{qt} inertial force, F_{lt} centrifugal force, F_{ms} friction, a_{ht} centripetal acceleration, a_{td} relative acceleration. English: inertial force F_{in} , centrifugal force F_{cf} , friction F_{fr} , centripetal acceleration a_c , relative acceleration a_{rel} . Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, the radius of the Earth $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ and the product GM of the Earth as $3.99 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, unless the problem says otherwise. The ground is treated as an inertial frame and the rotation of the Earth is ignored.

Ba định luật Newton ở Chương 5 viết được dưới dạng $\vec{m}\vec{a} = \vec{F}$ chỉ trong hệ quy chiếu quán tính. Buồng thang máy đang tăng tốc, toa tàu đang phanh, mặt bàn quay là những hệ không có tính chất đó. Có hai cách giải bài toán trong chúng: đứng ở mặt đất và giữ

nguyên định luật Newton, hoặc đứng trong hệ chuyển động và thêm một lực mới. Mục này xác định lực mới ấy và nói rõ khi nào nó xuất hiện.

The three laws of Newton from the chapter on Newton's laws take the form $m\vec{a} = \vec{F}$ only in an inertial frame. A lift cabin that is speeding up, a train carriage that is braking and a rotating table are frames without that property. A problem set in them can be solved in two ways: stand on the ground and keep Newton's laws unchanged, or stand in the moving frame and add a new force. This section fixes that force and says when it appears.

ĐỊNH NGHĨA 6.1 (Hệ quy chiếu phi quán tính) / DEFINITION 6.1 (Non-inertial frame)

— Hệ quy chiếu quán tính là hệ trong đó vật không chịu lực (hoặc chịu các lực cân bằng) đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều. Hệ chuyển động có gia tốc đối với một hệ quán tính là hệ quy chiếu phi quán tính.

An inertial frame is one in which a body acted on by no force, or by balanced forces, stays at rest or moves uniformly in a straight line. A frame that accelerates relative to an inertial frame is a non-inertial frame.

ĐỊNH LÝ 6.2 (Lực quán tính) / THEOREM 6.2 (Inertial force) — Gọi S là hệ quán tính và S' là hệ chuyển động tịnh tiến (không quay) với gia tốc $\vec{a}_0$ đối với S. Vật khối lượng m chịu hợp lực thực $\vec{F}$ (do các vật khác tác dụng) có gia tốc $\vec{a}'$ đối với S' thỏa mãn $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{qt}$, với $\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}_0$.

Lực $\vec{F}_{qt}$ gọi là lực quán tính.

Let S be an inertial frame and S' a frame in pure translation with acceleration $\vec{a}_0$ relative to S. A body of mass m acted on by the real net force $\vec{F}$ (exerted by other bodies) has acceleration $\vec{a}'$ in S' satisfying $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$, with $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$.

The force $\vec{F}_{in}$ is called the inertial force.

Chứng minh. / Proof.

Theo công thức cộng vận tốc Galileo (Chương 3), $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$, với $\vec{u}$ là vận tốc của S' đối với S. Trong mỗi khoảng Δt , độ biến thiên vận tốc thỏa $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}' + \Delta\vec{u}$. Chia cho Δt và cho Δt dần tới 0, ta được $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$.

By the Galilean velocity addition formula (Chapter 3), $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$, where $\vec{u}$ is the velocity of S' relative to S. In each interval Δt the change of velocity obeys $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}' + \Delta\vec{u}$. Dividing by Δt and letting Δt tend to 0 gives $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$.

Trong hệ quán tính S, định luật II Newton cho $m\vec{a} = \vec{F}$. Thay $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$:

In the inertial frame S, Newton's second law gives $m\vec{a} = \vec{F}$. Substituting $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$:

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 \quad (6.1)$$

Số hạng $-m\vec{a}_0$ là một lực cộng thêm vào $\vec{F}$.

The term $-m\vec{a}_0$ is one more force added to $\vec{F}$. ■

Lực quán tính có ba đặc điểm cần nhớ. Một: không do vật nào tác dụng nên không có phản lực, định luật III Newton không áp dụng cho nó. Hai: nó tỉ lệ với khối lượng giống

trọng lực, cùng gây một gia tốc $-\vec{a}_0$ cho mọi vật. Ba: nó chỉ có mặt khi ta giải trong hệ phi quán tính; khi giải ở mặt đất, bài toán không có lực này.

The inertial force has three features to remember. First, no body exerts it, so it has no reaction and Newton's third law does not apply to it. Second, it is proportional to the mass like weight, and gives every body the same acceleration $-\vec{a}_0$. Third, it exists only when we work in the non-inertial frame; in a ground-frame solution the problem contains no such force.

ĐỊNH NGHĨA 6.3 (Gia tốc trọng trường hiệu dụng) / DEFINITION 6.3 (Effective gravity) — Gia tốc trọng trường hiệu dụng trong hệ phi quán tính tịnh tiến với gia tốc $\vec{a}_0$ là

$\vec{g}_{hd} = \vec{g} - \vec{a}_0$. Trọng lực và lực quán tính gộp thành $m\vec{g}_{hd}$.

The effective gravitational acceleration in a translating non-inertial frame with acceleration $\vec{a}_0$ is $\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{a}_0$. Weight and the inertial force combine into $m\vec{g}_{eff}$.

$$\vec{g}_{hd} = \vec{g} - \vec{a}_0 \quad (6.2)$$

ĐỊNH NGHĨA 6.4 (Trọng lượng biểu kiến) / DEFINITION 6.4 (Apparent weight) —

Trọng lượng biểu kiến của vật là độ lớn lực mà vật ép lên giá đỡ (hoặc kéo dây treo) khi vật đứng yên so với giá đỡ hay dây ấy. Theo định luật III Newton nó bằng độ lớn phản lực của giá đỡ lên vật.

The apparent weight of a body is the magnitude of the force it presses on its support (or pulls on its string) while at rest relative to that support or string. By Newton's third law it equals the magnitude of the support's reaction on the body.

6.2. Trọng lượng biểu kiến, thang máy và dây treo trong xe — Apparent weight, lifts and a string hanging in a vehicle

HỆ QUẢ 6.5 / COROLLARY 6.5 — Vật khối lượng m đứng yên trong buồng thang máy có gia tốc thẳng đứng a ($a > 0$ khi hướng lên, $a < 0$ khi hướng xuống) có trọng lượng biểu kiến $P' = m(g + a)$. Khi $a = -g$ (buồng rơi tự do), $P' = 0$.

A body of mass m at rest in a lift cabin with vertical acceleration a ($a > 0$ upwards, $a < 0$ downwards) has apparent weight $P' = m(g + a)$. When $a = -g$ (free-falling cabin), $P' = 0$.

Chứng minh. / Proof.

Trong hệ gắn buồng, chọn trục thẳng đứng hướng lên. Các lực lên vật: phản lực N hướng lên, trọng lực mg hướng xuống, lực quán tính $-ma$ (hướng xuống khi $a > 0$). Vật đứng yên trong buồng nên hợp lực bằng 0:

In the frame of the cabin take the vertical axis upwards. The forces on the body are the reaction N upwards, the weight mg downwards and the inertial force $-ma$ (downwards when $a > 0$). The body is at rest in the cabin, so the net force is zero:

$$N - mg - ma = 0 \Rightarrow N = m(g + a) \quad (6.3)$$

Theo định luật III Newton, $P' = N = m(g + a)$. Kiểm tra ở mặt đất: $N - mg = ma$, cùng kết quả.

By Newton's third law $P' = N = m(g + a)$. Check in the ground frame: $N - mg = ma$, the same result. ■

Với $a < -g$, buồng đi xuống nhanh hơn rơi tự do (có dây kéo xuống), vật không thể nằm yên trên sàn mà bay lên phía trần; công thức $P' = m(g + a)$ chỉ áp dụng khi $N \geq 0$.

For $a < -g$ the cabin is pulled down faster than free fall, so the body cannot stay on the floor and rises towards the ceiling; the formula $P' = m(g + a)$ applies only when $N \geq 0$.

VÍ DỤ 6.1 (Trọng lượng biểu kiến trong thang máy) / EXAMPLE 6.1 (Apparent weight in a lift) — Một người khối lượng 60 kg đứng trên cân lò xo đặt trong buồng thang máy. Từ trạng thái nghỉ, thang máy đi lên nhanh dần đều với gia tốc $1,2 \text{ m/s}^2$ trong 3,0 s, chuyển động đều trong 4,0 s, rồi hãm đều với gia tốc $1,8 \text{ m/s}^2$ cho tới khi dừng. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính số chỉ của cân (đơn vị niuton) ở ba giai đoạn và tổng quãng đường thang máy đi được.

A person of mass 60 kg stands on a spring scale in a lift cabin. Starting from rest, the lift rises with uniform acceleration 1.2 m/s^2 for 3.0 s, moves uniformly for 4.0 s, then decelerates uniformly at 1.8 m/s^2 until it stops. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Find the reading of the scale (in newtons) in the three stages and the total distance travelled by the lift.

Lời giải. / Solution.

Chọn hệ gắn buồng, trục hướng lên; a là gia tốc của buồng (dương khi hướng lên). Cân chỉ phản lực N của sàn lên người:

Use the frame of the cabin with the axis pointing up; a is the acceleration of the cabin (positive upwards). The scale reads the reaction N of the floor on the person:

$$N = m(g + a)$$

1. Giai đoạn 1: $a = +1,2 \text{ m/s}^2$, $N_1 = 60 \cdot (9,8 + 1,2) = 660 \text{ N}$.

Stage 1: $a = +1.2 \text{ m/s}^2$, $N_1 = 60 \cdot (9.8 + 1.2) = 660 \text{ N}$.

2. Giai đoạn 2: $a = 0$, $N_2 = 60 \cdot 9,8 = 588 \text{ N}$.

Stage 2: $a = 0$, $N_2 = 60 \cdot 9.8 = 588 \text{ N}$.

3. Giai đoạn 3: thang máy đi lên và chậm dần nên gia tốc hướng xuống, $a = -1,8 \text{ m/s}^2$, $N_3 = 60 \cdot (9,8 - 1,8) = 480 \text{ N}$.

Stage 3: the lift rises and slows down, so the acceleration points down, $a = -1.8 \text{ m/s}^2$, $N_3 = 60 \cdot (9.8 - 1.8) = 480 \text{ N}$.

Quãng đường. Cuối giai đoạn 1: $v = 1,2 \cdot 3,0 = 3,6 \text{ m/s}$ và $s_1 = (1/2) \cdot 1,2 \cdot 3,0^2 = 5,4 \text{ m}$. Giai đoạn 2: $s_2 = 3,6 \cdot 4,0 = 14,4 \text{ m}$. Giai đoạn 3: thời gian hãm $3,6/1,8 = 2,0 \text{ s}$, $s_3 = 3,6^2/(2 \cdot 1,8) = 3,6 \text{ m}$.

