

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP

Toán kinh tế

Dành cho sinh viên đại học khối kinh tế, tài chính

Mathematics for Economics — a bilingual study guide

Ma trận · Hệ phương trình · Mô hình cân bằng và Leontief · Đạo hàm cận biên · Hệ số co giãn · Tối ưu · Tích phân · Hàm nhiều biến · Cực trị Lagrange · Phương trình vi phân

Ví dụ giải từng bước · Kiểm đáp số bằng Python

Bài tập có lời giải · Tự luận có đáp số · Trắc nghiệm có đáp án

Song ngữ Việt – Anh · Vietnamese – English

Phiên bản 1.0 — Tháng 10 năm 2026

<https://globalmarket.vin>

M U C L U C

CONTENTS

Chương 1. Ma trận và định thức — Chapter 1. Matrices and determinants	6
1.1. Ma trận và các dạng ma trận đặc biệt — <i>Matrices and special types of matrices</i>	6
1.2. Các phép toán trên ma trận — <i>Matrix operations.....</i>	8
1.3. Định thức — <i>Determinants</i>	13
1.4. Ma trận nghịch đảo — <i>The inverse matrix.....</i>	17
1.5. Hạng của ma trận — <i>The rank of a matrix.....</i>	22
1.6. Kiểm bằng máy tính với Python — <i>Checking with Python</i>	23
1.7. Tổng hợp công thức và thuật ngữ — <i>Summary of formulas and terminology.....</i>	24
1.8. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	27
1.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	29
1.10. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	31
Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính — Chapter 2. Systems of linear equations.....	33
2.1. Khái niệm và dạng ma trận của hệ — <i>Basic notions and the matrix form.....</i>	33
2.2. Quy tắc Cramer — <i>Cramer's rule.....</i>	36
2.3. Giải hệ bằng ma trận nghịch đảo — <i>Solving by the inverse matrix</i>	38
2.4. Phương pháp khử Gauss — <i>Gaussian elimination</i>	41
2.5. Định lý Kronecker–Capelli và biện luận số nghiệm — <i>The Kronecker–Capelli theorem and the number of solutions</i>	44
2.6. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất — <i>Homogeneous linear systems.....</i>	47
2.7. Chọn phương pháp và kiểm bằng máy — <i>Choosing a method and checking by computer.....</i>	51
2.8. Bảng tổng hợp công thức — <i>Summary of formulas</i>	52
2.9. Thuật ngữ Việt – Anh — <i>Vietnamese – English glossary</i>	53
2.10. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	55
2.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	58
2.12. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	59
Chương 3. Mô hình tuyến tính trong kinh tế — Chapter 3. Linear models in economics	62
3.1. Mô hình cân bằng thị trường một hàng hóa — <i>Single-good market equilibrium model</i>	62
3.2. Mô hình cân bằng thị trường nhiều hàng hóa — <i>Multi-good market equilibrium model</i>	65
3.3. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân — <i>National income equilibrium model.....</i>	67
3.4. Mô hình IS–LM — <i>The IS–LM model</i>	70
3.5. Mô hình input–output Leontief — <i>The Leontief input–output model.....</i>	72
3.6. Giải mô hình bằng Python — <i>Solving the models with Python</i>	77
3.7. Tổng hợp công thức và thuật ngữ — <i>Summary of formulas and terms</i>	79
3.8. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	82

3.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	85
3.10. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	87
Chương 4. Hàm số, giới hạn và liên tục trong kinh tế — Chapter 4. Functions, limits and continuity in economics	89
4.1. Hàm số một biến và các hàm số kinh tế cơ bản — <i>Functions of one variable and basic economic functions</i>	89
4.2. Giới hạn của hàm số — <i>Limits of functions</i>	94
4.3. Vô cùng bé, vô cùng lớn và giới hạn dạng vô định — <i>Infinitesimals, infinitely large quantities and indeterminate forms</i>	96
4.4. Số e, lãi kép và lãi kép liên tục — <i>The number e, compound and continuous compounding</i>	99
4.5. Hàm số liên tục và điểm gián đoạn — <i>Continuous functions and discontinuities</i>	101
4.6. Hàm liên tục từng khúc trong kinh tế: giá bậc thang và thuế lũy tiến — <i>Piecewise functions in economics: tiered prices and progressive tax</i>	104
4.7. Kiểm tra kết quả bằng Python — <i>Checking results with Python</i>	106
4.8. Bảng tổng hợp công thức chương 4 — <i>Chapter 4 formula summary</i>	107
4.9. Thuật ngữ Việt – Anh chương 4 — <i>Chapter 4 Vietnamese – English glossary</i>	108
4.10. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	110
4.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	112
4.12. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	114
Chương 5. Đạo hàm, vi phân và phân tích cận biên — Chapter 5. Derivatives, differentials and marginal analysis	116
5.1. Đạo hàm và các quy tắc tính — <i>Derivatives and differentiation rules</i>	116
5.2. Vi phân, đạo hàm cấp cao và quy tắc L'Hôpital — <i>Differentials, higher-order derivatives and L'Hôpital's rule</i>	121
5.3. Giá trị cận biên — <i>Marginal values</i>	123
5.4. Hệ số co giãn — <i>Elasticity</i>	127
5.5. Tốc độ tăng trưởng — <i>Growth rates</i>	132
5.6. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and computer check</i>	133
5.7. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	137
5.8. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	139
5.9. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	141
Chương 6. Tối ưu hàm một biến trong kinh tế — Chapter 6. Single-variable optimisation in economics	144
6.1. Cực trị của hàm một biến — <i>Extrema of a function of one variable</i>	144
6.2. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một đoạn — <i>Global maximum and minimum on a closed interval</i>	147
6.3. Tính lồi, lõm và điểm uốn — <i>Convexity, concavity and inflection points</i>	149
6.4. Tối đa doanh thu và lợi nhuận — <i>Maximising revenue and profit</i>	152
6.5. Tối thiểu chi phí trung bình — <i>Minimising average cost</i>	155
6.6. Thuế tối ưu trên mỗi đơn vị sản phẩm — <i>The optimal per-unit tax</i>	157

6.7. Quy mô đặt hàng tối ưu (EOQ) — <i>The economic order quantity (EOQ)</i>	159
6.8. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and computer check</i>	162
6.9. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	165
6.10. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	168
6.11. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	170
Chương 7. Tích phân và ứng dụng trong kinh tế, tài chính — Chapter 7. Integration and its applications in economics and finance	172
7.1. Nguyên hàm và tích phân bất định — <i>Antiderivatives and indefinite integrals</i>	172
7.2. Phương pháp đổi biến và tích phân từng phần — <i>Substitution and integration by parts</i>	174
7.3. Tích phân xác định — <i>Definite integrals</i>	176
7.4. Tích phân suy rộng — <i>Improper integrals</i>	178
7.5. Tìm hàm tổng từ hàm cận biên; quỹ vốn từ dòng đầu tư — <i>Total functions from marginal functions; capital stock from investment flow</i>	179
7.6. Thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất — <i>Consumer surplus and producer surplus</i>	182
7.7. Giá trị hiện tại và giá trị tương lai của dòng tiền liên tục — <i>Present and future value of continuous cash flows</i>	185
7.8. Đường Lorenz và hệ số Gini — <i>The Lorenz curve and the Gini coefficient</i>	187
7.9. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and computer check</i>	189
7.10. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	193
7.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	195
7.12. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	197
Chương 8. Hàm nhiều biến và đạo hàm riêng — Chapter 8. Functions of several variables and partial derivatives	199
8.1. Hàm hai biến, miền xác định và đường mức — <i>Functions of two variables, domain and level curves</i>	199
8.2. Đạo hàm riêng và giá trị cận biên — <i>Partial derivatives and marginal values</i>	202
8.3. Vi phân toàn phần, xấp xỉ và đạo hàm hàm hợp — <i>Total differential, approximation and the chain rule</i>	205
8.4. Đạo hàm riêng cấp hai và quy luật cận biên giảm dần — <i>Second-order partial derivatives and diminishing marginal returns</i>	207
8.5. Đạo hàm hàm ẩn, tỷ lệ thay thế kỹ thuật cận biên và tỷ lệ thay thế cận biên — <i>Implicit differentiation, the marginal rate of technical substitution and the marginal rate of substitution</i>	208
8.6. Hàm thuần nhất, định lý Euler và hàm Cobb–Douglas — <i>Homogeneous functions, Euler’s theorem and the Cobb–Douglas function</i>	210
8.7. Hệ số co giãn riêng và co giãn chéo — <i>Partial elasticities and cross elasticities</i>	213
8.8. Bảng tổng hợp công thức và kiểm bằng máy — <i>Formula summary and computer check</i>	216
8.9. Thuật ngữ Việt – Anh — <i>Vietnamese – English glossary</i>	217

8.10. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	219
8.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	222
8.12. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	224

Chương 9. Cực trị tự do và cực trị có điều kiện — Chapter 9. Unconstrained and constrained optimisation 226

9.1. Cực trị tự do của hàm hai biến — <i>Unconstrained extrema of two-variable functions</i>	226
9.2. Ma trận Hesse của hàm nhiều biến — <i>The Hessian matrix of functions of several variables</i>	229
9.3. Bài toán cực trị tự do trong kinh tế — <i>Unconstrained optimisation problems in economics</i>	230
9.4. Cực trị có điều kiện: bài toán và phương pháp thế — <i>Constrained extrema: the problem and the substitution method</i>	233
9.5. Phương pháp nhân tử Lagrange và định thức Hesse bao — <i>The Lagrange multiplier method and the bordered Hessian</i>	234
9.6. Bài toán cực trị có điều kiện trong kinh tế — <i>Constrained optimisation problems in economics</i>	238
9.7. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and machine check</i>	243
9.8. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	247
9.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	249
9.10. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	251

Chương 10. Phương trình vi phân và ứng dụng — Chapter 10. Differential equations and applications 253

10.1. Khái niệm cơ bản về phương trình vi phân — <i>Basic concepts of differential equations</i>	253
10.2. Phương trình vi phân tách biến — <i>Separable differential equations</i>	255
10.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một — <i>First-order linear differential equations</i>	256
10.4. Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng — <i>Second-order linear equations with constant coefficients</i>	258
10.5. Mô hình tăng trưởng mũ và tăng trưởng logistic — <i>Exponential and logistic growth models</i>	260
10.6. Lãi kép liên tục có nạp và rút tiền — <i>Continuous compounding with deposits and withdrawals</i>	262
10.7. Mô hình điều chỉnh giá động Evans — <i>The Evans dynamic price adjustment model</i>	264
10.8. Mô hình tăng trưởng Domar — <i>The Domar growth model</i>	266
10.9. Tìm hàm cầu từ hệ số co giãn cho trước — <i>Recovering demand from a given elasticity</i>	267
10.10. Tổng hợp công thức, thuật ngữ và kiểm bằng máy — <i>Formula summary, glossary and computer check</i>	269
10.11. Bài tập vận dụng có lời giải — <i>Applied exercises with solutions</i>	273

10.12. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — <i>Essay questions and answer outlines</i>	275
10.13. Câu hỏi trắc nghiệm — <i>Multiple-choice questions</i>	277
Phụ lục A. Đáp án câu hỏi trắc nghiệm — <i>Appendix A. Answer key</i>	279
Phụ lục B. Bảng công thức — <i>Appendix B. Formula tables</i>	283
Phụ lục C. Thuật ngữ Việt – Anh — <i>Appendix C. Vietnamese–English glossary</i>	285
Tài liệu tham khảo — <i>References</i>	293

Chương 1. Ma trận và định thức — Chapter 1. Matrices and determinants

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Biểu diễn bảng số liệu kinh doanh (doanh số, đơn giá, định mức tiêu hao) dưới dạng ma trận và vector.
Represent business tables (unit sales, prices, input requirements) as matrices and vectors.
- Thực hiện đúng các phép cộng, nhân số, nhân ma trận, chuyển vị; kiểm tra điều kiện kích thước trước khi nhân.
Carry out addition, scalar multiplication, matrix multiplication and transposition correctly; check the size condition before multiplying.
- Tính định thức cấp 2, cấp 3 (Sarrus), cấp cao (khai triển Laplace, đưa về tam giác) và vận dụng các tính chất của định thức.
Compute determinants of order 2 and 3 (Sarrus) and of higher order (Laplace expansion, reduction to triangular form), using the properties of determinants.
- Tìm ma trận nghịch đảo bằng ma trận phụ hợp và bằng Gauss–Jordan; giải phương trình ma trận $AX = B$, $XA = B$.
Find an inverse by the adjugate and by Gauss–Jordan elimination; solve the matrix equations $AX = B$ and $XA = B$.
- Tìm hạng ma trận bằng biến đổi sơ cấp, biện luận hạng theo tham số.
Find the rank of a matrix by elementary row operations and discuss the rank in terms of a parameter.

1.1. Ma trận và các dạng ma trận đặc biệt — Matrices and special types of matrices

Khái niệm ma trận — The concept of a matrix

Bảng số liệu kinh doanh thường có dạng hàng – cột: mỗi hàng là một cửa hàng, một tháng hay một sản phẩm; mỗi cột là một mặt hàng, một loại nguyên liệu hay một chỉ tiêu. Viết bảng đó thành một khối số đặt trong ngoặc vuông ta được một **ma trận**. Phần tử ở dòng i , cột j ký hiệu a_{ij} : chỉ số thứ nhất luôn là dòng, chỉ số thứ hai luôn là cột.

*Business tables are usually laid out in rows and columns: each row a shop, a month or a product; each column an item, an input or an indicator. Writing such a table as a block of numbers in square brackets gives a **matrix**. The entry in row i and column j is written a_{ij} : the first index is always the row, the second always the column.*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng gồm $m \cdot n$ số xếp thành **m** dòng và **n** cột. Ký hiệu $A = (a_{ij})_{m \times n}$, với $i = 1, \dots, m$ và $j = 1, \dots, n$. Hai ma trận **bằng nhau** khi cùng cỡ và mọi phần tử ở cùng vị trí bằng nhau.

*An $m \times n$ matrix is an array of $m \cdot n$ numbers arranged in **m** rows and **n** columns, written $A = (a_{ij})_{m \times n}$ with $i = 1, \dots, m$ and $j = 1, \dots, n$. Two matrices are **equal** when they have the same size and all corresponding entries are equal.*

Dạng tổng quát của ma trận cỡ 3×3 (chỉ số dưới: dòng trước, cột sau):

General form of a 3×3 matrix (subscripts: row first, column second):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{3 \times 3}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Công ty bánh kẹo Hoàng Mai có 2 cửa hàng, bán 3 loại sản phẩm: bánh quy hộp, bánh bông lan, bánh trung thu. Số hộp bán trong tháng 9: cửa hàng 1 bán 120; 80; 50 hộp, cửa hàng 2 bán 90; 110; 60 hộp. Ma trận doanh số tháng 9 là ma trận A cỡ 2×3 dưới đây. Phần tử $a_{23} = 60$ là số hộp bánh trung thu (cột 3) của hàng 2 (dòng 2) bán được.
Hoàng Mai Confectionery has 2 shops selling 3 products: boxed biscuits, sponge cakes and mooncakes. September sales in boxes: shop 1 sold 120, 80, 50; shop 2 sold 90, 110, 60. The September sales matrix is the 2×3 matrix A below. Entry $a_{23} = 60$ is the number of mooncake boxes (column 3) sold by shop 2 (row 2).

$$A = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 110 & 60 \end{bmatrix} \text{ (hộp)}$$

Các dạng ma trận đặc biệt — *Special types of matrices*

Tên gọi <i>Name</i>	Đặc điểm <i>Feature</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Ma trận vuông cấp n <i>Square matrix of order n</i>	Số dòng = số cột = n; các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tạo thành đường chéo chính <i>Rows = columns = n; $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ form the main diagonal</i>	(2; 1), (3; 4) là ma trận vuông cấp 2 <i>(2; 1), (3; 4) is square of order 2</i>
Ma trận dòng, ma trận cột <i>Row matrix, column matrix</i>	Cỡ $1 \times n$ hoặc $m \times 1$; còn gọi là vector dòng, vector cột <i>Size $1 \times n$ or $m \times 1$; also called row or column vectors</i>	Vector giá $p = (45; 30; 120)^T$ là ma trận cột 3×1 <i>The price vector $p = (45; 30; 120)^T$ is a 3×1 column</i>
Ma trận không O <i>Zero matrix O</i>	Mọi phần tử bằng 0; $A + O = A$ <i>All entries are 0; $A + O = A$</i>	Doanh số của một cửa hàng đóng cửa cả tháng <i>Sales of a shop closed for the whole month</i>
Ma trận chéo <i>Diagonal matrix</i>	Ma trận vuông, mọi phần tử ngoài đường chéo chính bằng 0 <i>Square, all entries off the main diagonal are 0</i>	(2; 0), (0; 5)
Ma trận đơn vị I_n <i>Identity matrix I_n</i>	Ma trận chéo có các phần tử chéo bằng 1; $AI = IA = A$ <i>Diagonal with all diagonal entries 1; $AI = IA = A$</i>	$I_2 = (1; 0), (0; 1)$

Tên gọi <i>Name</i>	Đặc điểm <i>Feature</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Ma trận tam giác trên (dưới) <i>Upper (lower) triangular matrix</i>	Ma trận vuông có mọi phần tử nằm dưới (trên) đường chéo chính bằng 0 <i>Square, all entries below (above) the main diagonal are 0</i>	(1; 4; 2), (0; 3; 5), (0; 0; 6) là tam giác trên <i>(1; 4; 2), (0; 3; 5), (0; 0; 6) is upper triangular</i>
Ma trận đối xứng <i>Symmetric matrix</i>	Ma trận vuông có $a_{ij} = a_{ji}$, tức $A^T = A$ <i>Square with $a_{ij} = a_{ji}$, that is $A^T = A$</i>	Bảng khoảng cách giữa các kho hàng <i>A table of distances between warehouses</i>

Trong bảng trên và trong cả chương, cách viết “ma trận có các dòng (2; 1), (3; 4)” dùng để ghi gọn ma trận trong câu văn; dấu chấm phẩy ngăn các phần tử trong một dòng.

In the table above and throughout the chapter, “the matrix with rows (2; 1), (3; 4)” is a compact way of writing a matrix in running text; semicolons separate the entries of a row.

1.2. Các phép toán trên ma trận — Matrix operations

Cộng, trừ hai ma trận và nhân ma trận với một số — Addition, subtraction and scalar multiplication

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hai ma trận **cùng cỡ** $m \times n$ cộng (trừ) bằng cách cộng (trừ) các phần tử cùng vị trí: $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$. Nhân số k với ma trận: nhân k vào **mọi** phần tử, $kA = (k \cdot a_{ij})$. Ma trận khác cỡ không cộng được.

*Two matrices of the **same size** $m \times n$ are added (subtracted) entry by entry: $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$. A scalar k multiplies **every** entry: $kA = (k \cdot a_{ij})$. Matrices of different sizes cannot be added.*

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}; \quad kA = (k \cdot a_{ij})_{m \times n} \quad (1.1)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tiếp ví dụ Hoàng Mai. Doanh số tháng 10: cửa hàng 1 bán 135; 70; 65 hộp, cửa hàng 2 bán 100; 125; 80 hộp (ma trận B). (a) Tổng doanh số hai tháng $A + B$. (b) Mức thay đổi $B - A$. (c) Tháng 11 là mùa trung thu, công ty đặt kế hoạch mọi sản phẩm tăng 20% so với tháng 10: $1,2B$.

Continuing the Hoàng Mai example. October sales: shop 1 sold 135, 70, 65 boxes and shop 2 sold 100, 125, 80 (matrix B). (a) Two-month total $A + B$. (b) Change $B - A$. (c) November is the Mid-Autumn season and the plan raises every product by 20% over October: $1.2B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 255 & 150 & 115 \\ 190 & 235 & 140 \end{bmatrix} \text{ (hộp, hai tháng)}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 15 & -10 & 15 \\ 10 & 15 & 20 \end{bmatrix} \text{ (hộp)}$$

$$1,2B = \begin{bmatrix} 162 & 84 & 78 \\ 120 & 150 & 96 \end{bmatrix} \text{ (hộp, kế hoạch tháng 11)}$$

Phần tử -10 của $B - A$ cho biết cửa hàng 1 bán bánh bông lan tháng 10 ít hơn tháng 9 là 10 hộp. Phép trừ ma trận cho ngay bằng biến động của mọi cặp cửa hàng – sản phẩm.

The entry -10 in $B - A$ means shop 1 sold 10 fewer boxes of sponge cake in October than in September. Matrix subtraction gives the change for every shop–product pair at once.

Nhân hai ma trận — Matrix multiplication

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Tích AB chỉ xác định khi **số cột của A bằng số dòng của B**. Nếu A cỡ $m \times p$ và B cỡ $p \times n$ thì $C = AB$ cỡ $m \times n$, phần tử c_{ij} bằng **dòng i của A nhân vô hướng với cột j của B**.

*The product AB is defined only when **the number of columns of A equals the number of rows of B**. If A is $m \times p$ and B is $p \times n$, then $C = AB$ is $m \times n$, and c_{ij} is **row i of A times column j of B** (dot product).*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (1.2)$$

Quy tắc kiểm cỡ: viết $(m \times p) \cdot (p \times n) \rightarrow m \times n$. Hai số ở giữa phải bằng nhau, hai số ở ngoài là cỡ của tích.

Size check: write $(m \times p) \cdot (p \times n) \rightarrow m \times n$. The two inner numbers must match; the two outer numbers give the size of the product.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Đơn giá ba sản phẩm của Hoàng Mai là $p = (45; 30; 120)^T$ nghìn đồng/hộp. Doanh thu tháng 9 của từng cửa hàng là $A \cdot p$, với A cỡ 2×3 và p cỡ 3×1 , tích cỡ 2×1 . Cửa hàng 1: $120 \cdot 45 + 80 \cdot 30 + 50 \cdot 120 = 5.400 + 2.400 + 6.000 = 13.800$ nghìn đồng. Cửa hàng 2: $90 \cdot 45 + 110 \cdot 30 + 60 \cdot 120 = 4.050 + 3.300 + 7.200 = 14.550$ nghìn đồng. Tương tự, doanh thu tháng 10: $B \cdot p = (15.975; 17.850)^T$ nghìn đồng.