Distance. At the end of stage 1: $v = 1.2 \cdot 3.0 = 3.6 \text{ m/s}$ and $s_1 = (1/2) \cdot 1.2 \cdot 3.0^2 = 5.4 \text{ m}$. Stage 2: $s_2 = 3.6 \cdot 4.0 = 14.4 \text{ m}$. Stage 3: braking time $3.6/1.8 = 2.0 \text{ s}$, $s_3 = 3.6^2/(2 \cdot 1.8) = 3.6 \text{ m}$.

Vậy cân chỉ 660 N, 588 N, 480 N; thang máy đi được $5,4 + 14,4 + 3,6 = 23,4 \text{ m}$.

Hence the scale reads 660 N, 588 N and 480 N; the lift travels $5.4 + 14.4 + 3.6 = 23.4 \text{ m}$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Cân chỉ lớn hơn 588 N ở giai đoạn 1 và nhỏ hơn ở giai đoạn 3 dù thang máy luôn đi lên: số chỉ phụ thuộc vào GIA TỐC, không phụ thuộc chiều vận tốc. Đổi thang máy đi xuống nhanh dần cho cùng $1,2 \text{ m/s}^2$ thì $N = 60 \cdot (9,8 - 1,2) = 516 \text{ N}$.

The scale reads more than 588 N in stage 1 and less in stage 3 although the lift always moves up: the reading depends on the ACCELERATION, not on the direction of the velocity. If the lift went down and sped up at the same 1.2 m/s^2 , $N = 60 \cdot (9.8 - 1.2) = 516 \text{ N}$.

HỆ QUẢ 6.6 / COROLLARY 6.6 — Vật treo bằng dây nhẹ trong hệ phi quán tính tịnh tiến với gia tốc $\vec{a}_0$, nằm yên so với hệ, thì dây nằm dọc theo $\vec{g}_{\text{hd}} = \vec{g} - \vec{a}_0$, lực căng bằng $m|\vec{g} - \vec{a}_0|$. Với xe chạy trên đường ngang có gia tốc a , dây lệch góc β so với phương thẳng đứng, $\tan \beta = a/g$.

A body hanging on a light string at rest in a translating non-inertial frame with acceleration $\vec{a}_0$ has the string along $\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a}_0$, and the tension equals $m|\vec{g} - \vec{a}_0|$. For a vehicle on level ground with acceleration a , the string makes an angle β with the vertical, $\tan \beta = a/g$.

Chứng minh. / Proof.

Trong hệ gắn xe vật đứng yên, nên lực căng cân bằng với tổng trọng lực và lực quán tính: $\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 = 0$, tức $\vec{T} = -m\vec{g}_{\text{hd}}$. Dây nằm dọc $\vec{g}_{\text{hd}}$ và $T = m|\vec{g}_{\text{hd}}|$.

In the frame of the vehicle the body is at rest, so the tension balances the sum of weight and inertial force: $\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 = 0$, i.e. $\vec{T} = -m\vec{g}_{\text{eff}}$. The string lies along $\vec{g}_{\text{eff}}$ and $T = m|\vec{g}_{\text{eff}}|$.

Trên đường ngang, $\vec{g}$ thẳng đứng xuống và $\vec{a}_0$ nằm ngang, hai vector vuông góc. Thành phần ngang của $\vec{g}_{\text{hd}}$ có độ lớn a , thành phần đứng g , nên $\tan \beta = a/g$.

On level ground $\vec{g}$ points straight down and $\vec{a}_0$ is horizontal, so the two are perpendicular. The horizontal component of $\vec{g}_{\text{eff}}$ has magnitude a and the vertical one g , hence $\tan \beta = a/g$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Xe lên dốc nên gia tốc không vuông góc với trọng lực: dùng ngay $\vec{g}_{\text{hd}} = \vec{g} - \vec{a}_0$ và phân tích theo hai phương gắn với sàn xe (dọc dốc, vuông góc dốc). Dây lệch so với pháp tuyến của sàn, đo góc ở đó cho gọn.

The vehicle climbs a slope, so the acceleration is not perpendicular to gravity: use $\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a}_0$ at once and resolve along the two directions tied to the floor (along the slope, normal to the slope). The string deviates from the normal to the floor, so measure the angle there.

VÍ DỤ 6.2 (Gia tốc trọng trường hiệu dụng trên dốc) / EXAMPLE 6.2 (Effective gravity on a slope) — Ô tô lên dốc nghiêng 12° so với phương ngang và tăng tốc đều với gia tốc $2,5 \text{ m/s}^2$ dọc theo dốc. Quả cầu khối lượng $0,30 \text{ kg}$ treo vào trần xe (trần song song mặt dốc) bằng dây nhẹ, nằm yên so với xe. Tìm góc lệch của dây so với phương vuông góc với trần xe và lực căng dây. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A car climbs a 12° slope with uniform acceleration 2.5 m/s^2 along the slope. A sphere of mass 0.30 kg hangs from the roof of the car (roof parallel to the slope) on a light string, at rest relative to the car. Find the angle of the string with the normal to the roof and the tension. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

Hệ gắn xe, trục x dọc dốc hướng lên, trục y vuông góc dốc hướng ra xa mặt dốc. Thành phần của $\vec{g}_{\text{hd}} = \vec{g} - \vec{a}_0$: theo x là $-g \sin 12^\circ - a$ (hướng xuống dốc), theo y là $-g \cos 12^\circ$.

Take the frame of the car with x along the slope upwards and y normal to the slope, away from it. The components of $\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a}_0$ are $-g \sin 12^\circ - a$ along x (down the slope) and $-g \cos 12^\circ$ along y .

$$\tan \beta = (g \sin 12^\circ + a)/(g \cos 12^\circ)$$

Số: $g \sin 12^\circ \approx 2,038 \text{ m/s}^2$, $g \cos 12^\circ \approx 9,586 \text{ m/s}^2$, từ số $2,038 + 2,5 = 4,538$, nên $\tan \beta \approx 0,4734$ và $\beta \approx 25,3^\circ$.

Numbers: $g \sin 12^\circ \approx 2.038 \text{ m/s}^2$, $g \cos 12^\circ \approx 9.586 \text{ m/s}^2$, numerator $2.038 + 2.5 = 4.538$, so $\tan \beta \approx 0.4734$ and $\beta \approx 25.3^\circ$.

$$T = m\sqrt{(g \sin 12^\circ + a)^2 + (g \cos 12^\circ)^2}$$

$$T \approx 0,30 \cdot \sqrt{(4,538^2 + 9,586^2)} \approx 0,30 \cdot 10,61 \approx 3,18 \text{ N.}$$

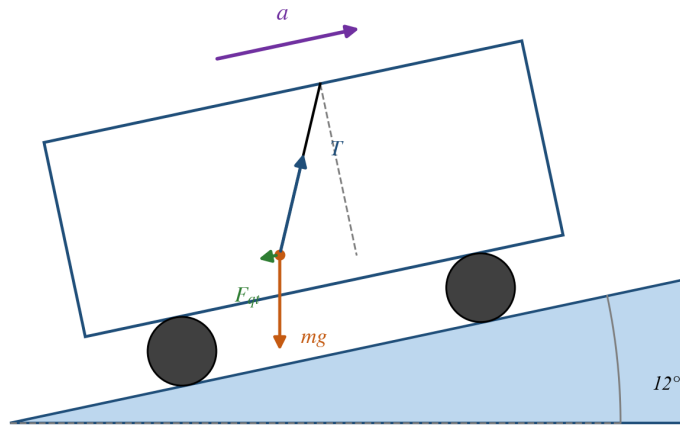
$$T \approx 0.30 \cdot \sqrt{(4.538^2 + 9.586^2)} \approx 0.30 \cdot 10.61 \approx 3.18 \text{ N.}$$

Kiểm tra ở mặt đất: dọc dốc $T \sin \beta - mg \sin 12^\circ = ma$, vuông góc dốc $T \cos \beta = mg \cos 12^\circ$; chia hai phương trình được cùng biểu thức $\tan \beta$.

Check in the ground frame: along the slope $T \sin \beta - mg \sin 12^\circ = ma$, normal to the slope $T \cos \beta = mg \cos 12^\circ$; dividing the two gives the same expression for $\tan \beta$.

Vậy dây lệch khoảng 25° so với pháp tuyến của trần, quả cầu lùi về phía sau xe, lực căng khoảng $3,2 \text{ N}$.

Hence the string deviates about 25° from the normal to the roof, the sphere lags towards the rear of the car, and the tension is about 3.2 N . ■



Hình 6.1. Quả cầu treo trong ô tô lên dốc, vẽ trong hệ quy chiếu gắn xe (Ví dụ 6.2)

Figure 6.1. Sphere hanging in a car climbing a slope, drawn in the frame of the car (Example 6.2)

NHẬN XÉT / REMARK — Trường hợp giới hạn: mặt đường ngang và $a = 2,5 \text{ m/s}^2$ cho $\tan \beta = a/g \approx 0,255$, $\beta \approx 14,3^\circ$, đúng Hệ quả 6.6. Xe lên dốc cùng gia tốc thì góc lớn hơn, vì thành phần dọc dốc của trọng lực cộng thêm vào gia tốc.

Limiting case: level road and $a = 2.5 \text{ m/s}^2$ give $\tan \beta = a/g \approx 0.255$, $\beta \approx 14.3^\circ$, as in Corollary 6.6. On the slope with the same acceleration the angle is larger, because the along-slope component of gravity adds to the acceleration.

$$\tan \beta = a/g \tag{6.4}$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Trong hệ gắn vật có gia tốc a_0 : thêm lực $-ma_0$ vào hình vẽ lực, rồi giải như bài cân bằng. Trọng lượng biểu kiến $P' = m(g + a)$, a dương khi gia tốc

hướng lên.

In a frame with acceleration a_0 : add the force $-ma_0$ to the free-body diagram, then solve as an equilibrium problem. Apparent weight $P' = m(g + a)$, with a positive when the acceleration points up.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Vẽ lực quán tính trong hệ mặt đất, hoặc đã dùng lực quán tính mà còn viết thêm gia tốc a của vật trong vế phải: mỗi bài chọn MỘT hệ và giữ nguyên đến cuối.

Drawing the inertial force in the ground frame, or using the inertial force and also keeping the acceleration a of the body on the right-hand side: choose ONE frame per problem and keep it to the end.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Nhầm dấu gia tốc thang máy: chậm dần khi đi lên có gia tốc hướng xuống ($a < 0$), trọng lượng biểu kiến nhỏ hơn mg .

Getting the sign of the lift acceleration wrong: a lift that slows down while rising has a downward acceleration ($a < 0$), so the apparent weight is less than mg .

6.3. Nêm di động và vật trên nêm — A movable wedge and a block on it

Khi vật trượt trên một nêm mà nêm lại tự do chuyển động trên sàn, gia tốc của nêm chưa biết, nên hệ gắn nêm là hệ phi quán tính với gia tốc phải tìm. Bài toán cho cơ hội đối chiếu hai cách: hệ gắn nêm (thêm lực quán tính) và hệ mặt đất (bốn phương trình Newton).

When a block slides on a wedge that is itself free to move on the floor, the acceleration of the wedge is unknown, so the frame of the wedge is a non-inertial frame whose acceleration is to be found. The problem lets us compare two methods: the wedge frame (with an inertial force) and the ground frame (four Newton equations).

ĐỊNH LÝ 6.7 (Vật trượt trên nêm di động) / THEOREM 6.7 (Block on a movable wedge) — Nêm khối lượng M , mặt nghiêng nhẵn góc α , đặt trên sàn ngang nhẵn; vật khối lượng m trượt trên mặt nghiêng. Khi thả từ nghỉ:

gia tốc của nêm (nêm đi ra xa phía mặt nghiêng) $A = mg \sin \alpha \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$;

gia tốc của vật đối với nêm, dọc mặt nghiêng, $a_{\text{td}} = (M + m)g \sin \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$;

lực nén giữa vật và nêm $N = Mmg \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$.

A wedge of mass M with a smooth inclined face of angle α stands on a smooth horizontal floor; a block of mass m slides on the face. Released from rest:

the acceleration of the wedge (moving away from the inclined side) is $A = mg \sin \alpha \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$;

the acceleration of the block relative to the wedge, along the face, is $a_{\text{rel}} = (M + m)g \sin \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$;

the contact force between block and wedge is $N = Mmg \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$.

Chứng minh. / Proof.

Cách 1, hệ gắn nêm. Hệ này có gia tốc A (ngang, về phía xa mặt nghiêng) nên vật chịu thêm lực quán tính mA hướng ngược lại. Vật chuyển động dọc mặt nghiêng, nên theo phương vuông góc mặt nghiêng gia tốc bằng 0:

Method 1, wedge frame. This frame has acceleration A (horizontal, away from the inclined side), so the block feels an extra inertial force mA in the opposite direction. The block moves along the face, so its acceleration normal to the face is zero:

$$N = m(g \cos \alpha - A \sin \alpha)$$

Dọc mặt nghiêng, hướng xuống: $m a_{td} = mg \sin \alpha + mA \cos \alpha$, tức $a_{td} = g \sin \alpha + A \cos \alpha$. Nêm là vật trong hệ quán tính (mặt đất); lực ngang duy nhất lên nêm là thành phần ngang của lực nén:

Along the face, downwards: $m a_{rel} = mg \sin \alpha + mA \cos \alpha$, i.e. $a_{rel} = g \sin \alpha + A \cos \alpha$. The wedge, seen from the ground (an inertial frame), has the horizontal component of the contact force as the only horizontal force:

$$MA = N \sin \alpha$$

Thay N : $MA = m \sin \alpha (g \cos \alpha - A \sin \alpha)$, suy ra $A(M + m \sin^2 \alpha) = mg \sin \alpha \cos \alpha$. Thế A vào hai biểu thức còn lại:

Substituting N : $MA = m \sin \alpha (g \cos \alpha - A \sin \alpha)$, so $A(M + m \sin^2 \alpha) = mg \sin \alpha \cos \alpha$. Putting A into the other two expressions:

$$a_{td} = g \sin \alpha (M + m \sin^2 \alpha + m \cos^2 \alpha) / (M + m \sin^2 \alpha) = (M + m)g \sin \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$$

$$N = mg \cos \alpha (M + m \sin^2 \alpha - m \sin^2 \alpha) / (M + m \sin^2 \alpha) = Mmg \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$$

Cách 2, hệ mặt đất. Gia tốc của vật đối với đất là tổng gia tốc của nêm và gia tốc tương đối: thành phần ngang $A - a_{td} \cos \alpha$, thành phần đứng $-a_{td} \sin \alpha$. Phương trình Newton của vật (N hướng vuông góc mặt nghiêng, lên và về phía mặt nghiêng) và của nêm:

Method 2, ground frame. The acceleration of the block relative to the ground is the sum of the wedge acceleration and the relative acceleration: horizontal component $A - a_{rel} \cos \alpha$, vertical component $-a_{rel} \sin \alpha$. The Newton equations for the block (N normal to the face, upwards and towards the inclined side) and for the wedge:

$$-N \sin \alpha = m(A - a_{td} \cos \alpha), \quad N \cos \alpha - mg = -m a_{td} \sin \alpha, \quad MA = N \sin \alpha$$

Từ phương trình thứ nhất và thứ ba: $a_{td} \cos \alpha = (M + m)A/m$, và $N = MA/\sin \alpha$. Thế vào phương trình thứ hai: $MA \cot \alpha = mg - (M + m)A \tan \alpha$, suy ra $A = mg \sin \alpha \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$: trùng kết quả của cách 1.

From the first and third equations: $a_{rel} \cos \alpha = (M + m)A/m$ and $N = MA/\sin \alpha$. Putting these into the second: $MA \cot \alpha = mg - (M + m)A \tan \alpha$, so $A = mg \sin \alpha \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$: the same as method 1. ■

$$A = mg \sin \alpha \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha) \quad (6.5)$$

$$a_{td} = (M + m)g \sin \alpha / (M + m \sin^2 \alpha) \quad (6.6)$$

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Có hai ẩn gia tốc (A của nêm, a_{td} của vật đối với nêm) và lực nén N . Chọn hệ gắn nêm: nó cho một phương trình vuông góc mặt nghiêng và một phương trình dọc mặt nghiêng, cộng một phương trình của nêm trong hệ mặt đất. Hệ mặt đất cho đúng

bốn phương trình nhưng phải chiếu gia tốc tương đối lên hai trục. Làm cả hai rồi so sánh để tự kiểm.

There are two unknown accelerations (A of the wedge, a_{rel} of the block relative to the wedge) and the force N . The wedge frame gives one equation normal to the face, one along the face, plus one equation for the wedge in the ground frame. The ground frame gives four equations but the relative acceleration must be projected on two axes. Do both and compare the results as a self-check.

VÍ DỤ 6.3 (Hai hệ quy chiếu cho nêm di động) / EXAMPLE 6.3 (Two frames for a movable wedge)

— Nêm khối lượng $M = 3,0$ kg, mặt nghiêng nhẵn hợp với phương ngang góc $\alpha = 35^\circ$, đặt trên sàn ngang nhẵn. Vật khối lượng $m = 1,0$ kg đặt trên mặt nghiêng, thả từ nghỉ. Tìm gia tốc của nêm, gia tốc của vật đối với nêm, lực nén của vật lên nêm và gia tốc của vật đối với sàn. Lấy $g = 9,8$ m/s².

A wedge of mass $M = 3.0$ kg with a smooth face at $\alpha = 35^\circ$ to the horizontal stands on a smooth horizontal floor. A block of mass $m = 1.0$ kg is placed on the face and released from rest. Find the acceleration of the wedge, the acceleration of the block relative to the wedge, the force between block and wedge, and the acceleration of the block relative to the floor. Take $g = 9.8$ m/s².

Lời giải. / Solution.

Áp dụng Định lý 6.7. Trước hết $\sin 35^\circ \approx 0,5736$, $\cos 35^\circ \approx 0,8192$, mẫu số $M + m \sin^2 \alpha = 3,0 + 1,0 \cdot 0,3290 \approx 3,329$ kg.

Apply Theorem 6.7. First $\sin 35^\circ \approx 0.5736$, $\cos 35^\circ \approx 0.8192$, and the denominator is $M + m \sin^2 \alpha = 3.0 + 1.0 \cdot 0.3290 \approx 3.329$ kg.

1. Nêm: $A = 1,0 \cdot 9,8 \cdot 0,5736 \cdot 0,8192 / 3,329 \approx 1,38$ m/s².

Wedge: $A = 1.0 \cdot 9.8 \cdot 0.5736 \cdot 0.8192 / 3.329 \approx 1.38$ m/s².

2. Vật đối với nêm: $a_{td} = 4,0 \cdot 9,8 \cdot 0,5736 / 3,329 \approx 6,75$ m/s², dọc mặt nghiêng, hướng xuống.

Block relative to the wedge: $a_{rel} = 4.0 \cdot 9.8 \cdot 0.5736 / 3.329 \approx 6.75$ m/s², along the face, downwards.

3. Lực nén: $N = 3,0 \cdot 1,0 \cdot 9,8 \cdot 0,8192 / 3,329 \approx 7,23$ N.

Contact force: $N = 3.0 \cdot 1.0 \cdot 9.8 \cdot 0.8192 / 3.329 \approx 7.23$ N.

4. Đối với sàn: thành phần ngang $a_x = A - a_{td} \cos \alpha \approx 1,38 - 6,75 \cdot 0,8192 \approx -4,15$ m/s² (hướng về phía mặt nghiêng), thành phần đứng $a_y = -a_{td} \sin \alpha \approx -3,87$ m/s², độ lớn $\sqrt{(4,15^2 + 3,87^2)} \approx 5,68$ m/s².

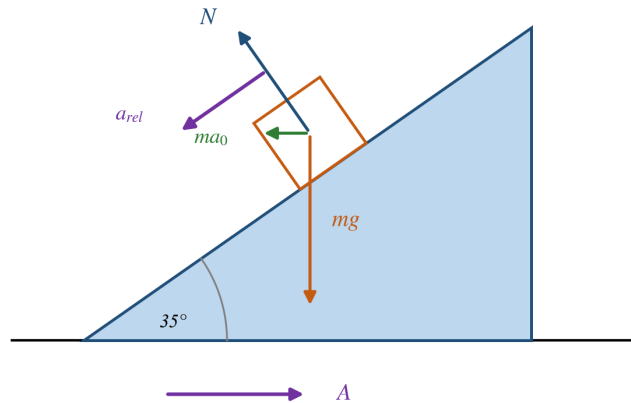
Relative to the floor: horizontal component $a_x = A - a_{rel} \cos \alpha \approx 1.38 - 6.75 \cdot 0.8192 \approx -4.15$ m/s² (towards the inclined side), vertical component $a_y = -a_{rel} \sin \alpha \approx -3.87$ m/s², magnitude $\sqrt{(4.15^2 + 3.87^2)} \approx 5.68$ m/s².

Kiểm tra: mặt đất cho theo phương ngang $-N \sin \alpha = m a_x \approx -7,23 \cdot 0,5736 \approx -4,15$ N, đúng với $m a_x = -4,15$ N.

Check: in the ground frame the horizontal equation $-N \sin \alpha = m a_x$ gives $-7.23 \cdot 0.5736 \approx -4.15$ N, matching $m a_x = -4.15$ N.