Hoàng Mai's unit prices are $p = (45; 30; 120)^T$ thousand VND per box. September revenue of each shop is $A \cdot p$ with A 2×3 and p 3×1 , so the product is 2×1 . Shop 1: $120 \cdot 45 + 80 \cdot 30 + 50 \cdot 120 = 5,400 + 2,400 + 6,000 = 13,800$ thousand VND. Shop 2: $90 \cdot 45 + 110 \cdot 30 + 60 \cdot 120 = 4,050 + 3,300 + 7,200 = 14,550$ thousand VND. Likewise, October revenue: $B \cdot p = (15,975; 17,850)^T$ thousand VND.

$$A \cdot p = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 110 & 60 \end{bmatrix} \cdot (45; 30; 120)^T = (13.800; 14.550)^T$$

Ma trận chi phí: định mức tiêu hao nhân đơn giá đầu vào — Cost matrices: input requirements times input prices

Xưởng nội thất Trường An sản xuất bàn, ghế, tủ. Mỗi sản phẩm dùng ba đầu vào: ván gỗ (tám), sơn (lít), giờ công. Định mức tiêu hao xếp thành ma trận N (dòng: sản phẩm; cột: đầu vào). Đơn giá đầu vào là $c = (150; 80; 40)^T$ nghìn đồng cho một tấm ván, một lít sơn, một giờ công.

Trường An Furniture makes tables, chairs and wardrobes. Each product uses three inputs: wood panels (sheets), paint (litres) and labour hours. The input requirements form a matrix N (rows: products; columns: inputs). Input prices are $c = (150; 80; 40)^T$ thousand VND per sheet, per litre and per hour.

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ (bàn; ghế; tủ)}$$

- Chi phí đầu vào một đơn vị sản phẩm: $N \cdot c$. Bàn: $4 \cdot 150 + 1 \cdot 80 + 3 \cdot 40 = 800$; ghế: $300 + 80 + 80 = 460$; tủ: $900 + 160 + 200 = 1.260$ nghìn đồng.
Input cost per unit of product: $N \cdot c$. Table: $4 \cdot 150 + 1 \cdot 80 + 3 \cdot 40 = 800$; chair: $300 + 80 + 80 = 460$; wardrobe: $900 + 160 + 200 = 1,260$ thousand VND.
- Kế hoạch tháng: $q = (50; 200; 30)$ (vector dòng: 50 bàn, 200 ghế, 30 tủ). Nhu cầu đầu vào: $q \cdot N = (50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 + 30 \cdot 6; 50 \cdot 1 + 200 \cdot 1 + 30 \cdot 2; 50 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 30 \cdot 5) = (780; 310; 700)$: 780 tấm ván, 310 lít sơn, 700 giờ công.
Monthly plan: $q = (50; 200; 30)$ (row vector: 50 tables, 200 chairs, 30 wardrobes). Input needs: $q \cdot N = (50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 + 30 \cdot 6; 50 \cdot 1 + 200 \cdot 1 + 30 \cdot 2; 50 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 30 \cdot 5) = (780; 310; 700)$: 780 sheets, 310 litres, 700 hours.
- Tổng chi phí đầu vào: $q \cdot N \cdot c$. Tính theo $(q \cdot N) \cdot c = 780 \cdot 150 + 310 \cdot 80 + 700 \cdot 40 = 117.000 + 24.800 + 28.000 = 169.800$ nghìn đồng; tính theo $q \cdot (N \cdot c) = 50 \cdot 800 + 200 \cdot 460 + 30 \cdot 1.260 = 169.800$ nghìn đồng. Hai cách cho cùng một số, minh họa tính kết hợp.
Total input cost: $q \cdot N \cdot c$. As $(q \cdot N) \cdot c = 780 \cdot 150 + 310 \cdot 80 + 700 \cdot 40 = 117,000 + 24,800 + 28,000 = 169,800$ thousand VND; as $q \cdot (N \cdot c) = 50 \cdot 800 + 200 \cdot 460 + 30 \cdot 1,260 = 169,800$ thousand VND. Both orders give the same figure, illustrating associativity.

$$TC = q \cdot N \cdot c = (q \cdot N) \cdot c = q \cdot (N \cdot c) = 169.800 \text{ (nghìn đồng)} \quad (1.3)$$

Tính chất của các phép toán; phép nhân không giao hoán — *Properties of the operations; multiplication is not commutative*

Tính chất <i>Property</i>	Phát biểu <i>Statement</i>	Lưu ý <i>Remark</i>
Giao hoán của phép cộng <i>Commutativity of addition</i>	$A + B = B + A$	Đúng với mọi ma trận cùng cỡ <i>Holds for all matrices of the same size</i>
Kết hợp <i>Associativity</i>	$(A + B) + C = A + (B + C); (AB)C = A(BC)$	Cho phép bỏ ngoặc trong tích nhiều ma trận <i>Brackets can be dropped in long products</i>
Phân phối <i>Distributivity</i>	$A(B + C) = AB + AC; (A + B)C = AC + BC$	Giữ nguyên bên trái, bên phải <i>Keep left factors on the left, right factors on the right</i>

Tính chất <i>Property</i>	Phát biểu <i>Statement</i>	Lưu ý <i>Remark</i>
Nhân với số <i>Scalar factors</i>	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$	Số đứng ở đâu cũng được <i>A scalar can sit anywhere</i>
Phần tử đơn vị <i>Identity</i>	$AI_n = I_m A = A$ (A cỡ $m \times n$) $AI_n = I_m A = A$ (A is $m \times n$)	I đóng vai trò số 1 <i>I plays the role of the number 1</i>
Không giao hoán <i>Not commutative</i>	Nói chung $AB \neq BA$ <i>In general $AB \neq BA$</i>	BA có thể không xác định, hoặc khác cỡ, hoặc cùng cỡ nhưng khác số <i>BA may be undefined, of another size, or the same size with different entries</i>
Không có luật giản ước <i>No cancellation law</i>	$AB = O$ không suy ra $A = O$ hoặc $B = O$ <i>$AB = O$ does not imply $A = O$ or $B = O$</i>	$AB = AC$ không suy ra $B = C$ khi A không khả nghịch <i>$AB = AC$ does not give $B = C$ unless A is invertible</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — P có các dòng (1; 2), (0; 1); Q có các dòng (1; 0), (3; 1). PQ có các dòng (1 + 6; 0 + 2), (0 + 3; 0 + 1) = (7; 2), (3; 1). QP có các dòng (1; 2), (3; 6 + 1) = (1; 2), (3; 7). Cả hai đều cỡ 2×2 nhưng $PQ \neq QP$. Trong ví dụ Hoàng Mai, $A \cdot p$ có nghĩa (doanh thu), còn $p \cdot A$ không xác định vì p cỡ 3×1 , A cỡ 2×3 .

P has rows (1; 2), (0; 1); Q has rows (1; 0), (3; 1). PQ has rows (1 + 6; 0 + 2), (0 + 3; 0 + 1) = (7; 2), (3; 1). QP has rows (1; 2), (3; 6 + 1) = (1; 2), (3; 7). Both are 2×2 but $PQ \neq QP$. In the Hoàng Mai example $A \cdot p$ is meaningful (revenue), while $p \cdot A$ is undefined because p is 3×1 and A is 2×3 .

VÍ DỤ / EXAMPLE — Không có luật giản ước: E có các dòng (1; 2), (2; 4); F có các dòng (2; -4), (-1; 2). EF có các dòng (2 - 2; -4 + 4), (4 - 4; -8 + 8) = (0; 0), (0; 0), tức $EF = O$ dù $E \neq O$ và $F \neq O$. Với số thực, $ab = 0$ kéo theo $a = 0$ hoặc $b = 0$; với ma trận thì không.

No cancellation law: E has rows (1; 2), (2; 4); F has rows (2; -4), (-1; 2). EF has rows (2 - 2; -4 + 4), (4 - 4; -8 + 8) = (0; 0), (0; 0), so $EF = O$ although $E \neq O$ and $F \neq O$. For real numbers $ab = 0$ forces $a = 0$ or $b = 0$; for matrices it does not.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Nhân sai thứ tự. Sinh viên viết $p \cdot A$ thay cho $A \cdot p$, hoặc khai triển $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Đúng: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; chỉ rút gọn thành $2AB$ khi biết chắc $AB = BA$. Trước mỗi phép nhân, viết cỡ hai ma trận ra lề để kiểm.

Multiplying in the wrong order. Students write $p \cdot A$ instead of $A \cdot p$, or expand $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Correct: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; it reduces to $2AB$ only when $AB = BA$ is known. Before every product, write both sizes in the margin and check.

Ma trận chuyển vị — *The transpose*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Chuyển vị của A cỡ $m \times n$ là ma trận A^T cỡ $n \times m$ có được bằng cách đổi dòng thành cột: phần tử dòng i cột j của A^T là a_{ji} . Tính chất: $(A^T)^T = A$; $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(kA)^T = kA^T$; $(AB)^T = B^T A^T$.

The **transpose** of an $m \times n$ matrix A is the $n \times m$ matrix A^T obtained by turning rows into columns: the entry in row i , column j of A^T is a_{ji} . Properties: $(A^T)^T = A$; $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(kA)^T = kA^T$; $(AB)^T = B^T A^T$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 120 & 90 \\ 80 & 110 \\ 50 & 60 \end{bmatrix} \quad (\text{dòng: sản phẩm; cột: cửa hàng})$$

Chuyển vị ma trận doanh số A đổi cách nhìn: dòng là sản phẩm, cột là cửa hàng. Với vector dòng $u = (1; 1)$ thì $u \cdot A = (210; 190; 110)$ là tổng số hộp mỗi sản phẩm của cả hai cửa hàng trong tháng 9; cùng kết quả đó viết theo cột là $A^T \cdot u^T$.

Transposing the sales matrix A changes the viewpoint: rows become products, columns become shops. With the row vector $u = (1; 1)$, $u \cdot A = (210; 190; 110)$ is the September total of each product over both shops; the same result in column form is $A^T \cdot u^T$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $(AB)^T = A^T B^T$. Thử với A cỡ 2×3 , B cỡ 3×4 : A^T cỡ 3×2 và B^T cỡ 4×3 nên $A^T B^T$ không nhân được, trong khi $B^T A^T$ cỡ 4×2 đúng bằng cỡ của $(AB)^T$. Chuyển vị một tích thì **đảo thứ tự**.

*Writing $(AB)^T = A^T B^T$. Try A 2×3 and B 3×4 : A^T is 3×2 and B^T is 4×3 , so $A^T B^T$ is undefined, whereas $B^T A^T$ is 4×2 , exactly the size of $(AB)^T$. Transposing a product **reverses the order**.*

Lũy thừa ma trận vuông: ma trận chuyển dịch thị phần — *Powers of a square matrix: a market-share transition matrix*

Với A vuông, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, ...; quy ước $A^0 = I$. Lũy thừa chỉ định nghĩa cho ma trận vuông. Ứng dụng quen thuộc là ma trận chuyển dịch: phần tử p_{ij} là tỉ lệ khách hàng đang dùng hãng i chuyển sang hãng j sau một kỳ; mỗi dòng có tổng bằng 1.

For square A , $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, ..., with $A^0 = I$. Powers are defined only for square matrices. A familiar application is the transition matrix: p_{ij} is the share of customers of firm i who move to firm j after one period; each row sums to 1.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Hai ví điện tử X và Y chia nhau thị trường thanh toán của một thành phố, mỗi ví đang giữ 50% người dùng: $x_0 = (0,5; 0,5)$. Sau mỗi quý, X giữ lại 80% người dùng của mình (20% sang Y); Y giữ lại 70% (30% sang X). Thị phần sau một quý: $x_1 = x_0 P = (0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,3; 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,7) = (0,55; 0,45)$. Sau hai quý: $x_2 = x_0 P^2 = (0,575; 0,425)$. Ví X tăng từ 50% lên 57,5%.

Two e-wallets X and Y share a city's payments market, each with 50% of users: $x_0 = (0.5; 0.5)$. Each quarter X keeps 80% of its users (20% move to Y) and Y keeps 70% (30% move to X). Shares after one quarter: $x_1 = x_0 P = (0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.3; 0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.7) = (0.55; 0.45)$. After two quarters: $x_2 = x_0 P^2 = (0.575; 0.425)$. Wallet X rises from 50% to 57.5%.

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \Rightarrow P^2 = [(0,7; 0,3), (0,45; 0,55)]$$

Phần tử (1; 2) của P^2 bằng $0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,3$: sau hai quý, 30% người dùng ban đầu của X đang dùng Y (gồm người chuyển ngay quý đầu và ở lại Y, cộng người ở lại X quý đầu rồi chuyển sang Y quý sau).

Entry (1; 2) of P^2 is $0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.3$: after two quarters, 30% of X's original users are on Y (those who switched in the first quarter and stayed, plus those who stayed with X and then switched).

1.3. Định thức — Determinants

Định thức cấp 2 và cấp 3 — Determinants of order 2 and 3

Mỗi ma trận **vuông** A được gán với một số gọi là **định thức**, ký hiệu $\det A$ hoặc $|A|$. Ma trận không vuông không có định thức. Định thức cho biết ma trận có khả nghịch hay không (mục 1.4) và hệ phương trình tương ứng có nghiệm duy nhất hay không (Chương 2).

*Every square matrix A has an associated number called its **determinant**, written $\det A$ or $|A|$. Non-square matrices have no determinant. The determinant tells whether the matrix is invertible (Section 1.4) and whether the corresponding linear system has a unique solution (Chapter 2).*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Cấp 2: tích đường chéo chính trừ tích đường chéo phụ. Cấp 3 (**quy tắc Sarrus**): chép thêm cột 1 và cột 2 sang bên phải, cộng ba tích theo đường chéo xuống, trừ ba tích theo đường chéo lên. **Sarrus chỉ dùng cho cấp 3.**

*Order 2: product of the main diagonal minus product of the other diagonal. Order 3 (**Sarrus' rule**): copy columns 1 and 2 to the right, add the three downward diagonal products and subtract the three upward ones. **Sarrus' rule works only for order 3.***

$$\det [(a; b), (c; d)] = ad - bc \quad (1.4)$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1.5)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Cấp 2: ma trận có các dòng (5; -3), (2; 4) có định thức $5 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 20 + 6 = 26$.

Order 2: the matrix with rows (5; -3), (2; 4) has determinant $5 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 20 + 6 = 26$.

Cấp 3: tính $\det A$ với A dưới đây bằng quy tắc Sarrus.

Order 3: compute $\det A$ for the matrix A below by Sarrus' rule.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -41$$

Ba tích cộng (chéo xuống) <i>Three added products (downward)</i>	Ba tích trừ (chéo lên) <i>Three subtracted products (upward)</i>
$a_{11}a_{22}a_{33} = 2 \cdot 0 \cdot 5 = 0$	$a_{13}a_{22}a_{31} = (-1) \cdot 0 \cdot 1 = 0$

Ba tích cộng (chéo xuống) <i>Three added products (downward)</i>	Ba tích trừ (chéo lên) <i>Three subtracted products (upward)</i>
$a_{12}a_{23}a_{31} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$	$a_{11}a_{23}a_{32} = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$
$a_{13}a_{21}a_{32} = (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -12$	$a_{12}a_{21}a_{33} = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$
Tổng: $0 + 2 - 12 = -10$ <i>Sum: $0 + 2 - 12 = -10$</i>	Tổng: $0 + 16 + 15 = 31$ <i>Sum: $0 + 16 + 15 = 31$</i>

$$\det A = -10 - 31 = -41.$$

$$\det A = -10 - 31 = -41.$$

Định thức con, phần bù đại số và khai triển Laplace — *Minors, cofactors and Laplace expansion*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Xóa dòng i và cột j của A (vuông cấp n), định thức cấp $n - 1$ còn lại là **định thức con** M_{ij} . **Phần bù đại số** $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. **Khai triển Laplace**: $\det A$ bằng tổng các phần tử của một dòng (hoặc một cột) bất kỳ nhân với phần bù đại số tương ứng.

*Deleting row i and column j of an $n \times n$ matrix A leaves an $(n - 1)$ -order determinant, the **minor** M_{ij} . The **cofactor** is $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. **Laplace expansion**: $\det A$ is the sum of the entries of any one row (or column) times their cofactors.*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \quad (1.6)$$

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (\text{theo dòng } i) \quad (1.7)$$

Dấu $(-1)^{i+j}$ xếp theo bàn cờ, bắt đầu bằng dấu cộng ở góc trên trái. Nên chọn dòng hoặc cột có nhiều số 0 nhất để khai triển.

The signs $(-1)^{i+j}$ follow a chessboard pattern starting with plus in the top-left corner. Expand along the row or column with the most zeros.

$$\text{Dấu: } \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ma trận B có các dòng $(3; 0; 2)$, $(1; -2; 4)$, $(5; 0; 1)$. Cột 2 có hai số 0 nên khai triển theo cột 2: chỉ còn số hạng $b_{22} = -2$ ở vị trí $(2; 2)$, dấu $(-1)^4 = +$. Xóa dòng 2, cột 2 còn định thức con có các dòng $(3; 2)$, $(5; 1)$, bằng $3 - 10 = -7$. Vậy $\det B = (-2) \cdot (+1) \cdot (-7) = 14$.

Matrix B has rows $(3; 0; 2)$, $(1; -2; 4)$, $(5; 0; 1)$. Column 2 has two zeros, so expand along column 2: only $b_{22} = -2$ at position $(2; 2)$ remains, sign $(-1)^4 = +$. Deleting row 2 and column 2 leaves the minor with rows $(3; 2)$, $(5; 1)$, equal to $3 - 10 = -7$. Hence $\det B = (-2) \cdot (+1) \cdot (-7) = 14$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên dấu $(-1)^{i+j}$: lấy thẳng định thức con M_{ij} làm phần bù đại số. Lỗi này chỉ lộ ra ở các vị trí $i + j$ lẻ — ví dụ $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(2; 3)$ — nên kết quả sai mà sinh viên khó tự phát hiện. Ghi bảng dấu bàn cờ ra nháp trước khi khai triển.

Forgetting the sign $(-1)^{i+j}$ and using the minor M_{ij} as the cofactor. The error only shows at positions

with $i + j$ odd — for example $(1; 2), (2; 1), (2; 3)$ — so the result is wrong in a way that is hard to spot. Write the chessboard of signs on scrap paper before expanding.

Tính chất của định thức — Properties of determinants

Thao tác hoặc tình huống <i>Operation or situation</i>	Ảnh hưởng tới định thức <i>Effect on the determinant</i>
Chuyển vị: $\det A^T$ <i>Transpose: $\det A^T$</i>	Không đổi: $\det A^T = \det A$; mọi tính chất về dòng đúng cả cho cột <i>Unchanged: $\det A^T = \det A$; every row property also holds for columns</i>
Đổi chỗ hai dòng <i>Swapping two rows</i>	Đổi dấu <i>Changes sign</i>
Nhân một dòng với số k <i>Multiplying one row by k</i>	Định thức nhân với k ; ngược lại, thừa số chung của một dòng được đưa ra ngoài <i>The determinant is multiplied by k; conversely, a common factor of a row can be taken out</i>
Nhân cả ma trận cấp n với k <i>Multiplying the whole $n \times n$ matrix by k</i>	$\det(kA) = k^n \cdot \det A$ (mỗi dòng góp một thừa số k) <i>$\det(kA) = k^n \cdot \det A$ (each row contributes a factor k)</i>
Cộng vào một dòng bội của dòng khác <i>Adding a multiple of one row to another</i>	Không đổi — phép biến đổi dùng để khử về tam giác <i>Unchanged</i> — the operation used to reduce to triangular form
Có một dòng toàn 0, hoặc hai dòng tỉ lệ <i>A zero row, or two proportional rows</i>	$\det A = 0$
Ma trận tam giác (hoặc chéo) <i>Triangular (or diagonal) matrix</i>	$\det A$ bằng tích các phần tử trên đường chéo chính <i>$\det A$ is the product of the diagonal entries</i>
Tích hai ma trận vuông cùng cấp <i>Product of two square matrices of the same order</i>	$\det(AB) = \det A \cdot \det B$; nhưng nói chung $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ <i>$\det(AB) = \det A \cdot \det B$; but in general $\det(A + B) \neq \det A + \det B$</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ma trận D có các dòng $(2; 4; 6), (1; 3; 5), (0; 2; 7)$. Dòng 1 có thừa số chung 2: $\det D = 2 \cdot \det$ của ma trận có các dòng $(1; 2; 3), (1; 3; 5), (0; 2; 7)$. Lấy dòng 2 trừ dòng 1 được $(0; 1; 2)$; khai triển theo cột 1 còn định thức con có các dòng $(1; 2), (2; 7)$, bằng $7 - 4 = 3$. Vậy $\det D = 2 \cdot 3 = 6$. Với A cấp 3 ở trên ($\det A = -41$): $\det A^T = -41$; $\det(2A) = 2^3 \cdot (-41) = -328$.

Matrix D has rows $(2; 4; 6), (1; 3; 5), (0; 2; 7)$. Row 1 has the common factor 2: $\det D = 2 \cdot \det$ of the matrix with rows $(1; 2; 3), (1; 3; 5), (0; 2; 7)$. Row 2 minus row 1 gives $(0; 1; 2)$; expanding along column 1 leaves the minor with rows $(1; 2), (2; 7)$, equal to $7 - 4 = 3$. So $\det D = 2 \cdot 3 = 6$. For the order-3 matrix A above ($\det A = -41$): $\det A^T = -41$; $\det(2A) = 2^3 \cdot (-41) = -328$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $\det(2A) = 2 \cdot \det A$. Hệ số k đưa ra ngoài **từng dòng**, nên ma trận cấp n cho k^n . Lỗi ngược lại cũng hay gặp: khi khử dòng, sinh viên làm “dòng 2 nhân 3 rồi trừ dòng 1” (thay d_2 bằng $3d_2 - d_1$) mà quên rằng định thức đã bị nhân 3. Chỉ phép “ $d_2 + k \cdot d_1$ ” mới giữ nguyên định thức.

*Writing $\det(2A) = 2 \cdot \det A$. The factor k comes out of **each row**, so an order- n matrix gives k^n . The reverse error is also common: when eliminating, students replace r_2 by $3r_2 - r_1$ and forget that the determinant has been multiplied by 3. Only “ $r_2 + k \cdot r_1$ ” leaves the determinant unchanged.*

Tính định thức bằng cách đưa về dạng tam giác — *Computing determinants by reduction to triangular form*

Với cấp 4 trở lên, khai triển Laplace đơn thuần dẫn tới nhiều định thức con. Cách nhanh: dùng phép “cộng bội của dòng này vào dòng khác” để tạo số 0 dưới đường chéo; mỗi lần đổi chỗ hai dòng thì ghi một dấu trừ; cuối cùng nhân các phần tử chéo.