Vậy nêm gia tốc 1,38 m/s², vật trượt với 6,75 m/s² đối với nêm, lực nén 7,23 N, gia tốc của vật đối với sàn khoảng 5,68 m/s².

Hence the wedge accelerates at 1.38 m/s^2 , the block slides at 6.75 m/s^2 relative to the wedge, the contact force is 7.23 N , and the block's acceleration relative to the floor is about 5.68 m/s^2 . ■



Hình 6.2. Vật trên nêm di động vẽ trong hệ gắn nêm (Ví dụ 6.3): ba lực N , mg và lực quán tính $-mA$, mũi tên theo tỉ lệ 0,2 đơn vị cho 1 N

Figure 6.2. Block on a movable wedge drawn in the wedge frame (Example 6.3): the three forces N , mg and the inertial force $-mA$, arrows at 0.2 units per newton

NHẬN XÉT / REMARK — Trường hợp giới hạn M tiến tới vô cùng (nêm bị giữ): A tiến tới 0, a_{td} tiến tới $g \sin \alpha$, N tiến tới $mg \cos \alpha$, đúng bài mặt nghiêng cố định. Vật nhẹ hơn nêm nhiều lần cho kết quả tương tự. Nếu M tiến tới 0, A tiến tới $g \cot \alpha$ và N tiến tới 0.

Limiting case M tending to infinity (wedge held fixed): A tends to 0, a_{rel} tends to $g \sin \alpha$ and N tends to $mg \cos \alpha$, the fixed-incline result. A block many times lighter than the wedge gives a similar outcome. If M tends to 0, A tends to $g \cot \alpha$ and N tends to 0.

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hỏi về khoảng lực: vật đứng yên so với nêm nghĩa là $a_{\text{td}} = 0$, hợp lực lên vật gồm N , mg và (trong hệ nêm) lực quán tính cân bằng. Có ma sát nghỉ thì lực ma sát nằm giữa hai giá trị biên, mỗi biên ứng với xu hướng trượt một chiều. Tìm hai gia tốc biên của nêm rồi nhân với tổng khối lượng.

A question about a range of force: a block at rest relative to the wedge means $a_{\text{rel}} = 0$, and N , mg and (in the wedge frame) the inertial force balance. With static friction the friction force lies between two limits, each corresponding to a tendency to slide in one direction. Find the two limiting accelerations of the wedge, then multiply by the total mass.

VÍ DỤ 6.4 (Khoảng lực để vật không trượt trên nêm) / EXAMPLE 6.4 (Force range for no sliding on a wedge) — Nêm khối lượng $M = 6,0 \text{ kg}$, mặt nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang, đặt trên sàn ngang nhẵn. Vật $m = 2,0 \text{ kg}$ đặt trên mặt nghiêng, hệ số ma sát nghỉ giữa vật và nêm là 0,25. Đẩy nêm bằng lực F nằm ngang hướng về phía mặt nghiêng. Tìm khoảng giá trị của F để vật đứng yên so với nêm. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A wedge of mass $M = 6.0 \text{ kg}$ with a face at $\alpha = 30^\circ$ to the horizontal stands on a smooth horizontal floor. A block of mass $m = 2.0 \text{ kg}$ rests on the face; the coefficient of static friction between block and wedge is 0.25. A horizontal force F pushes the wedge towards the inclined side. Find the range of F for which the block stays at rest relative to the wedge. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

Hệ (nêm + vật) chịu lực ngang duy nhất F trên sàn nhẵn: $F = (M + m)a$, với a là gia tốc chung, hướng về phía mặt nghiêng. Xét vật trong hệ gắn nêm: lực quán tính ma hướng ra xa mặt nghiêng.

The system (wedge + block) has F as its only horizontal force on the smooth floor: $F = (M + m)a$, with a the common acceleration, towards the inclined side. Consider the block in the wedge frame: the inertial force ma points away from the inclined side.

Chọn trục theo mặt nghiêng (hướng lên) và vuông góc mặt nghiêng. Gọi f là thành phần ma sát nghỉ dọc mặt nghiêng, dương khi hướng lên. Cân bằng:

Take axes along the face (upwards) and normal to it. Let f be the component of static friction along the face, positive upwards. Equilibrium gives:

$$f = mg \sin \alpha - ma \cos \alpha, \quad N = m(g \cos \alpha + a \sin \alpha)$$

Điều kiện không trượt $|f| \leq \mu N$. Biên trên của a (vật có xu hướng trượt lên, $f < 0$): $a \cos \alpha - g \sin \alpha \leq \mu(g \cos \alpha + a \sin \alpha)$. Biên dưới (xu hướng trượt xuống, $f > 0$): $g \sin \alpha - a \cos \alpha \leq \mu(g \cos \alpha + a \sin \alpha)$.

No slipping requires $|f| \leq \mu N$. Upper limit of a (tendency to slide up, $f < 0$): $a \cos \alpha - g \sin \alpha \leq \mu(g \cos \alpha + a \sin \alpha)$. Lower limit (tendency to slide down, $f > 0$): $g \sin \alpha - a \cos \alpha \leq \mu(g \cos \alpha + a \sin \alpha)$.

$$g(\tan \alpha - \mu)/(1 + \mu \tan \alpha) \leq a \leq g(\tan \alpha + \mu)/(1 - \mu \tan \alpha)$$

Số: $\tan 30^\circ \approx 0,5774$; $a_{\min} = 9,8 \cdot (0,5774 - 0,25)/(1 + 0,1443) \approx 2,80 \text{ m/s}^2$; $a_{\max} = 9,8 \cdot (0,5774 + 0,25)/(1 - 0,1443) \approx 9,48 \text{ m/s}^2$.

Numbers: $\tan 30^\circ \approx 0.5774$; $a_{\min} = 9.8 \cdot (0.5774 - 0.25)/(1 + 0.1443) \approx 2.80 \text{ m/s}^2$; $a_{\max} = 9.8 \cdot (0.5774 + 0.25)/(1 - 0.1443) \approx 9.48 \text{ m/s}^2$.

$F = 8,0 \cdot a$, nên $F_{\min} \approx 22,4 \text{ N}$ và $F_{\max} \approx 75,8 \text{ N}$.

$F = 8.0 \cdot a$, so $F_{\min} \approx 22.4 \text{ N}$ and $F_{\max} \approx 75.8 \text{ N}$.

Vậy vật đứng yên so với nêm khi $22,4 \text{ N} \leq F \leq 75,8 \text{ N}$.

Hence the block stays at rest relative to the wedge for $22.4 \text{ N} \leq F \leq 75.8 \text{ N}$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Khi $\mu = 0$, hai biên trùng nhau: $a = g \tan \alpha$, đúng điều kiện nêm đẩy vật đứng yên không ma sát. Biểu thức biên giống hệt công thức tốc độ giới hạn của khúc cua nghiêng ở Mục 6.4 nếu thay a bằng v^2/r : hai bài là một bài về cân bằng tương đối trên mặt nghiêng.

For $\mu = 0$ the two limits coincide: $a = g \tan \alpha$, the condition for a smooth wedge to hold the block at rest. The limiting expressions are identical to the speed limits for a banked bend in Section 6.4 when a is replaced by v^2/r : the two problems are one problem of relative equilibrium on an incline.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $MA = N \sin \alpha$ mà quên rằng N là lực nén THỰC của vật lên nêm, còn lực quán tính $-ma_0$ không tác dụng lên nêm; hoặc chiếu lực quán tính của vật vào phương trình của nêm.

Writing $MA = N \sin \alpha$ but forgetting that N is the REAL force of the block on the wedge, while the

inertial force $-ma_0$ does not act on the wedge; or putting the block's inertial force into the wedge's equation.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Coi gia tốc của vật đối với đất bằng $g \sin \alpha$ dọc mặt nghiêng (bài ném cố định) khi ném đang chuyển động.

Taking the acceleration of the block relative to the ground as $g \sin \alpha$ along the face (the fixed-incline result) when the wedge is moving.

6.4. Động lực học chuyển động tròn — Dynamics of circular motion

Chương 4 cho gia tốc của chuyển động tròn: thành phần hướng vào tâm bằng $v^2/r = \omega^2 r$. Bây giờ ghép với định luật II Newton để tìm lực. Điểm cần nhớ nhất: không có loại lực nào tên là lực hướng tâm trong danh sách lực của vật. Lực hướng tâm là tên của tổng các thành phần hướng vào tâm của những lực có thật (trọng lực, lực căng, phản lực, ma sát, lực hấp dẫn).

The chapter on circular kinematics gave the acceleration: the component towards the centre is $v^2/r = \omega^2 r$. Now we combine it with Newton's second law to find forces. The point to remember: no force called the centripetal force belongs on the list of forces on a body. The centripetal force is the name for the sum of the components towards the centre of the real forces (weight, tension, reaction, friction, gravitation).

ĐỊNH LÝ 6.8 (Phương trình hướng tâm) / THEOREM 6.8 (Centripetal equation) —

Trong hệ quán tính, vật khối lượng m chuyển động tròn bán kính r thỏa: tổng các thành phần hướng vào tâm của các lực thực tác dụng lên vật bằng $mv^2/r = m\omega^2 r$. Với chuyển động tròn đều, tổng các thành phần tiếp tuyến bằng 0; với chuyển động tròn không đều, nó bằng m nhân gia tốc tiếp tuyến.

In an inertial frame a body of mass m moving on a circle of radius r satisfies: the sum of the components towards the centre of the real forces on it equals $mv^2/r = m\omega^2 r$. For uniform circular motion the sum of the tangential components is zero; for non-uniform motion it equals m times the tangential acceleration.

Chứng minh. / Proof.

Chiếu định luật II Newton $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$ lên phương hướng vào tâm và lên phương tiếp tuyến. Theo Chương 4 thành phần hướng tâm của $\vec{a}$ bằng $v^2/r = \omega^2 r$, thành phần tiếp tuyến bằng a_t (bằng 0 khi tốc độ không đổi).

Project Newton's second law $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$ on the direction towards the centre and on the tangent. By the chapter on circular kinematics the component of $\vec{a}$ towards the centre is $v^2/r = \omega^2 r$, and the tangential component is a_t (zero when the speed is constant).

$$\Sigma F_n = mv^2/r = m\omega^2 r, \quad \Sigma F_t = ma_t \quad (6.7)$$

Cách làm cho mọi bài chuyển động tròn: vẽ các lực thực, chọn một trục hướng vào tâm đường tròn của chính vật (không phải tâm của cả cơ hệ), viết $\Sigma F_n = mv^2/r$, thêm một phương trình theo phương vuông góc mặt phẳng quay hoặc tiếp tuyến.

The routine for every circular-motion problem: draw the real forces, pick an axis towards the centre of the body's own circle (not the centre of the whole device), write $\Sigma F_n = mv^2/r$, and add one equation along the perpendicular direction or the tangent.

ĐỊNH LÝ 6.9 (Khúc cua nghiêng) / THEOREM 6.9 (Banked bend) — Xe chạy với tốc độ v trên khúc cua tròn bán kính r , mặt đường nghiêng vào phía tâm góc α , hệ số ma sát nghỉ μ .

Xe không trượt khi $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$, với

$$v_{\max}^2 = rg (\tan \alpha + \mu)/(1 - \mu \tan \alpha) \quad (\text{cần } \mu \tan \alpha < 1),$$

$$v_{\min}^2 = rg (\tan \alpha - \mu)/(1 + \mu \tan \alpha) \quad \text{nếu } \tan \alpha > \mu, \text{ và } v_{\min} = 0 \text{ nếu } \tan \alpha \leq \mu.$$

Khi $\mu = 0$ chỉ còn một tốc độ không cần ma sát: $v_{\text{opt}}^2 = rg \tan \alpha$.

A vehicle drives at speed v round a circular bend of radius r on a road banked at angle α towards the centre, with coefficient of static friction μ . It does not slip if $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$, where

$$v_{\max}^2 = rg (\tan \alpha + \mu)/(1 - \mu \tan \alpha) \quad (\text{needs } \mu \tan \alpha < 1),$$

$$v_{\min}^2 = rg (\tan \alpha - \mu)/(1 + \mu \tan \alpha) \quad \text{if } \tan \alpha > \mu, \text{ and } v_{\min} = 0 \text{ if } \tan \alpha \leq \mu.$$

For $\mu = 0$ only one speed needs no friction: $v_{\text{opt}}^2 = rg \tan \alpha$.

Chứng minh. / Proof.

Tốc độ lớn nhất: xe có xu hướng văng ra phía ngoài, lên dốc, nên ma sát $f = \mu N$ hướng xuống dốc, một thành phần của nó hướng vào tâm. Chiếu lên phương ngang hướng tâm và phương thẳng đứng:

Maximum speed: the car tends to skid outwards, up the slope, so friction $f = \mu N$ points down the slope and part of it points towards the centre. Projecting on the horizontal direction towards the centre and on the vertical:

$$N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha = mv^2/r, \quad N \cos \alpha - \mu N \sin \alpha = mg$$

Chia vế theo vế: $v^2/(rg) = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)/(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = (\tan \alpha + \mu)/(1 - \mu \tan \alpha)$.

Dividing side by side: $v^2/(rg) = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)/(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = (\tan \alpha + \mu)/(1 - \mu \tan \alpha)$.

Tốc độ nhỏ nhất: xe có xu hướng trượt xuống phía trong, ma sát hướng lên dốc. Đổi dấu μ trong cả hai phương trình: $v^2/(rg) = (\tan \alpha - \mu)/(1 + \mu \tan \alpha)$. Nếu $\tan \alpha \leq \mu$ thì xe đứng yên cũng không trượt xuống, nên $v_{\min} = 0$. Đặt $\mu = 0$ được $v_{\text{opt}}^2 = rg \tan \alpha$.

Minimum speed: the car tends to slide down towards the inside, friction points up the slope. Changing the sign of μ in both equations gives $v^2/(rg) = (\tan \alpha - \mu)/(1 + \mu \tan \alpha)$. If $\tan \alpha \leq \mu$ a car at rest does not slide down either, so $v_{\min} = 0$. Setting $\mu = 0$ gives $v_{\text{opt}}^2 = rg \tan \alpha$. ■

$$v^2 = rg \tan \alpha \quad (6.8)$$

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Đề cho bán kính, góc nghiêng và μ , hỏi khoảng tốc độ: đó là bài hai biên. Mỗi biên ứng với một chiều ma sát nghỉ đạt giá trị lớn nhất. Vẽ hình mặt cắt, chiều gia tốc hướng tâm nằm NGANG (không dọc mặt đường): đó là chỗ hay sai.

The problem gives the radius, the angle and μ and asks for a range of speed: a two-limit problem.

Each limit corresponds to static friction at its maximum in one direction. Draw the cross-section; the centripetal acceleration is HORIZONTAL (not along the road surface): that is where errors creep in.

VÍ DỤ 6.5 (Hai biên của ma sát nghỉ) / EXAMPLE 6.5 (Two limits of static friction) — Khúc cua có bán kính 80 m, mặt đường nghiêng vào phía tâm góc 8° , hệ số ma sát nghỉ giữa

lốp và mặt đường ướt là 0,10. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tìm tốc độ để xe không cần ma sát, và khoảng tốc độ an toàn (đổi ra km/h).

A bend of radius 80 m has its road banked at 8° towards the centre; the coefficient of static friction between tyre and wet road is 0.10. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Find the speed at which no friction is needed and the range of safe speeds (convert to km/h).

Lời giải. / Solution.

Áp dụng Định lý 6.9 với $\tan 8^\circ \approx 0,1405$, $rg = 80 \cdot 9,8 = 784 \text{ m}^2/\text{s}^2$.

Apply Theorem 6.9 with $\tan 8^\circ \approx 0.1405$ and $rg = 80 \cdot 9.8 = 784 \text{ m}^2/\text{s}^2$.

1. Không cần ma sát: $v_{\text{opt}} = \sqrt{(784 \cdot 0,1405)} \approx 10,5 \text{ m/s} \approx 37,8 \text{ km/h}$.

No friction needed: $v_{\text{opt}} = \sqrt{(784 \cdot 0.1405)} \approx 10.5 \text{ m/s} \approx 37.8 \text{ km/h}$.

2. Vì $\tan \alpha = 0,1405 > \mu = 0,10$ nên có tốc độ nhỏ nhất: $v_{\text{min}}^2 = 784 \cdot (0,1405 - 0,10)/(1 + 0,0141) \approx 31,4 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $v_{\text{min}} \approx 5,60 \text{ m/s} \approx 20,2 \text{ km/h}$.

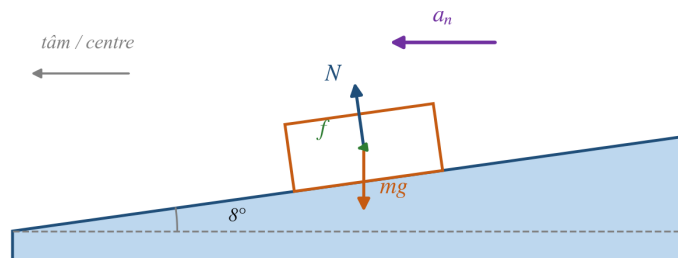
Since $\tan \alpha = 0.1405 > \mu = 0.10$ there is a minimum speed: $v_{\text{min}}^2 = 784 \cdot (0.1405 - 0.10)/(1 + 0.0141) \approx 31.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $v_{\text{min}} \approx 5.60 \text{ m/s} \approx 20.2 \text{ km/h}$.

3. $v_{\text{max}}^2 = 784 \cdot (0,1405 + 0,10)/(1 - 0,0141) \approx 191 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $v_{\text{max}} \approx 13,8 \text{ m/s} \approx 49,8 \text{ km/h}$.

$v_{\text{max}}^2 = 784 \cdot (0.1405 + 0.10)/(1 - 0.0141) \approx 191 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $v_{\text{max}} \approx 13.8 \text{ m/s} \approx 49.8 \text{ km/h}$.

Vậy tốc độ không cần ma sát là khoảng 37,8 km/h; xe giữ được đường với tốc độ từ khoảng 20,2 km/h đến 49,8 km/h.

Hence the speed needing no friction is about 37.8 km/h; the car holds the road at speeds from about 20.2 km/h to 49.8 km/h. ■



Hình 6.3. Xe ở tốc độ lớn nhất trên khúc cua nghiêng 8° (Ví dụ 6.5): ma sát hướng xuống dốc, tổng của N và f cộng với mg cho gia tốc hướng tâm nằm ngang

Figure 6.3. Car at maximum speed on a bend banked at 8° (Example 6.5): friction points down the slope, and N plus f plus mg give a horizontal centripetal acceleration

NHẬN XÉT / REMARK — Tốc độ v_{opt} không phụ thuộc khối lượng xe. Với xe đạp và xe tải cùng khúc cua, cùng v_{opt} ; điều kiện ma sát cũng chỉ chứa μ , không chứa khối lượng.

The speed v_{opt} does not depend on the mass of the vehicle. A bicycle and a lorry on the same bend have the same v_{opt} ; the friction condition also contains μ only, not the mass.

ĐỊNH LÝ 6.10 (Con lắc nón) / THEOREM 6.10 (Conical pendulum) — Quả cầu khối lượng m treo bằng dây nhẹ dài ℓ , quay đều trong mặt phẳng ngang với dây hợp với phương

thẳng đứng góc θ không đổi (con lắc nón). Khi đó

$\cos \theta = g/(\omega^2 \ell)$, lực căng $T = m\omega^2 \ell$, chu kỳ quay $2\pi\sqrt{\ell \cos \theta / g}$.

Chuyển động này chỉ có khi $\omega^2 > g/\ell$; với $\omega^2 \leq g/\ell$ quả cầu chỉ treo thẳng đứng.

A sphere of mass m hangs on a light string of length ℓ and revolves uniformly in a horizontal circle with the string at a constant angle θ to the vertical (conical pendulum). Then

$\cos \theta = g/(\omega^2 \ell)$, tension $T = m\omega^2 \ell$, period of revolution $2\pi\sqrt{\ell \cos \theta / g}$.

This motion exists only for $\omega^2 > g/\ell$; for $\omega^2 \leq g/\ell$ the sphere hangs vertically.

Chứng minh. / Proof.

Quả cầu chuyển động tròn bán kính $r = \ell \sin \theta$ trong mặt phẳng ngang, hợp lực hướng vào tâm (nằm ngang), gia tốc thẳng đứng bằng 0. Hai lực: trọng lực mg và lực căng T :

The sphere moves on a circle of radius $r = \ell \sin \theta$ in a horizontal plane, the net force points to the centre (horizontal) and the vertical acceleration is zero. Two forces act: weight mg and tension T :

$$T \cos \theta = mg, \quad T \sin \theta = m\omega^2 \ell \sin \theta$$

Phương trình thứ hai cho $T = m\omega^2 \ell$ (khi $\sin \theta \neq 0$). Thế vào phương trình thứ nhất: $\cos \theta = g/(\omega^2 \ell)$, nên cần $\omega^2 \ell > g$ để $\cos \theta < 1$. Chu kỳ $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell \cos \theta / g}$.