From order 4 upwards, plain Laplace expansion produces many minors. Faster: use “add a multiple of one row to another” to create zeros below the diagonal; record a minus sign for every row swap; finally multiply the diagonal entries.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tính lại $\det A = -41$ (A có các dòng $(2; 1; -1)$, $(3; 0; 2)$, $(1; 4; 5)$) bằng khử dòng. Đổi chỗ dòng 1 và dòng 3 để có phần tử dẫn bằng 1 (một dấu trừ): $(1; 4; 5)$, $(3; 0; 2)$, $(2; 1; -1)$. $d_2 - 3d_1 = (0; -12; -13)$; $d_3 - 2d_1 = (0; -7; -11)$. $\det A = -[1 \cdot ((-12)(-11) - (-13)(-7))] = -(132 - 91) = -41$, khớp với Sarrus.

Recompute $\det A = -41$ (A has rows $(2; 1; -1)$, $(3; 0; 2)$, $(1; 4; 5)$) by elimination. Swap rows 1 and 3 to get a leading 1 (one minus sign): $(1; 4; 5)$, $(3; 0; 2)$, $(2; 1; -1)$. $r_2 - 3r_1 = (0; -12; -13)$; $r_3 - 2r_1 = (0; -7; -11)$. $\det A = -[1 \cdot ((-12)(-11) - (-13)(-7))] = -(132 - 91) = -41$, matching Sarrus.

Định thức cấp 4: tính $\det C$ với C dưới đây.

Order 4: compute $\det C$ for the matrix C below.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det C = 15$$

1. Khử cột 1: $d_2 - 2d_1 = (0; 3; -1; 1)$; $d_4 - d_1 = (0; 3; -2; 3)$; dòng 3 đã có số 0 ở cột 1.

Định thức không đổi.

Clear column 1: $r_2 - 2r_1 = (0; 3; -1; 1)$; $r_4 - r_1 = (0; 3; -2; 3)$; row 3 already has 0 in column 1. The determinant is unchanged.

2. Khử cột 2 bằng dòng 2 mới (phần tử dẫn 3): $d_3 - d_2 = (0; 0; 2; 1)$; $d_4 - d_2 = (0; 0; -1; 2)$.

Clear column 2 with the new row 2 (pivot 3): $r_3 - r_2 = (0; 0; 2; 1)$; $r_4 - r_2 = (0; 0; -1; 2)$.

3. Để tránh phân số, đổi chỗ dòng 3 và dòng 4 (một dấu trừ): $(0; 0; -1; 2)$, $(0; 0; 2; 1)$.

Rồi $d_4 + 2d_3 = (0; 0; 0; 5)$.

To avoid fractions, swap rows 3 and 4 (one minus sign): $(0; 0; -1; 2)$, $(0; 0; 2; 1)$. Then $r_4 + 2r_3 = (0; 0; 0; 5)$.

4. Ma trận tam giác có đường chéo 1; 3; -1; 5. $\det C = -[1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5] = -(-15) = 15$.
The triangular matrix has diagonal 1, 3, -1, 5. $\det C = -[1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5] = -(-15) = 15$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên đổi dấu khi hoán vị dòng. Ở bước 3 nếu bỏ sót dấu trừ, kết quả thành -15. Cách phòng: mỗi lần đổi chỗ hai dòng, viết ngay dấu “-” trước định thức trên nháp; cuối bài đếm số dấu trừ (chẵn thì giữ dấu, lẻ thì đổi dấu). Cũng không được dùng Sarrus cho ma trận cấp 4: không có “quy tắc đường chéo” cho cấp 4.
Forgetting the sign change on a row swap. Missing the minus in step 3 gives -15. Prevention: each time two rows are swapped, write “-” in front of the determinant at once; at the end count the minus signs (even: keep the sign, odd: change it). Nor may Sarrus’ rule be used for order 4: there is no “diagonal rule” for order 4.

Ma trận cần tính <i>Matrix</i>	Cách nên dùng <i>Recommended method</i>	Lý do <i>Reason</i>
Cấp 2 <i>Order 2</i>	$ad - bc$	Một phép trừ <i>One subtraction</i>
Cấp 3, số nhỏ <i>Order 3, small entries</i>	Sarrus <i>Sarrus’ rule</i>	Sáu tích, không cần biến đổi <i>Six products, no row operations</i>
Có dòng hoặc cột nhiều số 0 <i>A row or column with many zeros</i>	Khai triển Laplace theo dòng (cột) đó <i>Laplace expansion along that row (column)</i>	Số hạng chứa phần tử 0 bị triệt tiêu <i>Terms with zero entries vanish</i>
Cấp 4 trở lên <i>Order 4 and above</i>	Khử về tam giác, hoặc khử một cột rồi Laplace <i>Reduce to triangular form, or clear one column then expand</i>	Laplace thuần cấp 4 cần 4 định thức cấp 3 <i>Plain Laplace at order 4 needs four order-3 determinants</i>
Chứa tham số <i>Contains a parameter</i>	Biến đổi để gom tham số vào một dòng, rồi Laplace <i>Use row operations to isolate the parameter, then expand</i>	Tránh chia cho biểu thức có thể bằng 0 <i>Avoids dividing by an expression that may be zero</i>

1.4. Ma trận nghịch đảo — *The inverse matrix*

Định nghĩa và điều kiện tồn tại — *Definition and existence*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ma trận vuông A cấp n **khả nghịch** nếu có ma trận B cùng cấp sao cho $AB = BA = I_n$; khi đó B là duy nhất, ký hiệu A^{-1} . **A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0$** . Ma trận có $\det A = 0$ gọi là **suy biến**.
*A square matrix A of order n is **invertible** if there is a matrix B of the same order with $AB = BA = I_n$; B is then unique and written A^{-1} . **A is invertible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$** . A matrix with $\det A = 0$ is called **singular**.*

Công thức qua ma trận phụ hợp: lập ma trận các phần bù đại số A_{ij} , **chuyển vị** nó được ma trận phụ hợp $\text{adj } A$, rồi chia cho $\det A$.

*Formula via the adjugate: form the matrix of cofactors A_{ij} , **transpose** it to get the adjugate $\text{adj } A$, then divide by $\det A$.*

$$A^{-1} = (1/\det A) \cdot \text{adj } A, \quad \text{adj } A = (A_{ij})^T \quad (1.8)$$

$$[(a; b), (c; d)]^{-1} = (1/(ad - bc)) \cdot [(d; -b), (-c; a)] \quad (1.9)$$

Với cấp 2: đổi chỗ hai phần tử trên đường chéo chính, đổi dấu hai phần tử trên đường chéo phụ, chia cho định thức.

For order 2: swap the two main-diagonal entries, change the sign of the two off-diagonal entries, divide by the determinant.

VÍ DỤ / EXAMPLE — A có các dòng (3; 5), (1; 2). $\det A = 6 - 5 = 1$. A^{-1} có các dòng (2; -5), (-1; 3). Thử lại: dòng 1 của A nhân cột 1 của A^{-1} : $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$; dòng 1 nhân cột 2: $3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 = 0$; tương tự cho dòng 2, được I_2 .

A has rows (3; 5), (1; 2). $\det A = 6 - 5 = 1$. A^{-1} has rows (2; -5), (-1; 3). Check: row 1 of A times column 1 of A^{-1} : $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$; row 1 times column 2: $3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 = 0$; similarly for row 2, giving I_2 .

Tìm nghịch đảo cấp 3 bằng ma trận phụ hợp — *Inverting an order-3 matrix with the adjugate*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1$$

1. Định thức (Sarrus): $8 + 9 + 4 - 6 - 8 - 6 = 1 \neq 0$, A khả nghịch.

Determinant (Sarrus): $8 + 9 + 4 - 6 - 8 - 6 = 1 \neq 0$, so A is invertible.

2. Chín phần bù đại số, có dấu bàn cờ, ghi trong bảng dưới.

The nine cofactors, with chessboard signs, are listed in the table below.

Vị trí Position	Định thức con M_{ij} Minor M_{ij}	Dấu Sign	Phần bù A_{ij} Cofactor A_{ij}
(1; 1)	$2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$	+	0
(1; 2)	$1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -1$	−	1
(1; 3)	$1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$	+	−2
(2; 1)	$3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2$	−	−2
(2; 2)	$2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$	+	1
(2; 3)	$2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1$	−	1
(3; 1)	$3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$	+	1
(3; 2)	$2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$	−	−1
(3; 3)	$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$	+	1

3. Ma trận phần bù đại số có các dòng (0; 1; -2), (-2; 1; 1), (1; -1; 1). **Chuyển vị** để được adj A có các dòng (0; -2; 1), (1; 1; -1), (-2; 1; 1). Chia cho $\det A = 1$:
The cofactor matrix has rows (0; 1; -2), (-2; 1; 1), (1; -1; 1). Transpose it to get adj A with rows (0; -2; 1), (1; 1; -1), (-2; 1; 1). Divide by $\det A = 1$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Thử lại một phần tử: dòng 2 của A nhân cột 2 của A^{-1} : $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, đúng phần tử (2; 2) của I_3 . Nên thử đủ ít nhất một dòng.
Check one entry: row 2 of A times column 2 of A^{-1} : $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, the (2; 2) entry of I_3 . Check at least one full row.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên chuyển vị ma trận phần bù đại số. Nếu đặt thẳng A_{ij} vào vị trí (i; j), với ví dụ trên ta được ma trận có các dòng (0; 1; -2), (-2; 1; 1), (1; -1; 1) — sai. Phần bù đại số của **dòng i** nằm ở **cột i** của adj A. Với ma trận đối xứng lỗi này không lộ, nên luyện trên ma trận không đối xứng.

*Forgetting to transpose the cofactor matrix. Putting A_{ij} straight into position (i; j) gives, in the example above, the matrix with rows (0; 1; -2), (-2; 1; 1), (1; -1; 1) — wrong. The cofactors of **row i** go into **column i** of adj A. With a symmetric matrix the mistake does not show, so practise on non-symmetric ones.*

Tìm nghịch đảo bằng phương pháp Gauss–Jordan — *Inverting by Gauss–Jordan elimination*

Lập ma trận mở rộng $[A | I]$ rồi chỉ dùng **phép biến đổi sơ cấp trên dòng** (đổi chỗ hai dòng; nhân một dòng với số khác 0; cộng vào một dòng bội của dòng khác) đưa nửa trái về I. Khi đó nửa phải là A^{-1} . Nếu nửa trái xuất hiện một dòng toàn 0 thì A suy biến.

*Form the augmented matrix $[A | I]$ and use only **elementary row operations** (swap two rows; multiply a row by a non-zero number; add a multiple of one row to another) to turn the left half into I. The right half is then A^{-1} . If a zero row appears on the left, A is singular.*

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- $d_2 - 2d_1$: (0; 1; -1 | -2; 1; 0). $d_3 - d_1$: (0; 1; 0 | -1; 0; 1).
 $r_2 - 2r_1$: (0; 1; -1 | -2; 1; 0). $r_3 - r_1$: (0; 1; 0 | -1; 0; 1).
- $d_3 - d_2$: (0; 0; 1 | 1; -1; 1). Nửa trái đã có dạng tam giác trên với đường chéo 1; 1; 1, nên $\det A = 1$.
 $r_3 - r_2$: (0; 0; 1 | 1; -1; 1). The left half is now upper triangular with diagonal 1, 1, 1, so $\det A = 1$.
- Khử ngược lên: $d_2 + d_3$: (0; 1; 0 | -1; 0; 1). $d_1 - 2d_3$: (1; 1; 0 | -1; 2; -2). $d_1 - d_2$: (1; 0; 0 | 0; 2; -3).

Eliminate upwards: $r_2 + r_3$: $(0; 1; 0 \mid -1; 0; 1)$. $r_1 - 2r_3$: $(1; 1; 0 \mid -1; 2; -2)$. $r_1 - r_2$: $(1; 0; 0 \mid 0; 2; -3)$.

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Tiêu chí <i>Criterion</i>	Ma trận phụ hợp <i>Adjugate</i>	Gauss–Jordan
Phù hợp <i>Best for</i>	Cấp 2, cấp 3; ma trận chứa tham số <i>Order 2 or 3; matrices with parameters</i>	Cấp 3 trở lên, số cụ thể <i>Order 3 and above, numeric entries</i>
Số phép tính cấp 3 <i>Work for order 3</i>	1 định thức cấp 3 + 9 định thức cấp 2 <i>One order-3 and nine order-2 determinants</i>	Khoảng 6–9 phép biến đổi dòng <i>About 6–9 row operations</i>
Lỗi hay gặp <i>Typical slip</i>	Sai dấu bàn cờ, quên chuyển vị <i>Wrong chessboard sign, no transpose</i>	Biến đổi trên cột hoặc chỉ biến đổi nửa trái <i>Using column operations or changing only the left half</i>
Tự kiểm <i>Self-check</i>	Nhân $A \cdot A^{-1}$ một dòng <i>Multiply one row of $A \cdot A^{-1}$</i>	Như bên trái <i>Same as the left</i>

Ma trận chứa tham số: khi nào khả nghịch — *Matrices with a parameter: when is the inverse defined*

Tìm m để ma trận $K(m)$ dưới đây khả nghịch, rồi tìm nghịch đảo khi $m = 0$.

Find m for which the matrix $K(m)$ below is invertible, then find the inverse when $m = 0$.

$$K(m) = \begin{bmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Khai triển theo dòng 1: $\det K = 1 \cdot (2 - 6) - m \cdot (4 - 3) + 1 \cdot (4 - 1) = -4 - m + 3 = -1 - m$.

Expand along row 1: $\det K = 1 \cdot (2 - 6) - m \cdot (4 - 3) + 1 \cdot (4 - 1) = -4 - m + 3 = -1 - m$.

2. K khả nghịch $\Leftrightarrow -1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Khi $m = -1$ không cần tìm quan hệ tuyến tính giữa các dòng; $\det K = 0$ đủ để kết luận K suy biến.

K is invertible $\Leftrightarrow -1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. When $m = -1$ there is no need to find the linear relation between the rows; $\det K = 0$ is enough to conclude that K is singular.

3. $m = 0$: $\det K = -1$. Phần bù đại số dòng 1: $A_{11} = -4$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = 3$; dòng 2: $A_{21} = 2$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$; dòng 3: $A_{31} = -1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 1$. Chuyển vị rồi chia cho -1 : $m = 0$: $\det K = -1$. *Cofactors of row 1: $A_{11} = -4$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = 3$; row 2: $A_{21} = 2$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$; row 3: $A_{31} = -1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 1$. Transpose and divide by -1 :*

$$K(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Thử lại dòng 1 của $K(0)$ là $(1; 0; 1)$ nhân với ba cột: $4 - 3 = 1$; $-2 + 2 = 0$; $1 - 1 = 0$, đúng dòng 1 của I_3 . Lưu ý $\det K = -1$ âm nên mọi phần tử của $\text{adj } K$ đổi dấu khi chia.

Check: row 1 of $K(0)$, $(1; 0; 1)$, times the three columns: $4 - 3 = 1$; $-2 + 2 = 0$; $1 - 1 = 0$, the first row of I_3 . Note $\det K = -1$ is negative, so every entry of $\text{adj } K$ changes sign on division.

Tính chất và phương trình ma trận — Properties and matrix equations

PHẢI THUỘC / MEMORISE — $(A^{-1})^{-1} = A$; $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$ với $k \neq 0$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. Phương trình $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (nhân A^{-1} bên trái); $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$ (nhân A^{-1} bên phải).

$(A^{-1})^{-1} = A$; $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$ for $k \neq 0$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. The equation $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (multiply by A^{-1} on the left); $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$ (multiply by A^{-1} on the right).

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B; \quad XA = B \Rightarrow X = BA^{-1} \quad (1.10)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Một siêu thị mini nhập hai loại hàng theo thùng. Đơn 1: 3 thùng loại I và 5 thùng loại II, trả 2.100 nghìn đồng; đơn 2: 1 thùng loại I và 2 thùng loại II, trả 800 nghìn đồng. Viết $A \cdot p = t$ với A có các dòng $(3; 5)$, $(1; 2)$ và $t = (2.100; 800)^T$. Dùng A^{-1} ở ví dụ trước: $p = A^{-1}t = (2 \cdot 2.100 - 5 \cdot 800; -2.100 + 3 \cdot 800) = (200; 300)$. Đơn giá: loại I 200, loại II 300 nghìn đồng/thùng.

A minimart buys two goods by the carton. Order 1: 3 cartons of type I and 5 of type II for 2,100 thousand VND; order 2: 1 carton of type I and 2 of type II for 800 thousand VND. Write $A \cdot p = t$ with A having rows $(3; 5)$, $(1; 2)$ and $t = (2,100; 800)^T$. Using A^{-1} from the previous example: $p = A^{-1}t = (2 \cdot 2,100 - 5 \cdot 800; -2,100 + 3 \cdot 800) = (200; 300)$. Prices: type I 200, type II 300 thousand VND per carton.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Phương trình $XA = B$ với A có các dòng $(3; 5)$, $(1; 2)$ và B có các dòng $(4; 7)$, $(1; 3)$. $X = BA^{-1}$ có các dòng $(4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1); 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 3) = (1; 1)$ và $(1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1); 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 3) = (-1; 4)$. Nếu viết nhầm $X = A^{-1}B$ sẽ ra ma trận có các dòng $(3; -1)$, $(-1; 2)$ — khác hẳn; thử lại $(3; -1)$, $(-1; 2)$ nhân A không ra B .

The equation $XA = B$ with A having rows $(3; 5)$, $(1; 2)$ and B rows $(4; 7)$, $(1; 3)$. $X = BA^{-1}$ has rows $(4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1); 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 3) = (1; 1)$ and $(1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1); 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 3) = (-1; 4)$. Writing $X = A^{-1}B$ by mistake gives the matrix with rows $(3; -1)$, $(-1; 2)$ — quite different; multiplying it by A does not give B .

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — “Chia hai vế cho A”. Ma trận không có phép chia; phải nói rõ nhân A^{-1} bên trái hay bên phải, và thứ tự đó quyết định đáp số. Cũng sai khi viết $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$: nghịch đảo của tích đảo thứ tự, giống chuyển vị.

“Dividing both sides by A”. Matrices cannot be divided; say explicitly whether A^{-1} multiplies on the left or on the right, as the order decides the answer. Writing $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ is also wrong: the inverse of a product reverses the order, as the transpose does.

1.5. Hạng của ma trận — The rank of a matrix

Định nghĩa và ma trận bậc thang — Definition and echelon form

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$, là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 lập từ A. Tương đương: $r(A)$ là số dòng khác 0 của ma trận **bậc thang** nhận được từ A bằng các phép biến đổi sơ cấp (phép biến đổi sơ cấp không làm đổi hạng).

Với A cỡ $m \times n$: $0 \leq r(A) \leq \min(m; n)$; A vuông cấp n có $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

*The **rank** of A, written $r(A)$, is the highest order of a non-zero minor of A. Equivalently, $r(A)$ is the number of non-zero rows of the **echelon form** obtained from A by elementary operations (elementary operations do not change the rank). For an $m \times n$ matrix: $0 \leq r(A) \leq \min(m; n)$; a square matrix of order n has $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.*

Ma trận bậc thang dòng: các dòng toàn 0 (nếu có) nằm dưới cùng; phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi dòng (phần tử dẫn) nằm lệch hẳn sang phải so với phần tử dẫn của dòng trên.

Row echelon form: zero rows (if any) are at the bottom; the first non-zero entry of each row (the pivot) lies strictly to the right of the pivot of the row above.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ bậc thang, } r = 3$$

Cách tìm hạng <i>Method</i>	Thực hiện <i>How</i>	Khi nào dùng <i>When to use</i>
Định thức con <i>Minors</i>	Tìm một định thức con cấp k khác 0, rồi chứng tỏ mọi định thức con cấp k + 1 bằng 0 <i>Find a non-zero minor of order k, then show every minor of order k + 1 is zero</i>	Ma trận nhỏ, ma trận vuông có tham số <i>Small matrices, square matrices with a parameter</i>
Biến đổi sơ cấp <i>Elementary operations</i>	Đưa về bậc thang, đếm số dòng khác 0 <i>Reduce to echelon form, count non-zero rows</i>	Hầu hết các bài; ma trận không vuông <i>Most exercises; non-square matrices</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — Một tập đoàn có bốn phương án sản xuất, mỗi phương án là vector sản lượng của bốn nhà máy (nghìn sản phẩm): $(1; 2; -1; 3)$, $(2; 4; 1; 0)$, $(3; 6; 0; 3)$, $(1; 2; 2; -3)$. Xếp thành ma trận R cỡ 4×4 . $d_2 - 2d_1 = (0; 0; 3; -6)$; $d_3 - 3d_1 = (0; 0; 3; -6)$; $d_4 - d_1 = (0; 0; 3; -6)$. Ba dòng mới trùng nhau, trừ tiếp còn một dòng khác 0. Bậc thang có 2 dòng khác 0: $r(R) = 2$. Ý nghĩa: chỉ có hai phương án độc lập; hai phương án còn lại là tổ hợp của chúng (phương án 3 = phương án 1 + phương án 2; phương án 4 = phương án 2 - phương án 1).

A group has four production plans, each a vector of output at four plants (thousand units): $(1; 2; -1; 3)$, $(2; 4; 1; 0)$, $(3; 6; 0; 3)$, $(1; 2; 2; -3)$. Stack them into the 4×4 matrix R . $r_2 - 2r_1 = (0; 0; 3; -6)$; $r_3 - 3r_1 = (0; 0; 3; -6)$; $r_4 - r_1 = (0; 0; 3; -6)$. The three new rows coincide; subtracting leaves one non-zero row. The echelon form has 2 non-zero rows: $r(R) = 2$. Meaning: only two plans are independent; the other two are combinations of them (plan 3 = plan 1 + plan 2; plan 4 = plan 2 - plan 1).