The second equation gives $T = m\omega^2 \ell$ (for $\sin \theta \neq 0$). Putting it into the first: $\cos \theta = g/(\omega^2 \ell)$, so $\omega^2 \ell > g$ is needed for $\cos \theta < 1$. The period $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell \cos \theta / g}$. ■

NHẬN XÉT / REMARK — Khi ω tăng, $\cos \theta = g/(\omega^2 \ell)$ giảm và θ tăng dần tới 90° mà không đạt: dây không bao giờ nằm ngang, vì thành phần thẳng đứng $T \cos \theta$ phải cân bằng mg . Lực căng $T = m\omega^2 \ell$ tăng không giới hạn theo ω , nên dây thật sẽ đứt trước khi θ tới sát 90° .

As ω grows, $\cos \theta = g/(\omega^2 \ell)$ falls and θ rises towards 90° without reaching it: the string is never horizontal, because the vertical component $T \cos \theta$ must balance mg . The tension $T = m\omega^2 \ell$ grows without bound with ω , so a real string breaks long before θ gets close to 90° .

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai dây nối quả cầu vào trục: mỗi dây có thể chùng. Giả sử cả hai căng, viết hai phương trình (thẳng đứng và hướng tâm), tìm T_1, T_2 theo ω , rồi đòi hỏi $T_2 \geq 0$ để suy ra ω nhỏ nhất. Dưới ngưỡng đó dây dưới chùng và bài thành con lắc nón một dây (Định lý 6.10); kiểm tra lại bằng khoảng cách tới điểm buộc dây dưới.

Two strings join the sphere to the axis and either may go slack. Assume both are taut, write two equations (vertical and centripetal), find T_1 and T_2 in terms of ω , then require $T_2 \geq 0$ to get the least ω . Below that threshold the lower string is slack and the problem becomes a one-string conical pendulum (Theorem 6.10); verify by the distance to the lower fixing point.

VÍ DỤ 6.6 (Hai dây và điều kiện dây căng) / EXAMPLE 6.6 (Two strings and the taut condition) — Quả cầu nhỏ khối lượng 0,20 kg buộc vào hai dây nhẹ, mỗi dây dài 0,50 m; đầu kia của hai dây buộc vào hai điểm A (trên) và B (dưới) của một trục thẳng đứng, $AB = 0,60$ m. Cho trục quay đều quanh phương thẳng đứng với tốc độ góc ω . Tìm ω nhỏ nhất để cả hai dây căng. Với $\omega = 10$ rad/s, tính lực căng mỗi dây. Với $\omega = 5,0$ rad/s, tính lực căng và góc lệch của dây trên. Lấy $g = 9,8$ m/s².

A small sphere of mass 0.20 kg is tied to two light strings, each 0.50 m long; their other ends are tied to points A (upper) and B (lower) of a vertical axis, $AB = 0.60$ m. The axis rotates uniformly about the

vertical with angular speed ω . Find the least ω for both strings to be taut. For $\omega = 10 \text{ rad/s}$, find the tension in each string. For $\omega = 5.0 \text{ rad/s}$, find the tension and the angle of the upper string. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

Hình học: quả cầu cách đều A và B nên nằm trong mặt phẳng trung trực của AB. Mỗi dây hợp với trục góc φ với $\cos \varphi = 0,30/0,50 = 0,6$, $\sin \varphi = 0,8$, bán kính quỹ đạo $r = 0,50 \cdot 0,8 = 0,40 \text{ m}$.

Geometry: the sphere is equidistant from A and B, so it lies in the perpendicular bisector plane of AB. Each string makes an angle φ with the axis, $\cos \varphi = 0.30/0.50 = 0.6$, $\sin \varphi = 0.8$, and the radius of the circle is $r = 0.50 \cdot 0.8 = 0.40 \text{ m}$.

Dây trên kéo lên và vào trục (T_1), dây dưới kéo xuống và vào trục (T_2). Thăng đứng và hướng tâm:

The upper string pulls up and towards the axis (T_1), the lower one pulls down and towards the axis (T_2). Vertical and centripetal equations:

$$(T_1 - T_2) \cos \varphi = mg, \quad (T_1 + T_2) \sin \varphi = m\omega^2 \ell \sin \varphi$$

Suy ra $T_1 + T_2 = m\omega^2 \ell$ và $T_1 - T_2 = mg/\cos \varphi$, nên $T_2 = (m\omega^2 \ell - mg/\cos \varphi)/2$. Điều kiện $T_2 \geq 0$ cho $\omega^2 \geq g/(\ell \cos \varphi) = 9,8/(0,50 \cdot 0,6) \approx 32,7 \text{ s}^{-2}$, tức $\omega \geq 5,72 \text{ rad/s}$.

Hence $T_1 + T_2 = m\omega^2 \ell$ and $T_1 - T_2 = mg/\cos \varphi$, so $T_2 = (m\omega^2 \ell - mg/\cos \varphi)/2$. The condition $T_2 \geq 0$ gives $\omega^2 \geq g/(\ell \cos \varphi) = 9.8/(0.50 \cdot 0.6) \approx 32.7 \text{ s}^{-2}$, i.e. $\omega \geq 5.72 \text{ rad/s}$.

Với $\omega = 10 \text{ rad/s}$: $T_1 + T_2 = 0,20 \cdot 100 \cdot 0,50 = 10 \text{ N}$; $T_1 - T_2 = 0,20 \cdot 9,8/0,6 \approx 3,27 \text{ N}$. Vậy $T_1 \approx 6,63 \text{ N}$, $T_2 \approx 3,37 \text{ N}$.

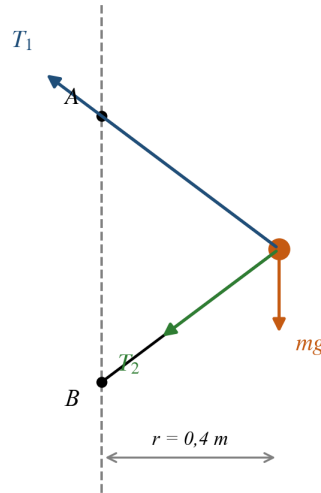
For $\omega = 10 \text{ rad/s}$: $T_1 + T_2 = 0.20 \cdot 100 \cdot 0.50 = 10 \text{ N}$; $T_1 - T_2 = 0.20 \cdot 9.8/0.6 \approx 3.27 \text{ N}$. Hence $T_1 \approx 6.63 \text{ N}$, $T_2 \approx 3.37 \text{ N}$.

Với $\omega = 5,0 \text{ rad/s} < 5,72 \text{ rad/s}$ dây dưới chùng. Con lắc nón một dây: $\cos \theta = 9,8/(25 \cdot 0,50) = 0,784$, $\theta \approx 38,4^\circ$, $T = 0,20 \cdot 25 \cdot 0,50 = 2,5 \text{ N}$. Kiểm tra: quả cầu cách trục $\ell \sin \theta \approx 0,310 \text{ m}$, cách A theo phương đứng $\ell \cos \theta = 0,392 \text{ m}$, nên cách B $\sqrt{(0,310^2 + (0,60 - 0,392)^2)} \approx 0,374 \text{ m} < 0,50 \text{ m}$: dây dưới chùng đúng.

For $\omega = 5.0 \text{ rad/s} < 5.72 \text{ rad/s}$ the lower string is slack. One-string conical pendulum: $\cos \theta = 9.8/(25 \cdot 0.50) = 0.784$, $\theta \approx 38.4^\circ$, $T = 0.20 \cdot 25 \cdot 0.50 = 2.5 \text{ N}$. Check: the sphere is $\ell \sin \theta \approx 0.310 \text{ m}$ from the axis and $\ell \cos \theta = 0.392 \text{ m}$ below A, so its distance from B is $\sqrt{(0.310^2 + (0.60 - 0.392)^2)} \approx 0.374 \text{ m} < 0.50 \text{ m}$: the lower string is indeed slack.

Vậy $\omega_{\min} \approx 5,72 \text{ rad/s}$; ở 10 rad/s lực căng là $6,63 \text{ N}$ và $3,37 \text{ N}$; ở $5,0 \text{ rad/s}$ chỉ dây trên căng, $T = 2,5 \text{ N}$, lệch $38,4^\circ$ so với phương thẳng đứng.

Hence $\omega_{\min} \approx 5.72 \text{ rad/s}$; at 10 rad/s the tensions are 6.63 N and 3.37 N ; at 5.0 rad/s only the upper string is taut, $T = 2.5 \text{ N}$, at 38.4° to the vertical. ■



Hình 6.4. Quả cầu nối hai dây vào trục quay ở $\omega = 10 \text{ rad/s}$ (Ví dụ 6.6): T_1 , T_2 và mg theo tỉ lệ 0,1 đơn vị cho 1 N, khoảng cách theo mét

Figure 6.4. Sphere on two strings joined to the axis at $\omega = 10 \text{ rad/s}$ (Example 6.6): T_1 , T_2 and mg at 0.1 units per newton, distances in metres

NHẬN XÉT / REMARK — Tổng hai lực căng $T_1 + T_2 = m\omega^2\ell$ cho mọi cặp dây đối xứng, kể cả khi dây dưới dài hơn; hiệu của chúng chỉ phụ thuộc trọng lượng và góc. Đây là cách tách hai ẩn bằng hai phương trình độc lập, gọn hơn việc giải hệ thê.

The sum $T_1 + T_2 = m\omega^2\ell$ holds for any symmetric pair of strings, and their difference depends only on the weight and the angle. This separates the two unknowns with two independent equations, shorter than solving by substitution.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Ở con lắc nón, lấy bán kính quỹ đạo bằng chiều dài dây ℓ trong $m\omega^2r$. Bán kính của vòng tròn là $\ell \sin \theta$; chỉ khi chiếu T lên phương ngang mới thấy $T \sin \theta = m\omega^2\ell \sin \theta$, và $\sin \theta$ giản ước.

In a conical pendulum, taking the radius of the path as the string length ℓ in $m\omega^2r$. The radius of the circle is $\ell \sin \theta$; only when T is projected on the horizontal do we get $T \sin \theta = m\omega^2\ell \sin \theta$, with $\sin \theta$ cancelling.

ĐỊNH LÝ 6.11 (Vòng nhào lộn) / THEOREM 6.11 (Loop-the-loop) — Vật nhỏ khối lượng m chuyển động không ma sát trên mặt trong của vòng tròn thẳng đứng bán kính R . Gọi v_t là tốc độ ở điểm cao nhất, v_b ở điểm thấp nhất. Khi vật tới điểm cao nhất mà không rời vòng thì $v_t \geq \sqrt{gR}$. Nếu thả từ nghỉ ở độ cao h so với điểm thấp nhất trên đường dẫn không ma sát nối vào vòng, vật qua được điểm cao nhất khi $h \geq 5R/2$. Hiệu giữa lực nén ở điểm thấp nhất và điểm cao nhất luôn bằng $6mg$.

A small body of mass m moves without friction on the inner surface of a vertical circle of radius R . Let v_t be its speed at the top and v_b at the bottom. If the body reaches the top without leaving the circle then $v_t \geq \sqrt{gR}$. If it is released from rest at height h above the lowest point on a smooth track joined to the loop, it passes the top when $h \geq 5R/2$. The difference between the contact forces at the bottom and at the top always equals $6mg$.

Chứng minh. / Proof.

Tại điểm cao nhất, trọng lực và phản lực N đều hướng xuống tâm: $N + mg = mv_t^2/R$. Vật còn tiếp xúc khi $N \geq 0$, tức $mv_t^2/R \geq mg$, hay $v_t^2 \geq gR$.

At the top, weight and the reaction N both point down to the centre: $N + mg = mv_t^2/R$. The body stays in contact while $N \geq 0$, i.e. $mv_t^2/R \geq mg$, or $v_t^2 \geq gR$.

Chỉ trọng lực thực hiện công (phản lực vuông góc với chuyển động), nên theo định lý động năng (Chương 8) $v^2 = 2g(h - y)$ tại độ cao y bất kỳ. Ở điểm cao nhất $y = 2R$:

Only weight does work (the reaction is perpendicular to the motion), so by the work-energy theorem (Chapter 8) $v^2 = 2g(h - y)$ at any height y . At the top $y = 2R$:

$$v_t^2 = 2g(h - 2R) \geq gR \Rightarrow h \geq 5R/2$$

Hiệu lực nén: ở điểm thấp nhất $N_b - mg = mv_b^2/R$, ở điểm cao nhất $N_t + mg = mv_t^2/R$. Cũng theo định lý động năng $v_b^2 = v_t^2 + 4gR$. Trừ:

Difference of contact forces: at the bottom $N_b - mg = mv_b^2/R$, at the top $N_t + mg = mv_t^2/R$. Also by the work-energy theorem $v_b^2 = v_t^2 + 4gR$. Subtracting:

$$N_b - N_t = 2mg + m(v_b^2 - v_t^2)/R = 2mg + 4mg = 6mg$$

■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Bài vòng nhào đi theo ba bước: (1) viết phương trình hướng tâm tại điểm cần tìm lực; (2) nối tốc độ ở điểm đó với độ cao thả bằng định lý động năng; (3) xét điều kiện $N \geq 0$ ở điểm nguy hiểm nhất, là điểm cao nhất. Điểm ngang tâm cho gọn: phản lực ngang một mình là lực hướng tâm, trọng lực nằm tiếp tuyến.

A loop problem has three steps: (1) write the centripetal equation at the point where the force is wanted; (2) link the speed there to the release height by the work-energy theorem; (3) test $N \geq 0$ at the most critical point, the top. The point level with the centre is simple: the horizontal reaction alone is the centripetal force while weight is tangential.

VÍ DỤ 6.7 (Lực nén trên vòng nhào) / EXAMPLE 6.7 (Contact force in a loop) — Xe nhỏ khối lượng 0,25 kg trượt không ma sát từ độ cao $h = 1,20$ m xuống đường dẫn rồi vào vòng tròn thẳng đứng bán kính $R = 0,40$ m (h tính từ điểm thấp nhất). Tính lực nén của vòng lên xe tại điểm cao nhất, tại điểm ngang tâm vòng và tại điểm thấp nhất. Độ cao thả nhỏ nhất để xe qua vòng là bao nhiêu? Lấy $g = 9,8$ m/s².

A small cart of mass 0.25 kg slides without friction from height $h = 1.20$ m down a track and into a vertical loop of radius $R = 0.40$ m (h measured from the lowest point). Find the force of the loop on the cart at the top, at the point level with the centre and at the bottom. What is the least release height for the cart to pass the top? Take $g = 9.8$ m/s².

Lời giải. / Solution.

Tốc độ ở các độ cao $y = 2R, R, 0$ (định lý động năng): $v^2 = 2g(h - y)$. Điểm cao nhất $y = 0,80$ m; ngang tâm $y = 0,40$ m; thấp nhất $y = 0$.

Speed at heights $y = 2R, R, 0$ (work-energy theorem): $v^2 = 2g(h - y)$. Top $y = 0.80$ m; level with the centre $y = 0.40$ m; bottom $y = 0$.

1. Điểm cao nhất: $v^2 = 2 \cdot 9,8 \cdot 0,40 = 7,84 \text{ m}^2/\text{s}^2$; $N + mg = mv^2/R$ nên $N = 0,25 \cdot (7,84/0,40 - 9,8) = 0,25 \cdot 9,8 = 2,45 \text{ N}$, hướng xuống.
Top: $v^2 = 2 \cdot 9,8 \cdot 0,40 = 7,84 \text{ m}^2/\text{s}^2$; $N + mg = mv^2/R$ so $N = 0,25 \cdot (7,84/0,40 - 9,8) = 0,25 \cdot 9,8 = 2,45 \text{ N}$, directed downwards.
2. Ngang tâm: $v^2 = 2 \cdot 9,8 \cdot 0,80 = 15,68 \text{ m}^2/\text{s}^2$; theo phương ngang $N = mv^2/R = 0,25 \cdot 15,68/0,40 = 9,80 \text{ N}$, hướng vào tâm.
Level with the centre: $v^2 = 2 \cdot 9,8 \cdot 0,80 = 15,68 \text{ m}^2/\text{s}^2$; horizontally $N = mv^2/R = 0,25 \cdot 15,68/0,40 = 9,80 \text{ N}$, towards the centre.
3. Điểm thấp nhất: $v^2 = 2 \cdot 9,8 \cdot 1,20 = 23,52 \text{ m}^2/\text{s}^2$; $N - mg = mv^2/R$ nên $N = 0,25 \cdot (23,52/0,40 + 9,8) = 0,25 \cdot 68,6 = 17,15 \text{ N}$, hướng lên.
Bottom: $v^2 = 2 \cdot 9,8 \cdot 1,20 = 23,52 \text{ m}^2/\text{s}^2$; $N - mg = mv^2/R$ so $N = 0,25 \cdot (23,52/0,40 + 9,8) = 0,25 \cdot 68,6 = 17,15 \text{ N}$, directed upwards.

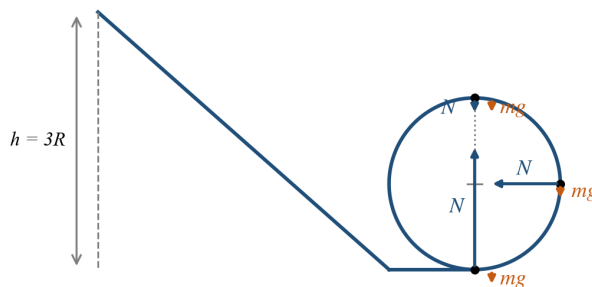
Kiểm tra Định lý 6.11: $17,15 - 2,45 = 14,7 \text{ N} = 6 \cdot 0,25 \cdot 9,8$. Độ cao nhỏ nhất $h_{\min} = 5R/2 = 1,00 \text{ m}$.

Check against Theorem 6.11: $17,15 - 2,45 = 14,7 \text{ N} = 6 \cdot 0,25 \cdot 9,8$. The least height is $h_{\min} = 5R/2 = 1,00 \text{ m}$.

Vậy lực nén là 2,45 N, 9,80 N, 17,15 N và độ cao thả nhỏ nhất là 1,00 m.

Hence the contact forces are 2.45 N, 9.80 N and 17.15 N, and the least release height is 1.00 m.

■



Hình 6.5. Xe thả từ $h = 3R$ vào vòng nhào (Ví dụ 6.7): lực nén N và mg tại điểm cao nhất, ngang tâm, thấp nhất, theo tỉ lệ cùng một đơn vị cho mọi mũi tên

Figure 6.5. Cart released from $h = 3R$ into a loop (Example 6.7): contact force N and weight mg at the top, level with the centre and bottom, one common scale for all arrows

NHẬN XÉT / REMARK — Nếu xe chạy trong ống kín (vật không thể rời) thì điều kiện chỉ còn $v_t > 0$, tức $h > 2R$: ống đỡ được vật ở điểm cao nhất bằng phản lực hướng lên. Với vòng hở, điều kiện là $v_t \geq \sqrt{gR}$.

If the cart runs in a closed tube (it cannot leave) the condition reduces to $v_t > 0$, i.e. $h > 2R$: the tube can supply an upward reaction at the top. For an open loop the condition is $v_t \geq \sqrt{gR}$.

NHẬN XÉT / REMARK — Hiệu $6mg$ không phụ thuộc h và R : đo hai lực kế đặt ở đáy và đỉnh vòng, lấy hiệu, ta được trọng lượng của xe mà không cần biết tốc độ.

The difference $6mg$ does not depend on h or R : two force sensors at the bottom and the top of a loop, subtracted, give the weight of the cart without knowing its speed.

TÍNH CHẤT 6.12 / PROPERTY 6.12 — Vật đặt trên đĩa nằm ngang quay đều với tốc độ góc ω , cách trục r , đứng yên so với đĩa khi ma sát nghỉ cung cấp lực hướng tâm: $f = m\omega^2 r \leq \mu mg$, tức $\omega \leq \sqrt{(\mu g/r)}$. Vật xa trục hơn trượt trước.

A body on a horizontal disc rotating uniformly at angular speed ω , at distance r from the axis, stays at rest relative to the disc when static friction supplies the centripetal force: $f = m\omega^2 r \leq \mu mg$, i.e. $\omega \leq \sqrt{(\mu g/r)}$. The body farther from the axis slips first.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thêm lực hướng tâm vào hình vẽ lực cùng với trọng lực, lực căng và phản lực rồi cộng lại: lực đó bị đếm hai lần. Chỉ vẽ lực thực, rồi chiếu lên phương hướng tâm.

Adding a centripetal force to the free-body diagram together with weight, tension and reaction and then summing: that force is counted twice. Draw only real forces, then project on the centripetal direction.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng $f = \mu N$ cho ma sát nghỉ của vật trên đĩa hay xe ở khúc cua: ma sát nghỉ chỉ BẰNG μN ở ngưỡng trượt, còn lại nó nhỏ hơn và do phương trình hướng tâm quyết định.

Using $f = \mu N$ for the static friction of a body on a disc or a car on a bend: static friction EQUALS μN only at the point of slipping; otherwise it is smaller and fixed by the centripetal equation.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Ở vòng nhào, dùng điều kiện $v_t = 0$ tại điểm cao nhất như với con lắc buộc dây cứng. Vật chuyển động trên mặt trong của vòng phải có $v_t^2 \geq gR$, vì phản lực không thể kéo.