Biện luận hạng theo tham số — Rank depending on a parameter

$$R(m) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & m & 7 \end{bmatrix}$$

- $d_2 - 2d_1 = (0; 1; 3; -2)$; $d_3 - 3d_1 = (0; 1; m + 3; -2)$.
 $r_2 - 2r_1 = (0; 1; 3; -2)$; $r_3 - 3r_1 = (0; 1; m + 3; -2)$.
- Lấy dòng 3 mới trừ dòng 2 mới: $(0; 0; m; 0)$. Ma trận bậc thang có các dòng $(1; 2; -1; 3)$, $(0; 1; 3; -2)$, $(0; 0; m; 0)$.
New row 3 minus new row 2: $(0; 0; m; 0)$. The echelon form has rows $(1; 2; -1; 3)$, $(0; 1; 3; -2)$, $(0; 0; m; 0)$.
- Kết luận: $m \neq 0$ thì $r(R) = 3$; $m = 0$ thì dòng cuối toàn 0, $r(R) = 2$ (khi đó dòng 3 = dòng 1 + dòng 2).
Conclusion: if $m \neq 0$, $r(R) = 3$; if $m = 0$ the last row is zero and $r(R) = 2$ (then row 3 = row 1 + row 2).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Đếm số dòng khác 0 **trước** khi đưa về bậc thang. Ma trận R ở ví dụ bốn phương án có cả 4 dòng khác 0 nhưng hạng chỉ bằng 2. Một lỗi khác khi biện luận: chia cả dòng cho biểu thức chứa tham số (như m) mà không tách riêng trường hợp biểu thức đó bằng 0.

*Counting non-zero rows **before** reducing to echelon form. Matrix R in the four-plan example has 4 non-zero rows but rank only 2. Another slip in parameter problems: dividing a row by an expression in the parameter (such as m) without treating separately the case where it equals zero.*

1.6. Kiểm bằng máy tính với Python — Checking with Python

Đoạn mã dưới tính lại các ví dụ chính của chương bằng numpy và sympy. numpy tính bằng số thực nên định thức có thể lệch ở chữ số thập phân thứ 13–15; làm tròn trước khi so. sympy tính chính xác bằng phân số, hợp với bài có ma trận nghịch đảo và tham số.

The code below recomputes the chapter's main examples with numpy and sympy. numpy works in floating point, so a determinant may be off in the 13th–15th decimal place; round before comparing. sympy works exactly with fractions, which suits inverses and parameters.

```
import numpy as np
from sympy import Matrix, symbols
B = np.array([[135, 70, 65], [100, 125, 80]]) # doanh so thang 10
p = np.array([45, 30, 120]) # don gia, nghìn dong
print('Doanh thu thang 10:', B @ p)
N = np.array([[4, 1, 3], [2, 1, 2], [6, 2, 5]])
c = np.array([150, 80, 40]); q = np.array([50, 200, 30])
print('Chi phi don vi:', N @ c, '| Tong chi phi:', q @ N @ c)
A = np.array([[2, 1, -1], [3, 0, 2], [1, 4, 5]])
print('det A =', round(np.linalg.det(A), 6))
C = Matrix([[1, -1, 2, 0], [2, 1, 3, 1], [0, 3, 1, 2], [1, 2, 0, 3]])
print('det C =', C.det())
M = Matrix([[2, 3, 1], [1, 2, 1], [3, 4, 2]])
print('Nghich dao:', M.inv().tolist())
P = np.array([[0.8, 0.2], [0.3, 0.7]])
print('Thi phan sau 2 quy:', np.array([0.5, 0.5]) @ np.linalg.matrix_power(P, 2))
m = symbols('m')
R = Matrix([[1, 2, -1, 3], [2, 5, 1, 4], [3, 7, m, 7]])
print('Hang khi m = 0:', R.subs(m, 0).rank(), '| khi m = 1:', R.subs(m, 1).rank())
```

Kết quả in ra:

Printed output:

```
Doanh thu thang 10: [15975 17850]
Chi phi don vi: [ 800  460 1260] | Tong chi phi: 169800
det A = -41.0
det C = 15
Nghich dao: [[0, -2, 1], [1, 1, -1], [-2, 1, 1]]
Thi phan sau 2 quy: [0.575 0.425]
Hang khi m = 0: 2 | khi m = 1: 3
```

VÍ DỤ / EXAMPLE — Cách dùng để tự kiểm: giải bài bằng tay trước, sau đó thay ma trận của bài vào dòng tương ứng (A, C, M hoặc R) và so kết quả. Phép nhân ma trận trong numpy viết bằng toán tử @; dấu sao (phép nhân thông thường) nhân từng phần tử cùng vị trí, không phải phép nhân ma trận.

How to self-check: solve by hand first, then put the exercise's matrix into the matching line (A, C, M or R) and compare. Matrix multiplication in numpy uses the @ operator; the asterisk (ordinary multiplication) multiplies entry by entry and is not matrix multiplication.

1.7. Tổng hợp công thức và thuật ngữ — Summary of formulas and terminology

Bảng tổng hợp công thức — Formula summary

Công thức Formula	Ý nghĩa và điều kiện Meaning and conditions
$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}); kA = (k \cdot a_{ij})$	Cộng, trừ khi cùng cỡ; nhân số vào mọi phần tử — tổng doanh số, kế hoạch tăng k lần <i>Add or subtract matrices of the same size; a scalar multiplies every entry — combined sales, a plan scaled by k</i>

Công thức <i>Formula</i>	Ý nghĩa và điều kiện <i>Meaning and conditions</i>
$c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}; (m \times p) \cdot (p \times n) \rightarrow m \times n$	Dòng nhân cột; doanh thu = số lượng · đơn giá, chi phí = định mức · đơn giá đầu vào <i>Row times column; revenue = quantities · prices, cost = requirements · input prices</i>
$AB \neq BA; (AB)^T = B^T A^T; (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	Không giao hoán; chuyển vị và nghịch đảo của tích đảo thứ tự <i>Not commutative; transpose and inverse of a product reverse the order</i>
$\det [(a; b), (c; d)] = ad - bc$	Định thức cấp 2 <i>Order-2 determinant</i>
Sarrus: 3 tích chéo xuống – 3 tích chéo lên <i>Sarrus: 3 downward products – 3 upward products</i>	Chỉ cho cấp 3 <i>Order 3 only</i>
$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}; \det A = \sum_j a_{ij} A_{ij}$	Khai triển Laplace theo dòng i (hoặc theo cột) <i>Laplace expansion along row i (or a column)</i>
$\det(kA) = k^n \cdot \det A; \det(AB) = \det A \cdot \det B; \det A^T = \det A$	Tính chất định thức (A, B vuông cấp n) <i>Determinant properties (A, B square of order n)</i>
$A^{-1} = \text{adj } A / \det A; \text{adj } A = (A_{ij})^T$	Tồn tại $\Leftrightarrow \det A \neq 0$; nhớ chuyển vị <i>Exists $\Leftrightarrow \det A \neq 0$; remember to transpose</i>
$[A I] \rightarrow [I A^{-1}]$	Gauss–Jordan, chỉ biến đổi dòng <i>Gauss–Jordan, row operations only</i>
$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B; XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$	Suy đơn giá từ hóa đơn, suy đầu vào từ đầu ra <i>Recover prices from invoices, inputs from outputs</i>
$r(A) =$ số dòng khác 0 của dạng bậc thang <i>$r(A) =$ number of non-zero rows in echelon form</i>	Số phương án (vector) độc lập tuyến tính; $r(A) \leq \min(m; n)$ <i>Number of linearly independent plans (vectors); $r(A) \leq \min(m; n)$</i>

Bảng thuật ngữ Việt – Anh — Vietnamese – English glossary

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Ma trận	Matrix	Bảng số m dòng, n cột <i>Array of numbers with m rows and n columns</i>
Phần tử	Entry (element)	Số a_{ij} ở dòng i, cột j <i>The number a_{ij} in row i, column j</i>
Ma trận vuông	Square matrix	Số dòng bằng số cột <i>Rows equal columns</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Ma trận đơn vị	Identity matrix	Chéo, các phần tử chéo bằng 1 <i>Diagonal with ones on the diagonal</i>
Đường chéo chính	Main diagonal	Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ <i>Entries $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$</i>
Ma trận chuyển vị	Transpose	Đổi dòng thành cột <i>Rows turned into columns</i>
Nhân ma trận với số	Scalar multiplication	Nhân số vào mọi phần tử <i>Multiply every entry by a number</i>
Tích ma trận	Matrix product	Dòng nhân cột <i>Row times column</i>
Định thức	Determinant	Số gắn với ma trận vuông <i>Number attached to a square matrix</i>
Định thức con	Minor	Định thức sau khi xóa một dòng, một cột <i>Determinant after deleting a row and a column</i>
Phần bù đại số	Cofactor	$(-1)^{i+j}$ nhân định thức con M_{ij} <i>$(-1)^{i+j}$ times the minor M_{ij}</i>
Khai triển Laplace	Laplace (cofactor) expansion	Tính định thức theo một dòng hoặc cột <i>Determinant along one row or column</i>
Quy tắc Sarrus	Sarrus' rule	Quy tắc đường chéo cho cấp 3 <i>Diagonal rule for order 3</i>
Ma trận khả nghịch	Invertible (non-singular) matrix	Có A^{-1} ; $\det A \neq 0$ <i>Has an inverse; $\det A \neq 0$</i>
Ma trận suy biến	Singular matrix	$\det A = 0$, không có nghịch đảo <i>$\det A = 0$, no inverse</i>
Ma trận nghịch đảo	Inverse matrix	A^{-1} với $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ <i>A^{-1} with $AA^{-1} = A^{-1}A = I$</i>
Ma trận phụ hợp	Adjugate (adjoint) matrix	Chuyển vị của ma trận phần bù đại số <i>Transpose of the cofactor matrix</i>
Phép biến đổi sơ cấp	Elementary row operation	Đổi chỗ, nhân, cộng bội dòng <i>Swap, scale, add a multiple of a row</i>
Ma trận bậc thang	Row echelon form	Dạng bậc thang sau khử <i>Staircase form after elimination</i>
Phần tử dẫn	Pivot	Phần tử khác 0 đầu tiên của dòng <i>First non-zero entry of a row</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hạng ma trận	Rank	Số dòng độc lập tuyến tính <i>Number of linearly independent rows</i>
Ma trận chuyển dịch	Transition matrix	Tỉ lệ chuyển giữa các trạng thái sau một kỳ <i>Shares moving between states in one period</i>
Định mức tiêu hao	Input requirement (input coefficient)	Lượng đầu vào cho một đơn vị sản phẩm <i>Input used per unit of output</i>

1.8. Bài tập vận dụng có lời giải — *Applied exercises with solutions*

Bài 1. Doanh thu và lãi gộp của chuỗi cửa hàng điện gia dụng — *Exercise 1. Revenue and gross profit of a home-appliance chain*

Chuỗi cửa hàng Minh Phát có ba cửa hàng (Quận 3, Bình Thạnh, Thủ Đức) cùng bán ba mặt hàng: nồi cơm điện, quạt đứng, máy xay sinh tố. Số lượng bán trong quý III (cái) xếp thành ma trận Q , mỗi dòng là một cửa hàng, mỗi cột là một mặt hàng: dòng 1 (40; 120; 60), dòng 2 (55; 90; 70), dòng 3 (30; 150; 45). Giá bán lần lượt 1,2; 0,5; 0,8 triệu đồng/cái; giá vốn lần lượt 0,9; 0,35; 0,6 triệu đồng/cái. (a) Tính doanh thu và lãi gộp từng cửa hàng bằng phép nhân ma trận. (b) Tính tổng số lượng bán theo từng mặt hàng. (c) Quý IV dự kiến số lượng bán mọi mặt hàng tăng 20%, giá không đổi; chi phí cố định quý của ba cửa hàng là 25; 28; 22 triệu đồng. Tính lợi nhuận từng cửa hàng quý IV và cho biết cửa hàng nào lãi nhiều nhất.

The Minh Phát chain has three shops (District 3, Bình Thạnh, Thủ Đức) selling three products: rice cookers, standing fans and blenders. Third-quarter unit sales form a matrix Q , one row per shop and one column per product: row 1 (40; 120; 60), row 2 (55; 90; 70), row 3 (30; 150; 45). Selling prices are 1.2, 0.5 and 0.8 million VND per unit; unit costs are 0.9, 0.35 and 0.6 million VND. (a) Use matrix multiplication to find each shop's revenue and gross profit. (b) Find total unit sales of each product. (c) In Q4 unit sales of every product are expected to rise by 20% at unchanged prices; quarterly fixed costs of the three shops are 25, 28 and 22 million VND. Find each shop's Q4 profit and say which shop earns the most.

- Lập dữ liệu: Q là ma trận 3×3 ; vector giá bán $p = (1,2; 0,5; 0,8)^T$; vector giá vốn $c = (0,9; 0,35; 0,6)^T$. Lãi gộp một đơn vị: $g = p - c = (0,3; 0,15; 0,2)^T$ triệu đồng.
Set up the data: Q is 3×3 ; selling-price vector $p = (1.2; 0.5; 0.8)^T$; unit-cost vector $c = (0.9; 0.35; 0.6)^T$. Unit gross margin: $g = p - c = (0.3; 0.15; 0.2)^T$ million VND.
- Doanh thu $R = Q \cdot p$. Dòng 1: $40 \cdot 1,2 + 120 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,8 = 48 + 60 + 48 = 156$.
Dòng 2: $55 \cdot 1,2 + 90 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,8 = 66 + 45 + 56 = 167$. Dòng 3: $30 \cdot 1,2 + 150 \cdot 0,5 + 45 \cdot 0,8 = 36 + 75 + 36 = 147$. Vậy $R = (156; 167; 147)^T$ triệu đồng, tổng 470 triệu đồng.
Revenue $R = Q \cdot p$. Row 1: $40 \cdot 1.2 + 120 \cdot 0.5 + 60 \cdot 0.8 = 48 + 60 + 48 = 156$. Row 2: $55 \cdot 1.2 + 90 \cdot 0.5 + 70 \cdot 0.8 = 66 + 45 + 56 = 167$. Row 3: $30 \cdot 1.2 + 150 \cdot 0.5 + 45 \cdot 0.8 = 36 + 75 + 36 = 147$.

$45 + 56 = 167$. Row 3: $36 + 75 + 36 = 147$. So $R = (156; 167; 147)^T$ million VND, 470 million in total.

3. Lãi gộp $G = Q \cdot g$. Dòng 1: $12 + 18 + 12 = 42$. Dòng 2: $16,5 + 13,5 + 14 = 44$. Dòng 3: $9 + 22,5 + 9 = 40,5$. $G = (42; 44; 40,5)^T$ triệu đồng, tổng 126,5 triệu đồng. Kiểm lại: $Q \cdot p - Q \cdot c = Q \cdot (p - c)$ theo tính chất phân phối.

Gross profit $G = Q \cdot g$. Row 1: $12 + 18 + 12 = 42$. Row 2: $16.5 + 13.5 + 14 = 44$. Row 3: $9 + 22.5 + 9 = 40.5$. $G = (42; 44; 40.5)^T$ million VND, 126.5 million in total. Check: $Q \cdot p - Q \cdot c = Q \cdot (p - c)$ by distributivity.

4. Tổng theo mặt hàng: nhân vector hàng $(1; 1; 1)$ bên trái Q : $(1; 1; 1) \cdot Q = (125; 360; 175)$ — nồi cơm 125 cái, quạt 360 cái, máy xay 175 cái. Vector đứng bên trái vì cần cộng theo cột.

Totals by product: multiply the row vector $(1; 1; 1)$ on the left of Q : $(1; 1; 1) \cdot Q = (125; 360; 175)$ — 125 rice cookers, 360 fans, 175 blenders. The vector goes on the left because the columns are summed.

5. Quý IV: số lượng $1,2Q$ nên lãi gộp $(1,2Q) \cdot g = 1,2G = (50,4; 52,8; 48,6)^T$. Trừ chi phí cố định $F = (25; 28; 22)^T$: lợi nhuận $= 1,2G - F = (25,4; 24,8; 26,6)^T$ triệu đồng, tổng 76,8 triệu đồng.

Q4: quantities $1.2Q$, so gross profit $(1.2Q) \cdot g = 1.2G = (50.4; 52.8; 48.6)^T$. Subtract fixed costs $F = (25; 28; 22)^T$: profit $= 1.2G - F = (25.4; 24.8; 26.6)^T$ million VND, 76.8 million in total.

6. Kết luận: quý III cửa hàng Bình Thạnh có lãi gộp cao nhất (44 triệu đồng), nhưng quý IV sau khi trừ chi phí cố định thì Thủ Đức lãi nhiều nhất (26,6 triệu đồng) nhờ chi phí cố định thấp nhất. So sánh hiệu quả cửa hàng phải dùng lợi nhuận sau chi phí cố định, không dùng doanh thu.

Conclusion: in Q3 Bình Thạnh has the highest gross profit (44 million VND), but in Q4, after fixed costs, Thủ Đức earns the most (26.6 million VND) because its fixed cost is the lowest. Shop performance must be compared on profit after fixed costs, not on revenue.

Bài 2. Suy ra đơn giá nhập từ ba hóa đơn — Exercise 2. Recovering unit prices from three invoices

Đại lý nước giải khát Hưng Thịnh nhập ba mặt hàng: sữa hộp, nước suối, nước ngọt (tính theo thùng) từ một nhà phân phối, đơn giá không đổi trong tháng. Ba hóa đơn trong tháng: hóa đơn 1 gồm 2 thùng sữa, 1 thùng nước suối, 1 thùng nước ngọt, trả 570 nghìn đồng; hóa đơn 2 gồm 2; 2; 1 thùng, trả 630 nghìn đồng; hóa đơn 3 gồm 3; 2; 2 thùng, trả 960 nghìn đồng. (a) Viết bài toán dưới dạng phương trình ma trận. (b) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận số lượng. (c) Tìm đơn giá từng mặt hàng. (d) Hóa đơn thứ tư gồm 4; 5; 3 thùng thì phải trả bao nhiêu?

The Hưng Thịnh beverage dealer buys three items — boxed milk, bottled water and soft drinks (by the carton) — from one distributor at prices fixed for the month. Three invoices: invoice 1 has 2 cartons of milk, 1 of water and 1 of soft drinks, total 570 thousand VND; invoice 2 has 2, 2, 1 cartons, total 630 thousand VND; invoice 3 has 3, 2, 2 cartons, total 960 thousand VND. (a) Write the problem as a matrix equation. (b) Find the inverse of the quantity matrix. (c) Find the unit price of each item. (d) How much does a fourth invoice of 4, 5, 3 cartons cost?

1. Gọi $p = (p_1; p_2; p_3)^T$ là đơn giá (nghìn đồng/thùng). Ma trận số lượng M có các dòng $(2; 1; 1), (2; 2; 1), (3; 2; 2)$; vector tiền $t = (570; 630; 960)^T$. Phương trình: $M \cdot p = t$.
Let $p = (p_1; p_2; p_3)^T$ be unit prices (thousand VND per carton). The quantity matrix M has rows $(2; 1; 1), (2; 2; 1), (3; 2; 2)$; the payment vector is $t = (570; 630; 960)^T$. Equation: $M \cdot p = t$.
2. Định thức theo Sarrus: $\det M = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 3 + 4 - 6 - 4 - 4 = 1 \neq 0$, nên M khả nghịch.
Determinant by Sarrus: $\det M = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = 8 + 3 + 4 - 6 - 4 - 4 = 1 \neq 0$, so M is invertible.
3. Phần bù đại số: $A_{11} = 2, A_{12} = -1, A_{13} = -2; A_{21} = 0, A_{22} = 1, A_{23} = -1; A_{31} = -1, A_{32} = 0, A_{33} = 2$. Chuyển vị được ma trận phụ hợp; chia cho $\det M = 1$: M^{-1} có các dòng $(2; 0; -1), (-1; 1; 0), (-2; -1; 2)$.
Cofactors: $A_{11} = 2, A_{12} = -1, A_{13} = -2; A_{21} = 0, A_{22} = 1, A_{23} = -1; A_{31} = -1, A_{32} = 0, A_{33} = 2$. Transposing gives the adjugate; dividing by $\det M = 1$: M^{-1} has rows $(2; 0; -1), (-1; 1; 0), (-2; -1; 2)$.
4. Đơn giá $p = M^{-1} \cdot t$: $p_1 = 2 \cdot 570 - 960 = 180$; $p_2 = -570 + 630 = 60$; $p_3 = -2 \cdot 570 - 630 + 2 \cdot 960 = 150$. Sữa 180, nước suối 60, nước ngọt 150 nghìn đồng/thùng.
Prices $p = M^{-1} \cdot t$: $p_1 = 2 \cdot 570 - 960 = 180$; $p_2 = -570 + 630 = 60$; $p_3 = -2 \cdot 570 - 630 + 2 \cdot 960 = 150$. Milk 180, water 60, soft drinks 150 thousand VND per carton.
5. Thử lại hóa đơn 3: $3 \cdot 180 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 150 = 540 + 120 + 300 = 960$, khớp. Hóa đơn 4: $4 \cdot 180 + 5 \cdot 60 + 3 \cdot 150 = 720 + 300 + 450 = 1.470$ nghìn đồng.
Check invoice 3: $3 \cdot 180 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 150 = 540 + 120 + 300 = 960$, as given. Invoice 4: $4 \cdot 180 + 5 \cdot 60 + 3 \cdot 150 = 720 + 300 + 450 = 1,470$ thousand VND.
6. Ý nghĩa: ba hóa đơn chỉ xác định được ba đơn giá khi ma trận số lượng có định thức khác 0. Nếu hóa đơn 3 đúng bằng tổng hai hóa đơn đầu thì $\det M = 0$ và dữ liệu không đủ để tách giá.
Interpretation: three invoices pin down three prices only when the quantity matrix has a non-zero determinant. If invoice 3 were exactly the sum of the first two, $\det M = 0$ and the data could not separate the prices.

1.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — Essay questions and answer outlines

Câu 1. Cho A là ma trận 2×2 có các dòng $(1; 2), (-1; 3)$ và B là ma trận 2×3 có các dòng $(2; 0; 1), (1; -1; 4)$. (a) Tính AB ; tích BA có xác định không? (b) Kiểm tra $(AB)^T = B^T A^T$. (c) Chứng minh $A^2 - 4A + 5I = O$ và suy ra A^{-1} .

Question 1. Let A be the 2×2 matrix with rows $(1; 2), (-1; 3)$ and B the 2×3 matrix with rows $(2; 0; 1), (1; -1; 4)$. (a) Compute AB ; is BA defined? (b) Verify $(AB)^T = B^T A^T$. (c) Show that $A^2 - 4A + 5I = O$ and deduce A^{-1} .

- AB cỡ 2×3 , các dòng $(4; -2; 9), (1; -3; 11)$. BA không xác định vì B có 3 cột còn A có 2 dòng.
 AB is 2×3 with rows $(4; -2; 9), (1; -3; 11)$. BA is undefined: B has 3 columns but A has 2 rows.