In a loop, using the condition $v_t = 0$ at the top as for a pendulum on a rigid rod. A body on the inner surface of a loop must have $v_t^2 \geq gR$, because the reaction cannot pull.

$$N_b - N_t = 6mg \quad (6.9)$$

6.5. Hệ quy chiếu quay và lực li tâm — Rotating frames and the centrifugal force

Đứng trên bàn quay, vật nằm yên trên bàn không có gia tốc đối với ta, dù ở mặt đất nó chuyển động tròn. Để phương trình cân bằng vẫn viết được, ta thêm một lực hướng ra ngoài. Lực này có phạm vi dùng hẹp, nên phát biểu kèm điều kiện.

Standing on a rotating table, a body that lies still on it has no acceleration relative to us, although in the ground frame it moves on a circle. To keep an equilibrium equation we add an outward force. The force has a narrow range of use, so it is stated together with its condition.

ĐỊNH NGHĨA 6.13 (Lực li tâm) / DEFINITION 6.13 (Centrifugal force) — Trong hệ quy chiếu quay đều với tốc độ góc ω quanh một trục cố định, vật đứng yên đối với hệ ở khoảng cách r tính từ trục chịu thêm lực li tâm có độ lớn $F_{lt} = m\omega^2 r$, phương vuông góc với trục, chiều hướng ra xa trục. Công thức này KHÔNG áp dụng cho vật đang chuyển động đối với hệ quay: vật đó còn chịu một lực nữa (lực Coriolis) mà sách không dùng; bài có vật chuyển động trong hệ quay giải ở hệ mặt đất.

In a frame rotating uniformly at angular speed ω about a fixed axis, a body at rest in the frame at distance r from the axis is acted on by an additional centrifugal force of magnitude $F_{cf} = m\omega^2 r$, perpendicular to the axis and directed away from it. This formula does NOT apply to a body moving relative to the rotating frame: that body feels another force (the Coriolis force) which this book does not use; problems with bodies moving in the rotating frame are solved in the ground frame.

Lý do công thức đúng: ở hệ mặt đất vật đứng yên đối với bàn chuyển động tròn bán kính r nên cần hợp lực thực hướng vào trục bằng $m\omega^2 r$. Trong hệ quay vật đứng yên, tổng lực phải bằng 0: các lực thực cộng với lực li tâm $m\omega^2 r$ hướng ra ngoài cho 0, tức hợp lực thực vẫn là $m\omega^2 r$ hướng vào. Hai hệ cho cùng phương trình, chỉ khác cách viết.

Why the formula is right: in the ground frame a body at rest relative to the table moves on a circle of radius r , so the real net force towards the axis must be $m\omega^2 r$. In the rotating frame the body is at rest and the total force must vanish: the real forces plus the outward centrifugal force $m\omega^2 r$ give zero, so the real net force is still $m\omega^2 r$ inwards. Both frames give the same equation, written differently.

$$F_{lt} = m\omega^2 r \quad (6.10)$$

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hai vật nối dây trên đĩa quay: tại thời điểm trượt, mọi vật đứng yên đối với đĩa nên dùng hệ quay với lực li tâm. Viết cân bằng từng vật theo phương bán kính, nhớ rằng dây chỉ kéo ($T \geq 0$) và ma sát nghỉ không vượt μN . Hỏi ω lớn nhất: xem vật nào đạt giới hạn ma sát trước, rồi cộng cân bằng của cả hệ.

Two bodies joined by a string on a rotating disc: at the instant of slipping all bodies are at rest relative to the disc, so use the rotating frame with centrifugal forces. Write the radial equilibrium of each body, remembering that a string only pulls ($T \geq 0$) and static friction does not exceed μN . For the largest ω , find which body reaches its friction limit first, then add the equilibrium of the whole system.

VÍ DỤ 6.8 (Hai vật nối dây trên đĩa quay) / EXAMPLE 6.8 (Two bodies joined by a string on a rotating disc) — Hai vật nhỏ A (0,30 kg) và B (0,50 kg) nằm trên cùng một bán kính của đĩa ngang quay đều quanh trục thẳng đứng qua tâm, cách trục lần lượt 0,20 m và 0,40 m. Dây nhẹ không giãn dài 0,20 m nối hai vật, thẳng nhưng chưa căng khi đĩa đứng yên. Hệ số ma sát nghỉ giữa mỗi vật và đĩa là 0,40. Tăng dần ω . Tìm ω để dây bắt đầu căng, ω lớn nhất để hai vật còn đứng yên đối với đĩa, và lực căng dây lúc đó. Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Two small bodies A (0.30 kg) and B (0.50 kg) lie on the same radius of a horizontal disc rotating uniformly about the vertical axis through its centre, at 0.20 m and 0.40 m from the axis. A light inextensible string 0.20 m long joins them, straight but slack in tension when the disc is at rest. The coefficient of static friction between each body and the disc is 0.40. ω is increased slowly. Find ω at which the string starts to pull, the largest ω for both bodies to stay at rest relative to the disc, and the tension then. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải. / Solution.

Hệ gắn đĩa: mỗi vật đứng yên, chịu lực li tâm hướng ra, ma sát nghỉ f hướng vào (tại ngưỡng), dây kéo B vào trong (T) và kéo A ra ngoài (T).

Disc frame: each body is at rest, acted on by an outward centrifugal force, inward static friction f (at the limit), and the string, which pulls B inwards (T) and A outwards (T).

$$B: f_B + T = m_B \omega^2 r_B; \quad A: f_A = m_A \omega^2 r_A + T$$

Giai đoạn $T = 0$: mỗi vật cần $f = m\omega^2 r \leq \mu mg$. B ở xa trục nên đạt giới hạn trước, tại $\omega^2 = \mu g/r_B = 0,40 \cdot 9,8/0,40 = 9,8 \text{ s}^{-2}$, tức $\omega \approx 3,13 \text{ rad/s}$: dây bắt đầu căng.

Stage $T = 0$: each body needs $f = m\omega^2 r \leq \mu mg$. B is farther from the axis and reaches its limit first, at $\omega^2 = \mu g/r_B = 0.40 \cdot 9.8/0.40 = 9.8 \text{ s}^{-2}$, i.e. $\omega \approx 3.13 \text{ rad/s}$: the string starts to pull.

Cộng hai phương trình: $f_A + f_B = (m_{ArA} + m_{BrB})\omega^2$. Hai vật chỉ đứng yên khi $f_A + f_B \leq \mu(m_A + m_B)g$, và ở ω lớn nhất cả hai f đều đạt μmg :

Adding the two equations: $f_A + f_B = (m_{ArA} + m_{BrB})\omega^2$. The bodies stay at rest only while $f_A + f_B \leq \mu(m_A + m_B)g$, and at the largest ω both f 's reach μmg :

$$\omega_{\max}^2 = \mu g (m_A + m_B) / (m_{ArA} + m_{BrB})$$

Số: $m_{ArA} + m_{BrB} = 0,30 \cdot 0,20 + 0,50 \cdot 0,40 = 0,26 \text{ kg} \cdot \text{m}$; $\omega_{\max}^2 = 0,40 \cdot 9,8 \cdot 0,80 / 0,26 \approx 12,06 \text{ s}^{-2}$, $\omega_{\max} \approx 3,47 \text{ rad/s}$.

Numbers: $m_{ArA} + m_{BrB} = 0.30 \cdot 0.20 + 0.50 \cdot 0.40 = 0.26 \text{ kg} \cdot \text{m}$; $\omega_{\max}^2 = 0.40 \cdot 9.8 \cdot 0.80 / 0.26 \approx 12.06 \text{ s}^{-2}$, $\omega_{\max} \approx 3.47 \text{ rad/s}$.

Lực căng từ phương trình của B với $f_B = \mu m_B g$: $T = m_B(\omega^2 r_B - \mu g) = 0,50 \cdot (12,06 \cdot 0,40 - 3,92) \approx 0,452 \text{ N}$. Kiểm tra với A: $f_A = 0,30 \cdot 12,06 \cdot 0,20 + 0,452 \approx 1,176 \text{ N} = 0,40 \cdot 0,30 \cdot 9,8$.

The tension from B's equation with $f_B = \mu m_B g$: $T = m_B(\omega^2 r_B - \mu g) = 0.50 \cdot (12.06 \cdot 0.40 - 3.92) \approx 0.452 \text{ N}$. Check with A: $f_A = 0.30 \cdot 12.06 \cdot 0.20 + 0.452 \approx 1.176 \text{ N} = 0.40 \cdot 0.30 \cdot 9.8$.

Vây dây bắt đầu căng ở $\omega \approx 3,13 \text{ rad/s}$; hai vật còn đứng yên đến $\omega \approx 3,47 \text{ rad/s}$, khi đó $T \approx 0,45 \text{ N}$.

Hence the string starts to pull at $\omega \approx 3.13 \text{ rad/s}$; the bodies stay at rest up to $\omega \approx 3.47 \text{ rad/s}$, when $T \approx 0.45 \text{ N}$. ■

PHÂN TÍCH / ANALYSIS — Hạt xỏ vào vòng quay, đứng yên đối với vòng ở góc cho trước: dùng hệ quay. Lực li tâm ngang có độ lớn $m\omega^2 \cdot (R \sin \theta)$, vì khoảng cách tới TRỤC là $R \sin \theta$ chứ không phải R . Phân tích mỗi lực theo hai phương gắn với vòng, bán kính và tiếp tuyến; ma sát chỉ có thành phần tiếp tuyến và bị chặn bởi μN . Chiều ma sát đổi dấu khi ω đi qua giá trị cân bằng không ma sát.

A bead threaded on a rotating hoop, at rest relative to the hoop at a given angle: use the rotating frame. The horizontal centrifugal force has magnitude $m\omega^2 \cdot (R \sin \theta)$, because the distance to the AXIS is $R \sin \theta$ and not R . Resolve each force along the two directions tied to the hoop, radial and tangential; friction has a tangential component only and is bounded by μN . The sense of friction reverses as ω passes the frictionless equilibrium value.

VÍ DỤ 6.9 (Hạt trên vòng quay có ma sát) / EXAMPLE 6.9 (Bead on a rotating hoop with friction) — Vòng dây mảnh bán kính $R = 0,40 \text{ m}$ nằm trong mặt phẳng thẳng đứng, quay đều quanh trục thẳng đứng đi qua đường kính của nó với tốc độ góc ω . Hạt nhỏ khối

lượng m xỏ vào vòng, hệ số ma sát nghỉ giữa hạt và vòng là $0,30$. Tìm khoảng ω để hạt đứng yên đối với vòng tại vị trí mà bán kính nối hạt hợp với phương thẳng đứng hướng xuống góc 60° . Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A thin hoop of radius $R = 0.40 \text{ m}$ lies in a vertical plane and rotates uniformly about the vertical axis through one of its diameters at angular speed ω . A small bead of mass m is threaded on the hoop; the coefficient of static friction between bead and hoop is 0.30 . Find the range of ω for which the bead stays at rest relative to the hoop at the place where the radius to the bead makes an angle of 60° with the downward vertical. Take $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.