- $(AB)^T$ cỡ 3×2 , các dòng $(4; 1)$, $(-2; -3)$, $(9; 11)$. B^T (3×2) nhân A^T (2×2) cho đúng ma trận đó.
 $(AB)^T$ is 3×2 with rows $(4; 1)$, $(-2; -3)$, $(9; 11)$. B^T (3×2) times A^T (2×2) gives the same matrix.
- A^2 có các dòng $(-1; 8)$, $(-4; 7)$. $A^2 - 4A + 5I$: $(-1 - 4 + 5; 8 - 8 + 0) = (0; 0)$ và $(-4 + 4 + 0; 7 - 12 + 5) = (0; 0)$. Vậy $A^2 - 4A + 5I = O$.
 A^2 has rows $(-1; 8)$, $(-4; 7)$. $A^2 - 4A + 5I$: $(-1 - 4 + 5; 8 - 8 + 0) = (0; 0)$ and $(-4 + 4 + 0; 7 - 12 + 5) = (0; 0)$. Hence $A^2 - 4A + 5I = O$.
- Viết lại $A(4I - A) = 5I$ nên $A^{-1} = (4I - A)/5$, các dòng $(3/5; -2/5)$, $(1/5; 1/5)$.
Rewrite as $A(4I - A) = 5I$, so $A^{-1} = (4I - A)/5$ with rows $(3/5; -2/5)$, $(1/5; 1/5)$.
- Kiểm bằng công thức cấp 2: $\det A = 3 + 2 = 5$, $A^{-1} = (1/5) \cdot [(3; -2), (1; 1)]$, trùng kết quả trên.
Check with the 2×2 formula: $\det A = 3 + 2 = 5$, $A^{-1} = (1/5) \cdot [(3; -2), (1; 1)]$, the same result.

Câu 2. (a) Tính định thức của ma trận C cấp 4 có các dòng $(2; 1; 0; 3)$, $(1; 0; 2; 1)$, $(3; 2; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 2)$. (b) Cho ma trận R có các dòng $(1; 2; -1; 3)$, $(2; 5; 1; 4)$, $(3; 7; m; 7)$. Biện luận hạng của R theo m.

Question 2. (a) Compute the determinant of the 4×4 matrix C with rows $(2; 1; 0; 3)$, $(1; 0; 2; 1)$, $(3; 2; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 2)$. (b) Let R have rows $(1; 2; -1; 3)$, $(2; 5; 1; 4)$, $(3; 7; m; 7)$. Discuss the rank of R in terms of m.

- (a) Đổi chỗ dòng 1 và dòng 2 để có phần tử dẫn bằng 1 (định thức đổi dấu): dòng mới $(1; 0; 2; 1)$, $(2; 1; 0; 3)$, $(3; 2; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 2)$.
(a) Swap rows 1 and 2 to get a leading 1 (the determinant changes sign): new rows $(1; 0; 2; 1)$, $(2; 1; 0; 3)$, $(3; 2; 1; 0)$, $(0; 1; 1; 2)$.
- Khử cột 1: $d_2 - 2d_1 = (0; 1; -4; 1)$, $d_3 - 3d_1 = (0; 2; -5; -3)$. Khử cột 2: $d_3 - 2d_2 = (0; 0; 3; -5)$, $d_4 - d_2 = (0; 0; 5; 1)$.
Clear column 1: $r_2 - 2r_1 = (0; 1; -4; 1)$, $r_3 - 3r_1 = (0; 2; -5; -3)$. Clear column 2: $r_3 - 2r_2 = (0; 0; 3; -5)$, $r_4 - r_2 = (0; 0; 5; 1)$.
- Còn khối 2×2 ở góc dưới: $3 \cdot 1 - (-5) \cdot 5 = 28$. Vậy $\det C = -(1 \cdot 1 \cdot 28) = -28$.
The remaining 2×2 block: $3 \cdot 1 - (-5) \cdot 5 = 28$. Hence $\det C = -(1 \cdot 1 \cdot 28) = -28$.
- (b) $d_2 - 2d_1 = (0; 1; 3; -2)$; $d_3 - 3d_1 = (0; 1; m + 3; -2)$; lấy dòng mới thứ ba trừ dòng mới thứ hai được $(0; 0; m; 0)$.
(b) $r_2 - 2r_1 = (0; 1; 3; -2)$; $r_3 - 3r_1 = (0; 1; m + 3; -2)$; subtracting the new second row from the new third row gives $(0; 0; m; 0)$.
- Kết luận: $m = 0$ thì dòng cuối bằng 0, $r(R) = 2$; $m \neq 0$ thì ma trận bậc thang có 3 dòng khác 0, $r(R) = 3$.
Conclusion: if $m = 0$ the last row is zero and $r(R) = 2$; if $m \neq 0$ the echelon form has 3 non-zero rows and $r(R) = 3$.

Câu 3. Cho A là ma trận 3×3 có các dòng $(1; 2; 2)$, $(1; 3; 4)$, $(1; 1; 1)$ và B là ma trận 2×3 có các dòng $(1; 2; 3)$, $(0; 1; 1)$. (a) Tính $\det A$. (b) Tìm A^{-1} bằng phương pháp Gauss–Jordan. (c) Giải phương trình ma trận $XA = B$.

Question 3. Let A be the 3×3 matrix with rows $(1; 2; 2)$, $(1; 3; 4)$, $(1; 1; 1)$ and B the 2×3 matrix with rows $(1; 2; 3)$, $(0; 1; 1)$. (a) Compute $\det A$. (b) Find A^{-1} by Gauss–Jordan elimination. (c) Solve the matrix equation $XA = B$.

- (a) Sarrus: $3 + 8 + 2 - 6 - 4 - 2 = 1$. $\det A = 1 \neq 0$ nên A khả nghịch.
(a) Sarrus: $3 + 8 + 2 - 6 - 4 - 2 = 1$. $\det A = 1 \neq 0$, so A is invertible.
- (b) Lập $[A | I]$; $d_2 - d_1$, $d_3 - d_1$: $(0; 1; 2 | -1; 1; 0)$, $(0; -1; -1 | -1; 0; 1)$; $d_3 + d_2$: $(0; 0; 1 | -2; 1; 1)$.
(b) Form $[A | I]$; $r_2 - r_1$, $r_3 - r_1$: $(0; 1; 2 | -1; 1; 0)$, $(0; -1; -1 | -1; 0; 1)$; $r_3 + r_2$: $(0; 0; 1 | -2; 1; 1)$.
- Khử ngược: $d_2 - 2d_3 = (0; 1; 0 | 3; -1; -2)$; $d_1 - 2d_3 - 2d_2 = (1; 0; 0 | -1; 0; 2)$. A^{-1} có các dòng $(-1; 0; 2)$, $(3; -1; -2)$, $(-2; 1; 1)$.
Back substitution: $r_2 - 2r_3 = (0; 1; 0 | 3; -1; -2)$; $r_1 - 2r_3 - 2r_2 = (1; 0; 0 | -1; 0; 2)$. A^{-1} has rows $(-1; 0; 2)$, $(3; -1; -2)$, $(-2; 1; 1)$.
- (c) $XA = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$ (nhân A^{-1} bên PHẢI). X cỡ 2×3 , các dòng $(-1; 1; 1)$, $(1; 0; -1)$.
(c) $XA = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$ (multiply by A^{-1} on the RIGHT). X is 2×3 with rows $(-1; 1; 1)$, $(1; 0; -1)$.
- Thử lại: dòng 1 của X nhân A : $(-1 + 1 + 1; -2 + 3 + 1; -2 + 4 + 1) = (1; 2; 3)$, đúng dòng 1 của B . Viết $X = A^{-1} \cdot B$ là sai vì A^{-1} (3×3) không nhân được với B (2×3).
Check: row 1 of X times A : $(-1 + 1 + 1; -2 + 3 + 1; -2 + 4 + 1) = (1; 2; 3)$, row 1 of B .
Writing $X = A^{-1} \cdot B$ is wrong: A^{-1} (3×3) cannot multiply B (2×3).

1.10. Câu hỏi trắc nghiệm — Multiple-choice questions

1. Ma trận doanh số A cỡ 2×3 (2 cửa hàng, 3 mặt hàng), ma trận B cỡ 3×4 . Tích AB có cỡ nào?
The sales matrix A is 2×3 (2 shops, 3 products) and B is 3×4 . What is the size of AB ?
 - A. 3×3
 - B. 2×4
 - C. 4×2
 - D. Không nhân được / Not defined
2. Định thức của ma trận cấp 2 có các dòng $(3; -2)$, $(4; 1)$ bằng bao nhiêu?
What is the determinant of the 2×2 matrix with rows $(3; -2)$, $(4; 1)$?
 - A. 11
 - B. -5
 - C. 5
 - D. -11

3. A là ma trận vuông cấp 3 có $\det A = 2$. Định thức của $3A$ bằng bao nhiêu?
A is a 3×3 matrix with $\det A = 2$. What is $\det(3A)$?
- A. 6
 - B. 18
 - C. 54
 - D. $2/3$
4. Ma trận A cấp 3 có $\det A = 5$. Đổi chỗ dòng 1 và dòng 3, rồi nhân dòng 2 với 2, được ma trận B. $\det B$ bằng bao nhiêu?
A is 3×3 with $\det A = 5$. Swap rows 1 and 3, then multiply row 2 by 2, giving B. What is $\det B$?
- A. 10
 - B. 5
 - C. -5
 - D. -10
5. Ma trận nghịch đảo của ma trận cấp 2 có các dòng (3; 5), (1; 2) là ma trận có các dòng:
The inverse of the 2×2 matrix with rows (3; 5), (1; 2) is the matrix with rows:
- A. (2; -5), (-1; 3)
 - B. (2; 5), (1; 3)
 - C. (-2; 5), (1; -3)
 - D. (2; -1), (-5; 3)
6. Ma trận A có các dòng (1; 2; 3), (2; 4; m), (1; 3; 4). Với giá trị nào của m thì hạng của A bằng 2?
Matrix A has rows (1; 2; 3), (2; 4; m), (1; 3; 4). For which m is the rank of A equal to 2?
- A. $m = -6$
 - B. $m = 0$
 - C. $m = 6$
 - D. $m = 4$
7. Với A, B là các ma trận sao cho tích AB xác định, ma trận chuyển vị $(AB)^T$ bằng:
For matrices A, B such that AB is defined, the transpose $(AB)^T$ equals:
- A. $A^T B^T$
 - B. $B^T A^T$
 - C. BA
 - D. AB

- Viết một bài toán kinh tế thành hệ phương trình tuyến tính và chuyển sang dạng ma trận $AX = B$.
Translate an economic problem into a system of linear equations and write it in matrix form $AX = B$.
- Giải hệ vuông bằng quy tắc Cramer và bằng ma trận nghịch đảo; biết khi nào hai cách này không dùng được.
Solve square systems by Cramer's rule and by the inverse matrix; know when these methods do not apply.
- Giải hệ bất kỳ bằng phương pháp khử Gauss, viết nghiệm tổng quát với ẩn tự do.
Solve any system by Gaussian elimination and write the general solution with free variables.
- Biện luận số nghiệm theo hạng (định lý Kronecker–Capelli) và theo tham số.
Determine the number of solutions from ranks (Kronecker–Capelli theorem) and in terms of a parameter.
- Tìm điều kiện có nghiệm không tầm thường và hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất; tự kiểm đáp số bằng Python.
Find when a homogeneous system has non-trivial solutions and find a fundamental system of solutions; check answers in Python.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

Here a_{ij} is the coefficient of x_j in equation i and b_i is the constant term (right-hand side). Each unknown appears only to the first power, with no products of unknowns and no functions of unknowns. Collect the coefficients into three matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = (b_1; b_2; \dots; b_m)^T$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — **Dạng ma trận** của hệ (2.1): $AX = B$. A là ma trận hệ số ($m \times n$), X là vector cột ẩn ($n \times 1$), B là vector cột hệ số tự do ($m \times 1$).

Ma trận bổ sung (ma trận mở rộng) $\bar{A} = [A | B]$: ghép cột B vào bên phải A , cấp $m \times (n + 1)$. Một bộ số $(c_1; c_2; \dots; c_n)$ là **nghiệm** nếu thay $x_j = c_j$ thì mọi phương trình đều đúng. Hai hệ cùng ẩn là **tương đương** nếu có cùng tập nghiệm.

Matrix form of (2.1): $AX = B$. A is the coefficient matrix ($m \times n$), X is the column vector of unknowns ($n \times 1$), B is the column vector of constants ($m \times 1$).

Augmented matrix $\bar{A} = [A | B]$: append column B to the right of A , size $m \times (n + 1)$.

*A tuple $(c_1; c_2; \dots; c_n)$ is a **solution** if putting $x_j = c_j$ makes every equation true. Two systems in the same unknowns are **equivalent** if they have the same solution set.*

$$AX = B, \quad \bar{A} = [A | B] \quad (2.2)$$

Tích AX là vector cột có dòng thứ i bằng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$, tức vế trái của phương trình thứ i . Vì vậy viết $AX = B$ chỉ là viết gọn m phương trình. Phép nhân phải đúng thứ tự A rồi đến X : XA không xác định khi $m \neq 1$.

The product AX is a column vector whose i -th entry is $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$, the left-hand side of equation i . Writing $AX = B$ is therefore shorthand for the m equations. The order A then X matters: XA is undefined when $m \neq 1$.

Phân loại hệ theo số nghiệm — Classification by number of solutions

Tên gọi <i>Name</i>	Nghĩa <i>Meaning</i>	Ví dụ hai ẩn <i>Two-unknown example</i>
Hệ tương thích, xác định <i>Consistent, determinate</i>	Có đúng một nghiệm <i>Exactly one solution</i>	$x + y = 5; x - y = 1 \Rightarrow (3; 2)$
Hệ tương thích, không xác định <i>Consistent, indeterminate</i>	Có vô số nghiệm <i>Infinitely many solutions</i>	$x + y = 5; 2x + 2y = 10 \Rightarrow (5 - t; t)$
Hệ không tương thích <i>Inconsistent</i>	Không có nghiệm <i>No solution</i>	$x + y = 5; x + y = 7$

Tên gọi <i>Name</i>	Nghĩa <i>Meaning</i>	Ví dụ hai ẩn <i>Two-unknown example</i>
Hệ vuông <i>Square system</i>	Số phương trình bằng số ẩn ($m = n$) <i>As many equations as unknowns ($m = n$)</i>	Dùng được Cramer, A^{-1} khi $\det A \neq 0$ <i>Cramer, A^{-1} apply when $\det A \neq 0$</i>
Hệ thuần nhất <i>Homogeneous system</i>	Mọi $b_i = 0$, tức $B = O$ <i>All $b_i = 0$, i.e. $B = O$</i>	$x + 2y = 0$; $3x + 6y = 0$

Một hệ tuyến tính chỉ có thể rơi vào một trong ba khả năng: vô nghiệm, đúng một nghiệm, vô số nghiệm. Không có hệ tuyến tính nào có đúng hai hoặc đúng ba nghiệm: nếu $X_1 \neq X_2$ đều là nghiệm thì mọi điểm $X_1 + t(X_2 - X_1)$ cũng là nghiệm.

A linear system has exactly one of three outcomes: no solution, exactly one solution, or infinitely many. No linear system has exactly two or three solutions: if $X_1 \neq X_2$ are both solutions, then every point $X_1 + t(X_2 - X_1)$ is a solution too.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 2.1. Cơ sở bánh trung thu Hữu Hạnh (Cần Thơ) làm ba loại bánh: đậu xanh, thập cẩm, trứng muối. Đơn vị sản lượng là trăm cái. Mỗi trăm bánh cần số giờ công ở ba khâu như sau: nhào bột 2, 1, 3 giờ; nướng 1, 2, 1 giờ; đóng gói 3, 1, 2 giờ (theo thứ tự đậu xanh, thập cẩm, trứng muối). Mỗi ngày cơ sở có 17 giờ nhào, 12 giờ nướng, 19 giờ đóng gói. Gọi x_1, x_2, x_3 là sản lượng ba loại (trăm cái). Dùng hết giờ công ở cả ba khâu:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 12; \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 19.$$

Dạng ma trận: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = (17; 12; 19)$. Thử $X = (4; 3; 2)$: $8 + 3 + 6 = 17$; $4 + 6 + 2 = 12$; $12 + 3 + 4 = 19$. Vậy làm 400 bánh đậu xanh, 300 thập cẩm, 200 trứng muối thì dùng hết giờ công. Mục 2.2 chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

Example 2.1. Hữu Hạnh mooncake bakery (Cần Thơ) makes three kinds: mung bean, mixed nut and salted egg. Output is measured in hundreds of cakes. Each hundred needs these labour hours: kneading 2, 1, 3; baking 1, 2, 1; packing 3, 1, 2 (in the order mung bean, mixed nut, salted egg). Daily capacity is 17 kneading, 12 baking and 19 packing hours. Let x_1, x_2, x_3 be the outputs (hundreds).

Using all hours in every stage:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17; \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 12; \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 19.$$

Matrix form: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = (17; 12; 19)$. Try $X = (4; 3; 2)$: $8 + 3 + 6 = 17$; $4 + 6 + 2 = 12$; $12 + 3 + 4 = 19$. So 400 mung bean, 300 mixed nut and 200 salted egg cakes use up all hours.

Section 2.2 shows this is the only solution.

Ma trận bổ sung của Ví dụ 2.1:

The augmented matrix of Example 2.1:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 17 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 19 \end{array} \right]$$

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lập ma trận hệ số sai: (1) xếp hệ số không theo cùng một thứ tự ẩn ở mọi dòng; (2) bỏ trống thay vì ghi 0 khi một ẩn vắng mặt, ví dụ phương trình $x - 2z = 0$ phải ghi dòng $[1 \ 0 \ -2]$, không phải $[1 \ -2]$; (3) với bài kinh tế, đặt dòng theo sản phẩm nhưng cột cũng theo sản phẩm. Quy ước an toàn: **mỗi dòng là một ràng**

bước (một nguồn lực, một điều kiện), **mỗi cột là một ẩn**.

Building the coefficient matrix wrongly: (1) ordering coefficients differently in different rows; (2) leaving a blank instead of writing 0 for a missing unknown, e.g. $x - 2z = 0$ must give the row $[1 \ 0 \ -2]$, not $[1 \ -2]$; (3) in an economic problem, indexing rows by product as well as columns. Safe rule: each row is one constraint (a resource, a condition), each column is one unknown.

2.2. Quy tắc Cramer — Cramer's rule

Hệ vuông n phương trình, n ẩn có định thức ma trận hệ số $D = \det A \neq 0$ gọi là **hệ Cramer**. Gọi D_j là định thức của ma trận nhận được từ A khi **thay cột thứ j bằng cột vế phải B** , giữ nguyên các cột khác.

*A square system of n equations in n unknowns whose coefficient determinant $D = \det A \neq 0$ is called a **Cramer system**. Let D_j be the determinant of the matrix obtained from A by **replacing column j with the right-hand side B** , all other columns unchanged.*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Định lý Cramer. Nếu A vuông cấp n và $D = \det A \neq 0$ thì hệ $AX = B$ có **nghiệm duy nhất**:

$$x_j = D_j / D, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Nếu $D = 0$ thì quy tắc Cramer không dùng được: hệ hoặc vô nghiệm, hoặc vô số nghiệm; phải biện luận bằng phương pháp Gauss hay theo hạng (mục 2.5).

Cramer's theorem. *If A is square of order n and $D = \det A \neq 0$, the system $AX = B$ has a **unique solution**:*

$$x_j = D_j / D, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

If $D = 0$, Cramer's rule does not apply: the system has either no solution or infinitely many; decide by Gaussian elimination or by ranks (Section 2.5).

$$x_j = D_j / D, \quad D = \det A \neq 0 \quad (2.3)$$

Với hệ hai ẩn $ax + by = e$; $cx + dy = f$, ba định thức viết thẳng ra:

For two unknowns, $ax + by = e$; $cx + dy = f$, the three determinants are:

$$D = ad - bc, \quad D_1 = ed - bf, \quad D_2 = af - ec \quad (2.4)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 2.2. Giải hệ $3x + 2y = 16$; $5x - y = 18$.

$$D = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13 \neq 0. \quad D_1 = 16 \cdot (-1) - 2 \cdot 18 = -52. \quad D_2 = 3 \cdot 18 - 16 \cdot 5 = -26.$$

$$x = D_1/D = -52/(-13) = 4; \quad y = D_2/D = -26/(-13) = 2. \quad \text{Kiểm: } 12 + 4 = 16; \quad 20 - 2 = 18.$$

Example 2.2. *Solve $3x + 2y = 16$; $5x - y = 18$.*

$$D = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13 \neq 0. \quad D_1 = 16 \cdot (-1) - 2 \cdot 18 = -52. \quad D_2 = 3 \cdot 18 - 16 \cdot 5 = -26.$$

$$x = D_1/D = -52/(-13) = 4; \quad y = D_2/D = -26/(-13) = 2. \quad \text{Check: } 12 + 4 = 16; \quad 20 - 2 = 18.$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 2.2b. Quán cà phê Phố Núi (Đà Lạt) không niêm yết giá lẻ.

Hóa đơn thứ nhất: 3 ly cà phê sữa và 2 bánh mì hết 125 nghìn đồng. Hóa đơn thứ hai: 2 ly cà phê sữa và 3 bánh mì hết 120 nghìn đồng. Gọi x, y là giá một ly và một bánh (nghìn đồng): $3x + 2y = 125$; $2x + 3y = 120$.

$$D = 9 - 4 = 5; \quad D_1 = 125 \cdot 3 - 2 \cdot 120 = 135; \quad D_2 = 3 \cdot 120 - 125 \cdot 2 = 110.$$

$$x = 135/5 = 27; \quad y = 110/5 = 22. \quad \text{Giá một ly cà phê sữa 27 nghìn đồng, một bánh mì 22 nghìn đồng. Kiểm: } 81 + 44 = 125; \quad 54 + 66 = 120.$$

Example 2.2b. *Phố Núi café (Đà Lạt) posts no unit prices. Bill one: 3 iced milk coffees and 2 baguettes cost VND 125 thousand. Bill two: 2 coffees and 3 baguettes cost VND 120 thousand. Let x, y*

be the unit prices (VND thousand): $3x + 2y = 125$; $2x + 3y = 120$.

$D = 9 - 4 = 5$; $D_1 = 125 \cdot 3 - 2 \cdot 120 = 135$; $D_2 = 3 \cdot 120 - 125 \cdot 2 = 110$.

$x = 135/5 = 27$; $y = 110/5 = 22$. A coffee costs VND 27 thousand and a baguette VND 22 thousand.

Check: $81 + 44 = 125$; $54 + 66 = 120$.

Ví dụ 2.3. Giải bài toán bánh trung thu bằng Cramer — *Example 2.3. The mooncake problem by Cramer's rule*

Quay lại Ví dụ 2.1. Bước 1: tính D bằng quy tắc Sarrus.

Return to Example 2.1. Step 1: compute D by Sarrus' rule.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 8 + 3 + 3 - 18 - 2 - 2 = -8$$

$D = -8 \neq 0$ nên hệ là hệ Cramer, có nghiệm duy nhất. Bước 2: thay lần lượt từng cột bằng $B = (17; 12; 19)$.

$D = -8 \neq 0$, so this is a Cramer system with a unique solution. Step 2: replace each column in turn by $B = (17; 12; 19)$.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 3 \\ 12 & 2 & 1 \\ 19 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 68 + 19 + 36 - 114 - 17 - 24 = -32$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 17 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \\ 3 & 19 & 2 \end{bmatrix} = 48 + 51 + 57 - 108 - 38 - 34 = -24$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 19 \end{bmatrix} = 76 + 36 + 17 - 102 - 24 - 19 = -16$$

Bước 3: $x_1 = -32/(-8) = 4$; $x_2 = -24/(-8) = 3$; $x_3 = -16/(-8) = 2$ (trăm cái). Kết quả khớp với phép thử ở Ví dụ 2.1, và vì $D \neq 0$ nên không còn kế hoạch nào khác dùng hết đúng 17, 12, 19 giờ.

Step 3: $x_1 = -32/(-8) = 4$; $x_2 = -24/(-8) = 3$; $x_3 = -16/(-8) = 2$ (hundreds of cakes). This matches the check in Example 2.1, and since $D \neq 0$ no other plan uses exactly 17, 12 and 19 hours.

Trường hợp <i>Case</i>	Kết luận <i>Conclusion</i>	Cách xử lý <i>What to do</i>
$D \neq 0$	Nghiệm duy nhất $x_j = D_j/D$ <i>Unique solution $x_j = D_j/D$</i>	Dùng Cramer <i>Use Cramer</i>
$D = 0$ và có ít nhất một $D_j \neq 0$ <i>$D = 0$ and some $D_j \neq 0$</i>	Hệ vô nghiệm <i>No solution</i>	Kết luận ngay <i>Conclude at once</i>
$D = 0$ và mọi $D_j = 0$ <i>$D = 0$ and all $D_j = 0$</i>	Chưa kết luận được: có thể vô số nghiệm hoặc vô nghiệm <i>Undecided: infinitely many or none</i>	Khử Gauss, so sánh hạng <i>Eliminate, compare ranks</i>

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thấy $D = 0$ và $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ rồi kết luận “hệ vô số nghiệm”. Phản ví dụ: $x + y + z = 1$; $x + y + z = 2$; $x + y + z = 3$. Ba cột của A bằng nhau nên $D = 0$, và mỗi D_j vẫn có hai cột bằng nhau nên $D_j = 0$; nhưng ba phương trình mâu thuẫn nhau nên hệ vô nghiệm. Với hệ từ 3 ẩn trở lên, trường hợp mọi định thức bằng 0 phải giải bằng Gauss.

Seeing $D = 0$ and $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ and concluding “infinitely many solutions”. Counterexample: $x + y + z = 1$; $x + y + z = 2$; $x + y + z = 3$. All three columns of A are equal, so $D = 0$, and each D_j still has two equal columns, so $D_j = 0$; yet the three equations contradict one another, so there is no solution. With 3 or more unknowns, the all-zero case must be settled by Gaussian elimination.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thay dòng j thay vì cột j bằng B khi lập D_j , hoặc lấy D_j/D nhưng quên dấu âm của D. Ở Ví dụ 2.3, bỏ dấu của $D = -8$ sẽ ra nghiệm $(-4; -3; -2)$: sản lượng âm là dấu hiệu tính sai.

Replacing row j instead of column j with B when forming D_j , or dividing by D but dropping its minus sign. In Example 2.3, ignoring the sign of $D = -8$ gives $(-4; -3; -2)$: negative outputs signal an arithmetic error.

2.3. Giải hệ bằng ma trận nghịch đảo — Solving by the inverse matrix

Nếu A vuông và $\det A \neq 0$ thì A có ma trận nghịch đảo A^{-1} (Chương 1). Nhân bên trái hai vế của $AX = B$ với A^{-1} : $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, mà $A^{-1}A = I$ và $IX = X$, nên:

If A is square and $\det A \neq 0$, A has an inverse A^{-1} (Chapter 1). Multiply both sides of $AX = B$ on the left by A^{-1} : $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$; since $A^{-1}A = I$ and $IX = X$:

$$AX = B, \det A \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}B \quad (2.5)$$

$$XA = B, \det A \neq 0 \Rightarrow X = BA^{-1} \quad (2.6)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Phương pháp ma trận nghịch đảo: tính $A^{-1} = (1/\det A) \cdot C^T$, trong đó C là ma trận các phần bù đại số $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$; sau đó nhân $X = A^{-1}B$. Ấn đứng bên phải A thì A^{-1} nhân bên trái B; ấn đứng bên trái A thì A^{-1} nhân bên phải B. Cách này có lợi khi cùng ma trận A phải giải với nhiều vế phải $B_1, B_2, \dots$ (nhiều kịch bản kế hoạch, nhiều đơn hàng): chỉ tính A^{-1} một lần.

Inverse-matrix method: compute $A^{-1} = (1/\det A) \cdot C^T$, where C is the matrix of cofactors $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$; then multiply $X = A^{-1}B$. If the unknown stands to the right of A, A^{-1} multiplies B on the left; if it stands to the left of A, A^{-1} multiplies B on the right.

*It pays off when **the same matrix A** must be solved with **many right-hand sides** $B_1, B_2, \dots$ (several planning scenarios, several orders): A^{-1} is computed only once.*

Ví dụ 2.4. Một ma trận nghịch đảo, hai kịch bản nguyên liệu — Example 2.4. One inverse, two input scenarios

Nhà máy thức ăn chăn nuôi Phú Thịnh (Đồng Nai) trộn ba loại cám G1, G2, G3. Mỗi tấn cám cần: ngô 1, 1, 0 tạ; khô đậu nành 2, 3, 1 tạ; cám gạo 1, 2, 2 tạ (theo thứ tự G1, G2, G3). Tháng 10 kho có 50 tạ ngô, 170 tạ khô đậu, 160 tạ cám gạo; tháng 11 dự kiến 55, 175, 155 tạ. Tìm số tấn mỗi loại để dùng hết nguyên liệu trong từng tháng.

Phú Thịnh feed mill (Đồng Nai) blends three feeds G1, G2, G3. Each tonne needs: maize 1, 1, 0 quintals; soybean meal 2, 3, 1 quintals; rice bran 1, 2, 2 quintals (in the order G1, G2, G3). In October the store holds 50 quintals of maize, 170 of soybean meal and 160 of rice bran; November is expected to bring 55, 175 and 155. Find the tonnes of each feed that use up all inputs in each month.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \det A = 1(6 - 2) - 1(4 - 1) = 1$$

Các phần bù đại số: $A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{13} = 1; A_{21} = -2, A_{22} = 2, A_{23} = -1; A_{31} = 1, A_{32} = -1, A_{33} = 1$. Chuyển vị ma trận phần bù và chia cho $\det A = 1$:

Cofactors: $A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{13} = 1; A_{21} = -2, A_{22} = 2, A_{23} = -1; A_{31} = 1, A_{32} = -1, A_{33} = 1$. Transpose the cofactor matrix and divide by $\det A = 1$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kiểm A^{-1} bằng cách khác: khử Gauss–Jordan trên $[A \mid I]$. Khi nửa trái thành I thì nửa phải chính là A^{-1} . Cách này ít phép tính hơn phần bù đại số khi ma trận từ cấp 3 trở lên.

Check A^{-1} another way: Gauss–Jordan elimination on $[A \mid I]$. When the left half becomes I, the right half is A^{-1} . For order 3 and above this takes fewer operations than cofactors.

$$\begin{aligned} [A \mid I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad d_2 - 2d_1; \quad d_3 - d_1 \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad d_3 - d_2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad d_2 - d_3; \quad d_1 - d_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] = [I | A^{-1}]$$

Tháng 10, $B_1 = (50; 170; 160)$:

October, $B_1 = (50; 170; 160)$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \\ A^{-1}B_1 &= \\ &= \left[\begin{array}{c} 200 - 340 + 160 \\ -150 + 340 - 160 \\ 50 - 170 + 160 \end{array} \right] = (20; 30; 40) \end{aligned}$$

Tháng 11, $B_2 = (55; 175; 155)$:

November, $B_2 = (55; 175; 155)$:

$$\begin{aligned} X_2 &= \\ A^{-1}B_2 &= \\ &= \left[\begin{array}{c} 220 - 350 + 155 \\ -165 + 350 - 155 \\ 55 - 175 + 155 \end{array} \right] = (25; 30; 35) \end{aligned}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Kết luận Ví dụ 2.4: tháng 10 trộn 20 tấn G1, 30 tấn G2, 40 tấn G3; tháng 11 trộn 25 tấn G1, 30 tấn G2, 35 tấn G3. Kiểm tháng 10: ngô $20 + 30 = 50$; khô đậu $40 + 90 + 40 = 170$; cám gạo $20 + 60 + 80 = 160$. Ý nghĩa của A^{-1} : cột 1 của A^{-1} là $(4; -3; 1)$, nên có thêm 1 tạ ngô (giữ nguyên hai nguyên liệu kia) thì phương án dùng hết nguyên liệu đổi thành +4 tấn G1, -3 tấn G2, +1 tấn G3.

Conclusion of Example 2.4: in October blend 20 t of G1, 30 t of G2, 40 t of G3; in November 25 t of G1, 30 t of G2, 35 t of G3. October check: maize $20 + 30 = 50$; soybean meal $40 + 90 + 40 = 170$; rice bran $20 + 60 + 80 = 160$. Meaning of A^{-1} : its first column is $(4; -3; 1)$, so one more quintal of maize (others unchanged) shifts the full-use plan by +4 t of G1, -3 t of G2, +1 t of G3.

Phương trình dạng $XA = B$ (ẩn là vector dòng hoặc ma trận đứng trước A) giải bằng $X = BA^{-1}$. Ví dụ: tìm $X = (x \ y)$ sao cho $X \cdot [2 \ 1; 5 \ 3] = (7 \ 4)$. $\det A = 6 - 5 = 1$, $A^{-1} = [3 \ -1; -5 \ 2]$. $X = (7 \ 4) \cdot A^{-1} = (21 - 20; -7 + 8) = (1 \ 1)$. Kiểm: $(1 \cdot 2 + 1 \cdot 5; 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3) = (7 \ 4)$.

An equation $XA = B$ (the unknown is a row vector or a matrix standing before A) is solved by $X = BA^{-1}$. Example: find $X = (x \ y)$ with $X \cdot [2 \ 1; 5 \ 3] = (7 \ 4)$. $\det A = 6 - 5 = 1$, $A^{-1} = [3 \ -1; -5 \ 2]$. $X = (7 \ 4) \cdot A^{-1} = (21 - 20; -7 + 8) = (1 \ 1)$. Check: $(1 \cdot 2 + 1 \cdot 5; 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3) = (7 \ 4)$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $X = BA^{-1}$ cho phương trình $AX = B$. Phép nhân ma trận không giao hoán, nên $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ nói chung; với B là cột $n \times 1$ thì BA^{-1} thậm chí không xác định. Mẹo: A^{-1} luôn đứng ở **cùng phía** với A trong phương trình gốc.

*Writing $X = BA^{-1}$ for $AX = B$. Matrix multiplication is not commutative, so $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ in general; with B an $n \times 1$ column, BA^{-1} is not even defined. Tip: A^{-1} always goes **on the same side** as A in the original equation.*

2.4. Phương pháp khử Gauss — Gaussian elimination

Cramer và ma trận nghịch đảo chỉ dùng cho hệ vuông có $\det A \neq 0$. Phương pháp Gauss dùng cho **mọi hệ**: vuông hay không vuông, có nghiệm duy nhất, vô số nghiệm hay vô nghiệm. Ý tưởng: dùng các phép biến đổi không làm đổi tập nghiệm để đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang, sau đó giải từ dưới lên.

*Cramer's rule and the inverse apply only to square systems with $\det A \neq 0$. Gaussian elimination works for **every system**: square or not, with a unique solution, infinitely many or none. Idea: use operations that keep the solution set unchanged to bring the augmented matrix to echelon form, then solve from the bottom up.*

Phép biến đổi sơ cấp trên dòng <i>Elementary row operation</i>	Ký hiệu <i>Notation</i>	Tác động lên hệ <i>Effect on the system</i>
Đổi chỗ hai dòng <i>Swap two rows</i>	$d_i \leftrightarrow d_j$ $r_i \leftrightarrow r_j$	Đổi thứ tự hai phương trình <i>Reorders two equations</i>
Nhân một dòng với số $k \neq 0$ <i>Multiply a row by $k \neq 0$</i>	$d_i \rightarrow k \cdot d_i$ $r_i \rightarrow k \cdot r_i$	Nhân hai vế một phương trình với $k \neq 0$ <i>Multiplies both sides of an equation by $k \neq 0$</i>
Cộng vào một dòng k lần dòng khác <i>Add k times another row</i>	$d_i \rightarrow d_i + k \cdot d_j$ $r_i \rightarrow r_i + k \cdot r_j$	Cộng k lần phương trình j vào phương trình i <i>Adds k times equation j to equation i</i>

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ma trận bậc thang (theo dòng): (1) các dòng toàn số 0, nếu có, nằm dưới cùng; (2) phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi dòng (gọi là **phần tử trụ**) nằm ở cột lệch sang phải so với trụ của dòng trên. **Bậc thang rút gọn**: thêm điều kiện mọi trụ bằng 1 và là phần tử khác 0 duy nhất trong cột của nó.

Ba phép biến đổi sơ cấp trên dòng biến hệ thành **hệ tương đương**. Chỉ biến đổi **dòng**, không biến đổi **cột**; cột về phải luôn đi cùng dòng của nó.

Row echelon form: (1) zero rows, if any, are at the bottom; (2) the first non-zero entry of each row (the **pivot**) lies in a column to the right of the pivot of the row above. **Reduced row echelon form**: in addition every pivot equals 1 and is the only non-zero entry in its column.

*The three elementary row operations turn a system into an **equivalent system**. Operate on **rows** only, never on columns; the right-hand entry always travels with its row.*

Quy ước ký hiệu: trong các ma trận biến đổi, d_i là dòng thứ i ; mũi tên $\rightarrow$ nối hai ma trận tương đương; ghi bên phải ma trận là các phép vừa làm để ra ma trận kế tiếp.

Notation: in the matrix displays, d_i denotes row i (r_i in the English text); an arrow $\rightarrow$ links two equivalent matrices; the note to the right of a matrix lists the operations that produce the next one.

Các bước giải — Procedure

1. Lập ma trận bổ sung $\bar{A} = [A \mid B]$.
Form the augmented matrix $\bar{A} = [A \mid B]$.
2. Chọn trụ ở cột 1 (nên chọn dòng có hệ số 1 hoặc -1 , đổi lên đầu). Dùng phép $d_i \rightarrow d_i + k \cdot d_1$ để mọi phần tử dưới trụ thành 0.
*Choose a pivot in column 1 (preferably a row with coefficient 1 or -1 , moved to the top).
Use $r_i \rightarrow r_i + k \cdot r_1$ to make every entry below the pivot zero.*
3. Bỏ qua dòng 1, lặp lại với ma trận con còn lại cho tới khi được dạng bậc thang.
Set row 1 aside and repeat on the remaining submatrix until echelon form is reached.
4. Đọc kết quả: có dòng $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c]$ với $c \neq 0$ thì hệ vô nghiệm. Nếu không, ứng với cột có trụ là **ẩn cơ sở**, các ẩn còn lại là **ẩn tự do**.
*Read off: a row $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c]$ with $c \neq 0$ means no solution. Otherwise, unknowns in pivot columns are **basic variables**, the rest are **free variables**.*
5. Thế ngược: giải ẩn cơ sở từ dòng cuối lên dòng đầu, theo các ẩn tự do (nếu có).
Back substitution: solve for basic variables from the last row upwards, in terms of the free variables (if any).

Ví dụ 2.5. Hệ có nghiệm duy nhất — Example 2.5. A system with a unique solution

Giải hệ $x + 2y + z = 9$; $2x + 3y - z = 4$; $3x + y + 2z = 13$. Ma trận bổ sung:

Solve $x + 2y + z = 9$; $2x + 3y - z = 4$; $3x + y + 2z = 13$. Augmented matrix:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 13 \end{array} \right] \quad d_2 - 2d_1; \ d_3 - 3d_1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -14 \\ 0 & -5 & -1 & -14 \end{array} \right] \quad d_3 - 5d_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 14 & 56 \end{array} \right]$$

Ma trận đã có dạng bậc thang, ba trụ ở ba cột, không có dòng mâu thuẫn. Thế ngược: $14z = 56 \Rightarrow z = 4$; $-y - 3 \cdot 4 = -14 \Rightarrow y = 2$; $x = 9 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$. Nghiệm duy nhất (1; 2; 4). Kiểm phương trình 2: $2 + 6 - 4 = 4$.

The matrix is in echelon form with three pivots in three columns and no contradictory row. Back substitution: $14z = 56 \Rightarrow z = 4$; $-y - 3 \cdot 4 = -14 \Rightarrow y = 2$; $x = 9 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$. Unique solution (1; 2; 4). Check equation 2: $2 + 6 - 4 = 4$.

Đi tiếp đến dạng bậc thang rút gọn (phương pháp **Gauss–Jordan**) thì đọc nghiệm thẳng ở cột cuối, không cần thế ngược: chia d_3 cho 14, d_2 cho -1 , rồi khử ngược lên trên.

Continuing to reduced echelon form (the **Gauss–Jordan** method) lets you read the solution straight from the last column, without back substitution: divide r_3 by 14 and r_2 by -1 , then eliminate upwards.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow (x; y; z) = (1; 2; 4)$$

Ví dụ 2.6. Hệ có vô số nghiệm — Example 2.6. A system with infinitely many solutions

Giải hệ 3 phương trình, 4 ẩn: $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$; $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 10$; $3x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 13$.

Solve 3 equations in 4 unknowns: $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$; $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 10$; $3x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 13$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 13 \end{array} \right] \quad d_2 - 2d_1; \quad d_3 - 3d_1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right] \quad d_3 - d_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dòng cuối toàn 0 (phương trình $0 = 0$, luôn đúng). Còn hai trụ ở cột 1 và cột 2: x_1, x_2 là ẩn cơ sở; x_3, x_4 là ẩn tự do. Đặt $x_3 = s, x_4 = t$. Dòng 2: $x_2 = 4 - 3s + t$. Dòng 1: $x_1 = 3 - x_2 + s - 2t = -1 + 4s - 3t$.

The last row is all zero (the equation $0 = 0$, always true). Two pivots remain, in columns 1 and 2: x_1, x_2 are basic; x_3, x_4 are free. Put $x_3 = s, x_4 = t$. Row 2: $x_2 = 4 - 3s + t$. Row 1: $x_1 = 3 - x_2 + s - 2t = -1 + 4s - 3t$.

$$X = (-1 + 4s - 3t; 4 - 3s + t; s; t), \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Mỗi cặp $(s; t)$ cho một nghiệm riêng, ví dụ $s = 1, t = 1$ cho $(0; 2; 1; 1)$. Kiểm phương trình 2: $0 + 6 + 1 + 3 = 10$.

Each pair $(s; t)$ gives a particular solution, e.g. $s = 1, t = 1$ gives $(0; 2; 1; 1)$. Check equation 2: $0 + 6 + 1 + 3 = 10$.

Ví dụ 2.7. Hệ vô nghiệm — Example 2.7. An inconsistent system

Giữ vế trái của Ví dụ 2.6, đổi vế phải phương trình 3 thành 15. Cùng các phép biến đổi, dòng cuối trở thành $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 2]$, tức $0 = 2$: vô lý. Hệ vô nghiệm. Nguyên nhân: vế trái phương trình 3 bằng tổng vế trái hai phương trình đầu, nhưng vế phải $15 \neq 3 + 10$.

Keep the left-hand sides of Example 2.6 and change the right-hand side of equation 3 to 15. The same operations turn the last row into $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 2]$, i.e. $0 = 2$: a contradiction. The system has no solution. Reason: the left side of equation 3 is the sum of the first two, but $15 \neq 3 + 10$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Ba lỗi khi khử Gauss: (1) biến đổi dòng của A nhưng **quên biến đổi cột vế phải**; (2) viết $d_2 - 2d_1$ nhưng tính $2d_1 - d_2$ ở vài phần tử, làm đảo dấu cả dòng một cách lẫn lộn; (3) **nhân một dòng với 0** hoặc chia cho một biểu thức có thể bằng 0 (ví dụ chia cho $m - 2$ khi chưa xét $m = 2$). Phép thứ ba làm mất phương trình và đổi tập nghiệm.

Three elimination errors: (1) operating on the rows of A but **forgetting the right-hand column**; (2) writing $r_2 - 2r_1$ but computing $2r_1 - r_2$ in some entries, flipping signs inconsistently; (3) **multiplying a row by 0** or dividing by an expression that may vanish (e.g. dividing by $m - 2$ before treating $m = 2$). The third loses an equation and changes the solution set.

2.5. Định lý Kronecker–Capelli và biện luận số nghiệm — The Kronecker–Capelli theorem and the number of solutions

Hạng của ma trận $r(A)$ là số dòng khác 0 trong dạng bậc thang của A (Chương 1). Vì $\bar{A}$ chỉ hơn A một cột nên $r(A) \leq r(\bar{A}) \leq r(A) + 1$. So sánh hai hạng này với số ẩn n cho biết ngay số nghiệm, không cần giải hết.

The rank $r(A)$ is the number of non-zero rows in an echelon form of A (Chapter 1). Since $\bar{A}$ has one more column than A, $r(A) \leq r(\bar{A}) \leq r(A) + 1$. Comparing these ranks with the number of unknowns n tells the number of solutions without solving completely.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Định lý Kronecker–Capelli. Hệ $AX = B$ (m phương trình, n ẩn) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\bar{A})$. Khi đó:

- $r(A) = r(\bar{A}) = n$: nghiệm **duy nhất**;
- $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$: **vô số nghiệm**, với $n - r$ ẩn tự do;
- $r(A) < r(\bar{A})$: hệ **vô nghiệm**.

Kronecker–Capelli theorem. The system $AX = B$ (m equations, n unknowns) is consistent if and only if $r(A) = r(\bar{A})$. In that case:

- $r(A) = r(\bar{A}) = n$: a **unique** solution;
- $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$: **infinitely many** solutions, with $n - r$ free variables;
- $r(A) < r(\bar{A})$: **no** solution.

$$\text{Có nghiệm} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}); \quad \text{số ẩn tự do} = n - r \quad (2.8)$$

So sánh hạng <i>Rank comparison</i>	Số nghiệm <i>Solutions</i>	Dấu hiệu trên bậc thang <i>Echelon sign</i>	Ví dụ trong chương <i>Example in this chapter</i>
$r(A) = r(\bar{A}) = n$	Duy nhất <i>Unique</i>	Mỗi cột ẩn đều có trụ <i>Every unknown column has a pivot</i>	Ví dụ 2.5: $r = 3 = n$ <i>Example 2.5: $r = 3 = n$</i>
$r(A) = r(\bar{A}) < n$	Vô số, $n - r$ tham số <i>Infinitely many, $n - r$ parameters</i>	Có cột ẩn không có trụ <i>Some unknown column has no pivot</i>	Ví dụ 2.6: $r = 2, n = 4, 2$ tham số <i>Example 2.6: $r = 2, n = 4, 2$ parameters</i>
$r(A) < r(\bar{A})$	Vô nghiệm <i>None</i>	Có dòng $[0 \dots 0 \mid c], c \neq 0$ <i>A row $[0 \dots 0 \mid c], c \neq 0$</i>	Ví dụ 2.7: $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$ <i>Example 2.7: $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$</i>

Hệ quả cho hệ vuông ($m = n$): $\det A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất với **mọi** vế phải B . Khi $\det A = 0$ thì $r(A) < n$, hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm tùy B . Hệ có số phương trình ít hơn số ẩn ($m < n$) không bao giờ có nghiệm duy nhất, vì $r(A) \leq m < n$.

*Corollary for square systems ($m = n$): $\det A \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow$ a unique solution for **every** right-hand side B . When $\det A = 0$, $r(A) < n$ and the system has no solution or infinitely many, depending on B . A system with fewer equations than unknowns ($m < n$) never has a unique solution, since $r(A) \leq m < n$.*

Quy trình giải và biện luận theo tham số — *Solving and discussing in terms of a parameter*

1. Khử Gauss trên $\bar{A}$, giữ tham số trong các phần tử; chỉ chọn trụ là các số khác 0 chắc chắn (không chứa tham số) cho tới khi buộc phải dùng phần tử có tham số.
Eliminate on $\bar{A}$ keeping the parameter in the entries; choose as pivots only numbers that are certainly non-zero (parameter-free) until a parameter-dependent entry must be used.
2. Tìm các giá trị tham số làm phần tử trụ chứa tham số bằng 0; đó là các trường hợp đặc biệt.
Find the parameter values that make a parameter-dependent pivot zero; these are the special cases.
3. Trường hợp tổng quát (trụ $\neq 0$): tính hạng, giải nghiệm theo tham số.
General case (pivot $\neq 0$): compute ranks and solve in terms of the parameter.
4. Từng trường hợp đặc biệt: thay số vào bậc thang, so sánh $r(A)$ với $r(\bar{A})$, kết luận theo (2.8).
Each special case: substitute into the echelon form, compare $r(A)$ with $r(\bar{A})$ and conclude by (2.8).

Ví dụ 2.8. Biện luận theo hai tham số — *Example 2.8. Discussion with two parameters*

Biện luận theo m và k hệ: $x + 2y - z = 3; 2x + 5y + z = 8; 3x + 7y + mz = k$.

Discuss, in terms of m and k , the system: $x + 2y - z = 3; 2x + 5y + z = 8; 3x + 7y + mz = k$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & m & k \end{array} \right] \begin{array}{l} d_2 - 2d_1; \\ d_3 - 3d_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & m+3 & k-9 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ d_3 - d_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & m & k-11 \end{array} \right]$$

Trường hợp Case	Hạng Ranks	Kết luận Conclusion
$m \neq 0$ (k tùy ý) $m \neq 0$ (any k)	$r(A) = r(\bar{A}) = 3$	Duy nhất: $z = (k - 11)/m$, $y = 2 - 3z$, $x = 3 - 2y + z$ <i>Unique: $z = (k - 11)/m$, $y = 2 - 3z$, $x = 3 - 2y + z$</i>
$m = 0, k = 11$	$r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$	Vô số nghiệm: $z = t$, $y = 2 - 3t$, $x = -1 + 7t$ <i>Infinitely many: $z = t$, $y = 2 - 3t$, $x = -1 + 7t$</i>
$m = 0, k \neq 11$	$r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3$	Vô nghiệm (dòng cuối $0 = k - 11 \neq 0$) <i>None (last row $0 = k - 11 \neq 0$)</i>

Thử trường hợp $m = 1, k = 13$: $z = 2, y = 2 - 6 = -4, x = 3 + 8 + 2 = 13$. Kiểm phương trình 3: $39 - 28 + 2 = 13$. Trường hợp $m = 0, k = 11$, chọn $t = 1$: $(6; -1; 1)$; kiểm phương trình 1: $6 - 2 - 1 = 3$.

Try $m = 1, k = 13$: $z = 2, y = 2 - 6 = -4, x = 3 + 8 + 2 = 13$. Check equation 3: $39 - 28 + 2 = 13$. In the case $m = 0, k = 11$, take $t = 1$: $(6; -1; 1)$; check equation 1: $6 - 2 - 1 = 3$.

Ví dụ 2.8b. Hệ nhiều phương trình hơn ẩn: kế hoạch có khả thi không — Example 2.8b. More equations than unknowns: is the plan feasible?

Xưởng may Thành Công làm hai mã áo sơ mi, x và y (chục chiếc mỗi ngày). Một chục áo mã 1 cần 2 giờ cắt, 1 giờ may, 1 giờ đóng gói; một chục áo mã 2 cần 1 giờ cắt, 3 giờ may, 1 giờ đóng gói. Xưởng muốn dùng hết 100 giờ cắt, 150 giờ may và c giờ đóng gói. Hệ: $2x + y = 100$; $x + 3y = 150$; $x + y = c$ (3 phương trình, 2 ẩn).

Thành Công garment workshop makes two shirt styles, x and y (tens of shirts a day). Ten shirts of style 1 need 2 cutting hours, 1 sewing hour and 1 packing hour; ten of style 2 need 1, 3 and 1. The workshop wants to use exactly 100 cutting hours, 150 sewing hours and c packing hours. System: $2x + y = 100$; $x + 3y = 150$; $x + y = c$ (3 equations, 2 unknowns).

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 150 \\ 2 & 1 & 100 \\ 1 & 1 & c \end{array} \right] \begin{array}{l} d_1 \leftrightarrow d_2; d_2 - 2d_1; d_3 - \\ d_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 150 \\ 0 & -5 & -200 \\ 0 & -2 & c - 150 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ d_3 - (2/5)d_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 150 \\ 0 & -5 & -200 \\ 0 & 0 & c - 70 \end{array} \right]$$

$r(A) = 2 = n$. Nếu $c = 70$ thì $r(\bar{A}) = 2$: nghiệm duy nhất $y = 40$, $x = 150 - 120 = 30$ (300 áo mã 1, 400 áo mã 2). Nếu $c \neq 70$ thì $r(\bar{A}) = 3 > r(A)$: không có kế hoạch nào dùng hết đúng cả ba nguồn giờ. Ý nghĩa: hai khâu cắt và may đã chốt sản lượng; khâu đóng gói phải có đúng 70 giờ, thừa thì bỏ trống, thiếu thì không thực hiện được kế hoạch.

$r(A) = 2 = n$. If $c = 70$ then $r(\bar{A}) = 2$: unique solution $y = 40$, $x = 150 - 120 = 30$ (300 shirts of style 1, 400 of style 2). If $c \neq 70$ then $r(\bar{A}) = 3 > r(A)$: no plan uses all three sets of hours exactly. Meaning: cutting and sewing already fix output; packing must have exactly 70 hours — any surplus sits idle, any shortfall makes the plan infeasible.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — So sánh hạng với **số phương trình** thay vì **số ẩn**. Hệ 3 phương trình, 4 ẩn có $r(A) = r(\bar{A}) = 3$ vẫn có vô số nghiệm ($4 - 3 = 1$ ẩn tự do), không phải nghiệm duy nhất. Số ẩn tự do luôn là $n - r$, với n là số ẩn.

Comparing the rank with the **number of equations** instead of the **number of unknowns**. A system of 3 equations in 4 unknowns with $r(A) = r(\bar{A}) = 3$ still has infinitely many solutions ($4 - 3 = 1$ free variable), not a unique one. The number of free variables is always $n - r$, where n counts unknowns.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Khi biện luận, chia cả dòng cho biểu thức chứa tham số (như m) rồi quên xét riêng giá trị làm biểu thức đó bằng 0. Ở Ví dụ 2.8, viết luôn $z = (k - 11)/m$ sẽ bỏ sót cả hai trường hợp $m = 0$.

When discussing, dividing a row by a parameter-dependent expression (such as m) and forgetting to treat separately the value that makes it zero. In Example 2.8, writing $z = (k - 11)/m$ at once misses both $m = 0$ cases.

2.6. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất — Homogeneous linear systems

Hệ **thuần nhất** có mọi hệ số tự do bằng 0: $AX = O$. Cột vế phải toàn 0 nên $r(A) = r(\bar{A})$ luôn đúng; hệ thuần nhất **luôn có nghiệm**, ít nhất là nghiệm $X = O$ (mọi ẩn bằng 0), gọi là **nghiệm tầm thường**. Câu hỏi đúng với hệ thuần nhất là: hệ có **nghiệm không tầm thường** hay không.

A **homogeneous** system has all constants equal to zero: $AX = O$. The right-hand column is zero, so $r(A) = r(\bar{A})$ always holds; a homogeneous system **is always consistent**, having at least $X = O$ (every unknown zero), the **trivial solution**. The right question for a homogeneous system is whether it has a **non-trivial solution**.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hệ thuần nhất $AX = O$, n ẩn:

- chỉ có nghiệm tầm thường $\Leftrightarrow r(A) = n$;
- có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow r(A) < n$; khi đó có vô số nghiệm;
- hệ vuông: có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det A = 0$;
- số phương trình ít hơn số ẩn ($m < n$): **luôn** có nghiệm không tầm thường.

Khi $r(A) = r < n$, tập nghiệm có một **hệ nghiệm cơ bản** gồm $n - r$ nghiệm độc lập tuyến tính $U_1, \dots, U_{n-r}$; mọi nghiệm là tổ hợp tuyến tính của chúng.

Homogeneous system $AX = O$ in n unknowns:

- *only the trivial solution $\Leftrightarrow r(A) = n$;*
- *a non-trivial solution $\Leftrightarrow r(A) < n$; then there are infinitely many;*
- *square system: a non-trivial solution $\Leftrightarrow \det A = 0$;*
- *fewer equations than unknowns ($m < n$): always a non-trivial solution.*

*When $r(A) = r < n$, the solution set has a **fundamental system of solutions** of $n - r$ linearly independent solutions $U_1, \dots, U_{n-r}$; every solution is a linear combination of them.*

$$X = t_1 U_1 + t_2 U_2 + \dots + t_{n-r} U_{n-r}, \quad t_i \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

Cách lấy hệ nghiệm cơ bản: giải ẩn cơ sở theo ẩn tự do; lần lượt cho **một** ẩn tự do bằng 1, các ẩn tự do khác bằng 0, mỗi lần được một vector U_i .

*How to get a fundamental system: solve the basic variables in terms of the free ones; set **one** free variable to 1 and the others to 0 in turn, giving one vector U_i each time.*

Ví dụ 2.9. Tìm tham số để có nghiệm không tầm thường — *Example 2.9. Finding the parameter for a non-trivial solution*

Tìm m để hệ $x + y - z = 0$; $2x + 3y + z = 0$; $x + 2y + mz = 0$ có nghiệm không tầm thường, rồi tìm nghiệm.

Find m so that $x + y - z = 0$; $2x + 3y + z = 0$; $x + 2y + mz = 0$ has a non-trivial solution, then find it.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = (3m - 2) - (2m - 1) - 1 = m - 2$$

Hệ vuông nên có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Với $m = 2$, khử: $d_2 - 2d_1$ cho $y + 3z = 0$; $d_3 - d_1$ cho $y + 3z = 0$, trùng nhau. $r(A) = 2$, có $3 - 2 = 1$ ẩn tự do. Đặt $z = t$: $y = -3t$, $x = -y + z = 4t$. Nghiệm $X = t(4; -3; 1)$; hệ nghiệm cơ bản gồm một vector $U_1 = (4; -3; 1)$. Kiểm phương trình 3: $4 - 6 + 2 = 0$. Với $m \neq 2$ hệ chỉ có nghiệm tầm thường.

The system is square, so a non-trivial solution exists $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow m = 2$. With $m = 2$, eliminate: $r_2 - 2r_1$ gives $y + 3z = 0$; $r_3 - r_1$ gives $y + 3z = 0$, the same. $r(A) = 2$, with $3 - 2 = 1$

free variable. Put $z = t$: $y = -3t$, $x = -y + z = 4t$. Solution $X = t(4; -3; 1)$; the fundamental system is the single vector $U_1 = (4; -3; 1)$. Check equation 3: $4 - 6 + 2 = 0$. For $m \neq 2$ only the trivial solution exists.

Ví dụ 2.10. Hệ nghiệm cơ bản có hai vector — *Example 2.10. A fundamental system with two vectors*

Giải hệ $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$; $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 0$. Hai phương trình, bốn ẩn nên chắc chắn có nghiệm không tầm thường. Lấy $d_2 - 2d_1$: $3x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_4$. Thế vào d_1 : $x_1 = -2x_2 - 2x_4$. Ấn tự do x_2, x_4 .

Solve $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$; $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 0$. Two equations in four unknowns, so a non-trivial solution is certain. $r_2 - 2r_1$: $3x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_4$. Substituting into r_1 : $x_1 = -2x_2 - 2x_4$. Free variables x_2, x_4 .

Chọn ẩn tự do <i>Free variables</i>	Vector nghiệm <i>Solution vector</i>
$x_2 = 1, x_4 = 0$	$U_1 = (-2; 1; 0; 0)$
$x_2 = 0, x_4 = 1$	$U_2 = (-2; 0; -1; 1)$
Nghiệm tổng quát <i>General solution</i>	$X = aU_1 + bU_2 = (-2a - 2b; a; -b; b)$ $X = aU_1 + bU_2 = (-2a - 2b; a; -b; b)$

Cấu trúc nghiệm của hệ không thuần nhất — *Structure of the solutions of a non-homogeneous system*

Nếu X_0 là một nghiệm riêng của $AX = B$ thì mọi nghiệm của $AX = B$ có dạng $X_0 + Y$, với Y là nghiệm của hệ thuần nhất $AX = O$ cùng ma trận A . Lý do: $A(X - X_0) = B - B = O$.

If X_0 is a particular solution of $AX = B$, every solution of $AX = B$ has the form $X_0 + Y$, where Y solves the homogeneous system $AX = O$ with the same A . Reason: $A(X - X_0) = B - B = O$.

$$X = X_0 + t_1U_1 + \dots + t_{n-r}U_{n-r} \quad (2.10)$$

Đôi chiếu với (2.7) ở Ví dụ 2.6: $X = (-1; 4; 0; 0) + s(4; -3; 1; 0) + t(-3; 1; 0; 1)$. Vector đầu là nghiệm riêng ($s = t = 0$); hai vector sau là hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng.

Compare with (2.7) in Example 2.6: $X = (-1; 4; 0; 0) + s(4; -3; 1; 0) + t(-3; 1; 0; 1)$. The first vector is a particular solution ($s = t = 0$); the other two form a fundamental system of the associated homogeneous system.

Ví dụ 2.11. Mô hình trao đổi ba ngành — *Example 2.11. A three-sector exchange model*

Một nền kinh tế khép kín gồm ba ngành: nông nghiệp (1), công nghiệp (2), dịch vụ (3). Toàn bộ sản phẩm của mỗi ngành được ba ngành dùng hết. Gọi e_{ij} là tỷ lệ sản phẩm của ngành j do ngành i mua; mỗi cột của ma trận trao đổi E có tổng bằng 1. Gọi p_j là giá trị sản phẩm (thu nhập) của ngành j . Cân bằng khi chi tiêu của mỗi ngành bằng thu nhập của nó: $e_{i1}p_1 + e_{i2}p_2 + e_{i3}p_3 = p_i$, tức $Ep = p$, hay $(I - E)p = O$.

A closed economy has three sectors: agriculture (1), industry (2), services (3). Each sector's entire output is used by the three sectors. Let e_{ij} be the share of sector j 's output bought by sector i ; each column of the exchange matrix E sums to 1. Let p_j be the value of sector j 's output (its income). Equilibrium requires each sector's spending to equal its income: $e_{i1}p_1 + e_{i2}p_2 + e_{i3}p_3 = p_i$, i.e. $Ep = p$, or $(I - E)p = 0$.

$$E = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \quad e_{1j} + e_{2j} + e_{3j} = 1$$

Nhân hệ $(I - E)p = 0$ với 10 để bỏ số thập phân:

Multiply $(I - E)p = 0$ by 10 to clear decimals:

$$10(I - E) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \det = 0$$

Tổng ba dòng bằng dòng 0 (do mỗi cột của E có tổng 1), nên $\det = 0$ và hệ có nghiệm không tầm thường. Khử: chia d_2 cho -3 được $[1 \ -2 \ 1]$; đưa lên đầu. $d_1 - 5 \cdot$ (dòng mới) cho $[0 \ 7 \ -6]$; $d_3 + 2 \cdot$ (dòng mới) cho $[0 \ -7 \ 6]$; dòng cuối thành 0. $r = 2$, một ẩn tự do. Đặt $p_3 = 7t$: $7p_2 = 6p_3 \Rightarrow p_2 = 6t$; $p_1 = 2p_2 - p_3 = 5t$.

The three rows add up to the zero row (each column of E sums to 1), so $\det = 0$ and a non-trivial solution exists. Eliminate: dividing r_2 by -3 gives $[1 \ -2 \ 1]$; move it to the top. $r_1 - 5 \cdot$ (new row) gives $[0 \ 7 \ -6]$; $r_3 + 2 \cdot$ (new row) gives $[0 \ -7 \ 6]$; the last row vanishes. $r = 2$, one free variable. Put $p_3 = 7t$: $7p_2 = 6p_3 \Rightarrow p_2 = 6t$; $p_1 = 2p_2 - p_3 = 5t$.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Kết luận Ví dụ 2.11: $p = t(5; 6; 7)$, $t > 0$. Cân bằng chỉ xác định **tỷ lệ** giá trị sản phẩm giữa ba ngành là $5 : 6 : 7$, không xác định mức tuyệt đối. Nếu tổng giá trị là 900 nghìn tỷ đồng thì $18t = 900$, $t = 50$: nông nghiệp 250, công nghiệp 300, dịch vụ 350 nghìn tỷ đồng. Kiểm dòng 1 của Ep : $0,5 \cdot 250 + 0,3 \cdot 300 + 0,1 \cdot 350 = 125 + 90 + 35 = 250$.

Conclusion of Example 2.11: $p = t(5; 6; 7)$, $t > 0$. Equilibrium fixes only the **ratio** of output values, $5 : 6 : 7$, not their absolute level. If total value is VND 900 trillion, then $18t = 900$, $t = 50$: agriculture 250, industry 300, services 350 trillion. Check row 1 of Ep : $0.5 \cdot 250 + 0.3 \cdot 300 + 0.1 \cdot 350 = 125 + 90 + 35 = 250$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Kết luận “hệ thuần nhất vô nghiệm” khi thấy $\det A \neq 0$, hoặc “hệ thuần nhất có nghiệm duy nhất nên không có nghiệm”. Hệ thuần nhất **không bao giờ vô nghiệm**: $\det A \neq 0$ nghĩa là chỉ có nghiệm tầm thường $X = 0$. Một lỗi đi kèm: cho mọi ẩn tự do bằng 0 để lập hệ nghiệm cơ bản, được vector 0 , không phải vector cơ bản.

Concluding “the homogeneous system has no solution” when $\det A \neq 0$, or “it has a unique solution, so no solution”. A homogeneous system is **never inconsistent**: $\det A \neq 0$ means only the trivial solution $X = 0$. A related error: setting all free variables to 0 to build a fundamental system, which gives the zero vector, not a basis vector.

2.7. Chọn phương pháp và kiểm bằng máy — Choosing a method and checking by computer

Phương pháp <i>Method</i>	Điều kiện dùng <i>When it applies</i>	Khối lượng tính <i>Workload</i>	Nên dùng khi <i>Best used when</i>
Cramer <i>Cramer's rule</i>	Hệ vuông, $\det A \neq 0$ <i>Square, $\det A \neq 0$</i>	$n + 1$ định thức cấp n <i>$n + 1$ determinants of order n</i>	Hệ 2–3 ẩn; cần riêng một ẩn <i>2–3 unknowns; only one unknown needed</i>
Ma trận nghịch đảo <i>Inverse matrix</i>	Hệ vuông, $\det A \neq 0$ <i>Square, $\det A \neq 0$</i>	Một A^{-1} rồi phép nhân <i>One A^{-1}, then multiplication</i>	Cùng A , nhiều vế phải B <i>Same A, many right-hand sides B</i>
Gauss <i>Gaussian elimination</i>	Mọi hệ <i>Any system</i>	Ít nhất khi n lớn <i>Least for large n</i>	Hệ không vuông, $\det A = 0$, biện luận <i>Non-square, $\det A = 0$, discussion</i>
Kronecker–Capelli	Mọi hệ <i>Any system</i>	Tính hai hạng (qua Gauss) <i>Two ranks (via elimination)</i>	Chỉ hỏi số nghiệm <i>Only the number of solutions is asked</i>

Tự kiểm bằng tay trước khi nộp bài — Checking by hand before handing in

- Thay nghiệm vào **phương trình gốc**, không thay vào hệ đã biến đổi: lỗi khử nằm ngay trong hệ biến đổi.
*Substitute the solution into the **original equations**, not the transformed ones: elimination errors live in the transformed system.*
- Với hệ vô số nghiệm, thử hai bộ tham số khác nhau (ví dụ $t = 0$ và $t = 1$); cả hai phải thỏa mọi phương trình.
For infinitely many solutions, try two different parameter values (e.g. $t = 0$ and $t = 1$); both must satisfy every equation.
- Đếm: số ẩn tự do trong đáp số phải bằng $n - r$. Thừa hoặc thiếu tham số là dấu hiệu sai hạng.
Count: the number of free variables in the answer must equal $n - r$. Too many or too few parameters signals a wrong rank.
- Bài kinh tế: nghiệm phải có nghĩa (sản lượng, số tiền không âm, đúng đơn vị). Nghiệm âm có hai khả năng: tính sai, hoặc kế hoạch không khả thi như ở Bài 1 phần câu hỏi cuối chương.
Economic problems: the solution must make sense (non-negative outputs and amounts, correct units). A negative value means either an arithmetic error or an infeasible plan, as in Exercise 1 at the end of the chapter.

Đoạn mã dưới giải lại Ví dụ 2.3 (numpy), Ví dụ 2.6 (sympy, nghiệm tổng quát) và Ví dụ 2.9 (định thức theo tham số, nghiệm không tầm thường). Chạy bằng python3 sau khi cài numpy và sympy.

The code below re-solves Example 2.3 (numpy), Example 2.6 (sympy, general solution) and Example 2.9 (parameter determinant, non-trivial solution). Run it with python3 after installing numpy and sympy.

```
import numpy as np
import sympy as sp

A = np.array([[2, 1, 3], [1, 2, 1], [3, 1, 2]])
B = np.array([17, 12, 19])
print(round(np.linalg.det(A), 6))          # -8.0
print(np.linalg.solve(A, B))              # [4. 3. 2.]

M = sp.Matrix([[1, 1, -1, 2], [2, 3, 1, 3], [3, 4, 0, 5]])
B2 = sp.Matrix([3, 10, 13])
print(M.rank(), M.row_join(B2).rank())    # 2 2
x1, x2, x3, x4 = sp.symbols('x1 x2 x3 x4')
print(sp.linsolve((M, B2), x1, x2, x3, x4))
# {(4*x3 - 3*x4 - 1, -3*x3 + x4 + 4, x3, x4)}

m = sp.symbols('m')
C = sp.Matrix([[1, 1, -1], [2, 3, 1], [1, 2, m]])
print(C.det())                           # m - 2
print(list(C.subs(m, 2).nullspace()[0])) # [4, -3, 1]
```

Đọc kết quả: dòng 2 của sympy cho $x_1 = 4x_3 - 3x_4 - 1$, $x_2 = -3x_3 + x_4 + 4$, khớp (2.7) với $s = x_3$, $t = x_4$. Hàm `np.linalg.solve` báo lỗi khi $\det A = 0$; gặp hệ suy biến thì dùng `sp.linsolve`, hàm này trả về nghiệm tổng quát hoặc tập rỗng (`EmptySet`) khi hệ vô nghiệm.

Reading the output: sympy gives $x_1 = 4x_3 - 3x_4 - 1$, $x_2 = -3x_3 + x_4 + 4$, matching (2.7) with $s = x_3$, $t = x_4$. `np.linalg.solve` raises an error when $\det A = 0$; for a singular system use `sp.linsolve`, which returns the general solution or the empty set (`EmptySet`) when there is no solution.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tin ngay kết quả số thực của máy:

`np.linalg.det` có thể in $-7,999999999999998$ thay vì -8 do sai số dấu phẩy động, và với ma trận gần suy biến có thể in một số cỡ $1e-16$ thay cho 0. Làm tròn trước khi so sánh, hoặc dùng sympy (tính chính xác bằng phân số) khi cần kết luận $\det A = 0$.

Trusting floating-point output blindly: `np.linalg.det` may print -7.999999999999998 instead of -8 because of rounding, and for a nearly singular matrix it may print something like $1e-16$ instead of 0. Round before comparing, or use sympy (exact rational arithmetic) when you need to conclude $\det A = 0$.

2.8. Bảng tổng hợp công thức — Summary of formulas

Công thức Formula	Ý nghĩa Meaning
$AX = B; \bar{A} = [A \mid B]$ $AX = B; \bar{A} = [A \mid B]$	Dạng ma trận; mỗi dòng một ràng buộc, mỗi cột một ẩn Matrix form; one row per constraint, one column per unknown
$x_j = D_j/D, D \neq 0$	Quy tắc Cramer; D_j : thay cột j bằng B Cramer's rule; D_j : column j replaced by B

Công thức <i>Formula</i>	Ý nghĩa <i>Meaning</i>
$D = ad - bc; D_1 = ed - bf; D_2 = af - ec$	Cramer cho hệ hai ẩn $ax + by = e; cx + dy = f$ <i>Cramer for $ax + by = e; cx + dy = f$</i>
$X = A^{-1}B$	Nghiệm của $AX = B$ khi $\det A \neq 0$ <i>Solution of $AX = B$ when $\det A \neq 0$</i>
$X = BA^{-1}$	Nghiệm của $XA = B$ khi $\det A \neq 0$ <i>Solution of $XA = B$ when $\det A \neq 0$</i>
$\Delta X = A^{-1}\Delta B$	Thay đổi phương án khi nguồn lực đổi ΔB ; cột j của A^{-1} là tác động của một đơn vị nguồn lực j <i>Plan change when resources change by ΔB; column j of A^{-1} is the effect of one unit of resource j</i>
$r(A) = r(\bar{A})$	Điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm <i>Necessary and sufficient for consistency</i>
$r = n; r < n$	Nghiệm duy nhất; vô số nghiệm với $n - r$ ẩn tự do <i>Unique; infinitely many with $n - r$ free variables</i>
$AX = O$ có nghiệm $\neq O \Leftrightarrow r(A) < n$ <i>$AX = O$ has $X \neq O \Leftrightarrow r(A) < n$</i>	Hệ vuông: $\Leftrightarrow \det A = 0$ <i>Square system: $\Leftrightarrow \det A = 0$</i>
$X = X_0 + t_1U_1 + \dots + t_{n-r}U_{n-r}$	Nghiệm riêng cộng nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất <i>Particular solution plus general homogeneous solution</i>
$(I - E)p = O$	Mô hình trao đổi: chỉ xác định tỷ lệ giá trị giữa các ngành <i>Exchange model: only the ratio of sector values is determined</i>

2.9. Thuật ngữ Việt – Anh — Vietnamese – English glossary

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hệ phương trình tuyến tính	System of linear equations	Các phương trình bậc nhất theo cùng các ẩn <i>First-degree equations in the same unknowns</i>
Ma trận hệ số	Coefficient matrix	Ma trận A gồm các a_{ij} <i>The matrix A of the a_{ij}</i>
Ma trận bổ sung (mở rộng)	Augmented matrix	$[A \mid B]$, thêm cột về phải <i>$[A \mid B]$, with the right-hand column</i>
Hệ số tự do, về phải	Constant term, right-hand side	Các b_i , vectơ B <i>The b_i, the vector B</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hệ tương thích	Consistent system	Hệ có ít nhất một nghiệm <i>A system with at least one solution</i>
Hệ không tương thích	Inconsistent system	Hệ vô nghiệm <i>A system with no solution</i>
Hệ Cramer	Cramer system	Hệ vuông có $\det A \neq 0$ <i>Square system with $\det A \neq 0$</i>
Quy tắc Cramer	Cramer's rule	$x_j = D_j/D$
Phép biến đổi sơ cấp trên dòng	Elementary row operation	Đổi chỗ, nhân $k \neq 0$, cộng bội dòng <i>Swap, scale by $k \neq 0$, add a multiple of a row</i>
Ma trận bậc thang	Row echelon form	Trụ dịch dần sang phải, dòng 0 ở dưới <i>Pivots move right, zero rows at the bottom</i>
Bậc thang rút gọn	Reduced row echelon form	Trụ bằng 1, cột trụ còn lại bằng 0 <i>Pivots equal 1, rest of pivot column zero</i>
Phần tử trụ	Pivot	Phần tử khác 0 đầu tiên của dòng <i>First non-zero entry of a row</i>
Phương pháp khử Gauss	Gaussian elimination	Đưa $\bar{A}$ về bậc thang rồi thế ngược <i>Reduce $\bar{A}$ to echelon form, then back-substitute</i>
Thế ngược	Back substitution	Giải từ dòng cuối lên <i>Solve from the last row upwards</i>
Hạng của ma trận	Rank of a matrix	Số dòng khác 0 của dạng bậc thang <i>Number of non-zero echelon rows</i>
Định lý Kronecker–Capelli	Kronecker–Capelli (Rouché–Capelli) theorem	Có nghiệm $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$ <i>Consistent $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$</i>
Ẩn cơ sở	Basic (leading) variable	Ẩn ứng với cột có trụ <i>Unknown in a pivot column</i>
Ẩn tự do	Free variable	Ẩn nhận giá trị tùy ý, số lượng $n - r$ <i>Unknown taking any value; $n - r$ of them</i>
Nghiệm tổng quát	General solution	Công thức mô tả mọi nghiệm <i>Formula describing every solution</i>
Nghiệm riêng	Particular solution	Một nghiệm cụ thể <i>One specific solution</i>
Hệ thuần nhất	Homogeneous system	$AX = O$
Nghiệm tầm thường	Trivial solution	$X = O$

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hệ nghiệm cơ bản	Fundamental system of solutions	$n - r$ nghiệm độc lập sinh ra mọi nghiệm của $AX = O$ <i>$n - r$ independent solutions spanning $AX = O$</i>
Mô hình trao đổi	Exchange (closed Leontief) model	$(I - E)p = O$, cột E có tổng 1 <i>$(I - E)p = O$, columns of E sum to 1</i>

2.10. Bài tập vận dụng có lời giải — *Applied exercises with solutions*

Bài 1. Kế hoạch sản xuất dùng hết công suất ba khâu — *Exercise 1. A production plan that uses all capacity in three stages*

Xưởng nội thất An Phú (TP.HCM) làm ba sản phẩm: kệ sách, bàn làm việc và tủ áo. Mỗi sản phẩm đi qua ba khâu cắt, lắp ráp và sơn. Số giờ máy cần cho một sản phẩm: kệ sách cần 2 giờ cắt, 1 giờ lắp, 1 giờ sơn; bàn làm việc cần 3 giờ cắt, 2 giờ lắp, 1 giờ sơn; tủ áo cần 4 giờ cắt, 2 giờ lắp, 3 giờ sơn. Mỗi tuần xưởng có 160 giờ cắt, 90 giờ lắp và 80 giờ sơn. (a) Lập hệ phương trình và tìm số sản phẩm mỗi loại để dùng hết số giờ của cả ba khâu. (b) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận hệ số. (c) Nếu xưởng thuê thêm 10 giờ sơn mỗi tuần thì kế hoạch dùng hết công suất thay đổi thế nào? (d) Nếu thay vào đó thuê thêm 10 giờ lắp ráp thì sao?

An Phú furniture workshop (Ho Chi Minh City) makes three products: bookshelves, desks and wardrobes. Each passes through three stages: cutting, assembly and painting. Machine hours per unit: a bookshelf needs 2 hours of cutting, 1 of assembly, 1 of painting; a desk needs 3, 2 and 1; a wardrobe needs 4, 2 and 3. Each week the workshop has 160 cutting hours, 90 assembly hours and 80 painting hours. (a) Set up the system and find how many units of each product use up all hours in the three stages. (b) Find the inverse of the coefficient matrix. (c) If the workshop hires 10 extra painting hours a week, how does the full-capacity plan change? (d) What if it hires 10 extra assembly hours instead?

- Đặt ẩn: x_1, x_2, x_3 là số kệ sách, bàn làm việc, tủ áo mỗi tuần (chiếc). Mỗi khâu cho một phương trình “tổng giờ dùng = giờ sẵn có”: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 160$ (cắt); $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 90$ (lắp); $x_1 + x_2 + 3x_3 = 80$ (sơn). Dạng ma trận $AX = B$ với $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = (160; 90; 80)^T$.

Unknowns: x_1, x_2, x_3 are the weekly numbers of bookshelves, desks and wardrobes (units). Each stage gives one equation “hours used = hours available”: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 160$ (cutting); $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 90$ (assembly); $x_1 + x_2 + 3x_3 = 80$ (painting). In matrix form $AX = B$ with $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = (160; 90; 80)^T$.

- Khử Gauss trên $[A|B]$: đổi chỗ $d_1 \leftrightarrow d_2$ để có trụ bằng 1, được $[1 \ 2 \ 2 \ | \ 90; 2 \ 3 \ 4 \ | \ 160; 1 \ 1 \ 3 \ | \ 80]$. Lấy $d_2 - 2d_1$ và $d_3 - d_1$: $[1 \ 2 \ 2 \ | \ 90; 0 \ -1 \ 0 \ | \ -20; 0 \ -1 \ 1 \ | \ -10]$. Lấy $d_3 - d_2$: $[1 \ 2 \ 2 \ | \ 90; 0 \ -1 \ 0 \ | \ -20; 0 \ 0 \ 1 \ | \ 10]$. Thế ngược: $x_3 = 10$; $-x_2 = -20$ nên $x_2 = 20$; $x_1 = 90 - 2 \cdot 20 - 2 \cdot 10 = 30$.

Gaussian elimination on $[A|B]$: swap $r_1 \leftrightarrow r_2$ to get a pivot of 1: $[1 \ 2 \ 2 \ | \ 90; 2 \ 3 \ 4 \ | \ 160; 1 \ 1 \ 3 \ | \ 80]$. Apply $r_2 - 2r_1$ and $r_3 - r_1$: $[1 \ 2 \ 2 \ | \ 90; 0 \ -1 \ 0 \ | \ -20; 0 \ -1 \ 1 \ | \ -10]$. Apply $r_3 - r_2$: $[1 \ 2 \ 2 \ | \ 90; 0 \ -1 \ 0 \ | \ -20; 0 \ 0 \ 1 \ | \ 10]$.

$2 \ 2 \mid 90; 0 \ -1 \ 0 \mid -20; 0 \ 0 \ 1 \mid 10]$. Back substitution: $x_3 = 10$; $-x_2 = -20$ so $x_2 = 20$; $x_1 = 90 - 2 \cdot 20 - 2 \cdot 10 = 30$.

3. Kiểm lại: cắt $2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 160$; lắp $30 + 40 + 20 = 90$; sơn $30 + 20 + 30 = 80$.
Kế hoạch: 30 kệ sách, 20 bàn, 10 tủ áo mỗi tuần.

Check: cutting $2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 160$; assembly $30 + 40 + 20 = 90$; painting $30 + 20 + 30 = 80$. Plan: 30 bookshelves, 20 desks, 10 wardrobes per week.

4. Ma trận nghịch đảo: $\det A = 2(6 - 2) - 3(3 - 2) + 4(1 - 2) = 8 - 3 - 4 = 1$. Tính các phần bù đại số và chuyển vị, được $A^{-1} = [4 \ -5 \ -2; -1 \ 2 \ 0; -1 \ 1 \ 1]$. Kiểm: $A^{-1}B = (640 - 450 - 160; -160 + 180; -160 + 90 + 80) = (30; 20; 10)$, khớp với kết quả Gauss.

Inverse: $\det A = 2(6 - 2) - 3(3 - 2) + 4(1 - 2) = 8 - 3 - 4 = 1$. Computing the cofactors and transposing gives $A^{-1} = [4 \ -5 \ -2; -1 \ 2 \ 0; -1 \ 1 \ 1]$. Check: $A^{-1}B = (640 - 450 - 160; -160 + 180; -160 + 90 + 80) = (30; 20; 10)$, matching the Gaussian result.

5. Thêm 10 giờ sơn: B mới $= B + (0; 0; 10)$, nên X mới $= X + A^{-1}(0; 0; 10) = X + 10 \cdot (\text{cột 3 của } A^{-1}) = (30; 20; 10) + (-20; 0; 10) = (10; 20; 20)$. Kiểm: cắt $20 + 60 + 80 = 160$, lắp $10 + 40 + 40 = 90$, sơn $10 + 20 + 60 = 90$. Ý nghĩa: mỗi giờ sơn tăng thêm làm tăng 1 tủ áo và giảm 2 kệ sách khi vẫn dùng hết giờ cắt và giờ lắp.

Add 10 painting hours: new $B = B + (0; 0; 10)$, so new $X = X + A^{-1}(0; 0; 10) = X + 10 \cdot (\text{column 3 of } A^{-1}) = (30; 20; 10) + (-20; 0; 10) = (10; 20; 20)$. Check: cutting $20 + 60 + 80 = 160$, assembly $10 + 40 + 40 = 90$, painting $10 + 20 + 60 = 90$. Meaning: each extra painting hour adds 1 wardrobe and removes 2 bookshelves while cutting and assembly hours stay fully used.

6. Thêm 10 giờ lắp: X mới $= X + 10 \cdot (\text{cột 2 của } A^{-1}) = (30; 20; 10) + (-50; 20; 10) = (-20; 40; 20)$. Số kệ sách âm nên không có kế hoạch nào dùng hết đồng thời 160 giờ cắt, 100 giờ lắp và 80 giờ sơn. Kết luận kinh tế: thuê thêm giờ sơn khả thi; thuê thêm 10 giờ lắp thì sẽ có giờ lắp bỏ trống, khoản thuê này lãng phí nếu không đồng thời tăng giờ cắt.

Add 10 assembly hours: new $X = X + 10 \cdot (\text{column 2 of } A^{-1}) = (30; 20; 10) + (-50; 20; 10) = (-20; 40; 20)$. A negative number of bookshelves means no plan can use exactly 160 cutting, 100 assembly and 80 painting hours. Economic conclusion: hiring painting hours is feasible; hiring 10 assembly hours would leave assembly time idle, a wasted cost unless cutting hours rise as well.

Bài 2. Phân bổ vốn của quỹ vào ba loại tài sản — Exercise 2. Allocating a fund across three asset classes

Quỹ đầu tư Sông Hậu có 10 tỷ đồng chia vào trái phiếu doanh nghiệp (lợi suất 6%/năm), tiền gửi kỳ hạn (5%/năm) và cổ phiếu (lợi suất kỳ vọng 12%/năm). Ban điều hành đặt mục tiêu lợi nhuận kỳ vọng 0,68 tỷ đồng/năm và quy định số tiền vào cổ phiếu bằng một nửa số tiền vào trái phiếu. (a) Lập hệ và giải bằng quy tắc Cramer. (b) Nếu bỏ quy định về tỷ lệ cổ phiếu – trái phiếu thì hệ có bao nhiêu nghiệm? Tìm nghiệm tổng quát. (c) Với điều kiện số tiền mỗi loại không âm, số tiền vào cổ phiếu nằm trong khoảng nào? (d) Nêu một phương án khác thỏa (b) và (c).

The Sông Hậu investment fund splits VND 10 billion between corporate bonds (6% yield a year), term deposits (5% a year) and shares (12% expected return a year). Management targets an expected return of VND 0.68 billion a year and requires the amount in shares to equal half the amount in bonds. (a) Set up the system and solve it by Cramer's rule. (b) If the shares-to-bonds rule is dropped, how many solutions are there? Find the general solution. (c) With every amount non-negative, what range can the amount in shares take? (d) Give another allocation satisfying (b) and (c).

1. Đặt x, y, z là số tiền (tỷ đồng) vào trái phiếu, tiền gửi, cổ phiếu. Tổng vốn: $x + y + z = 10$. Lợi nhuận: $0,06x + 0,05y + 0,12z = 0,68$, nhân hai vế với 100: $6x + 5y + 12z = 68$. Tỷ lệ: $z = 0,5x$, tức $x - 2z = 0$.

Let x, y, z be the amounts (VND billion) in bonds, deposits and shares. Total capital: $x + y + z = 10$. Return: $0.06x + 0.05y + 0.12z = 0.68$; multiplying by 100 gives $6x + 5y + 12z = 68$. Ratio: $z = 0.5x$, i.e. $x - 2z = 0$.

2. Cramer: $D = \det[1 \ 1 \ 1; 6 \ 5 \ 12; 1 \ 0 \ -2] = 1(-10 - 0) - 1(-12 - 12) + 1(0 - 5) = 9 \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất. $D_1 = \det[10 \ 1 \ 1; 68 \ 5 \ 12; 0 \ 0 \ -2] = -2(50 - 68) = 36$; $D_2 = \det[1 \ 10 \ 1; 6 \ 68 \ 12; 1 \ 0 \ -2] = -136 + 240 - 68 = 36$; $D_3 = \det[1 \ 1 \ 10; 6 \ 5 \ 68; 1 \ 0 \ 0] = 68 - 50 = 18$.

Cramer: $D = \det[1 \ 1 \ 1; 6 \ 5 \ 12; 1 \ 0 \ -2] = 1(-10 - 0) - 1(-12 - 12) + 1(0 - 5) = 9 \neq 0$, so the solution is unique. $D_1 = \det[10 \ 1 \ 1; 68 \ 5 \ 12; 0 \ 0 \ -2] = -2(50 - 68) = 36$; $D_2 = \det[1 \ 10 \ 1; 6 \ 68 \ 12; 1 \ 0 \ -2] = -136 + 240 - 68 = 36$; $D_3 = \det[1 \ 1 \ 10; 6 \ 5 \ 68; 1 \ 0 \ 0] = 68 - 50 = 18$.

3. Nghiệm: $x = 36/9 = 4$, $y = 36/9 = 4$, $z = 18/9 = 2$ (tỷ đồng). Kiểm lợi nhuận: $0,24 + 0,20 + 0,24 = 0,68$ tỷ đồng, tức lợi suất bình quân 6,8%/năm.

Solution: $x = 36/9 = 4$, $y = 36/9 = 4$, $z = 18/9 = 2$ (VND billion). Return check: $0.24 + 0.20 + 0.24 = 0.68$ billion, an average yield of 6.8% a year.

4. Bỏ quy định tỷ lệ: còn 2 phương trình, 3 ẩn. Khử: $(6x + 5y + 12z) - 5(x + y + z) = 68 - 50$ cho $x + 7z = 18$. $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3 =$ số ẩn, nên theo Kronecker–Capelli hệ có vô số nghiệm, $3 - 2 = 1$ ẩn tự do. Chọn $z = t$: $x = 18 - 7t$, $y = 10 - x - z = 6t - 8$.

Drop the ratio rule: 2 equations, 3 unknowns remain. Eliminate: $(6x + 5y + 12z) - 5(x + y + z) = 68 - 50$ gives $x + 7z = 18$. $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3 =$ number of unknowns, so by Kronecker–Capelli there are infinitely many solutions with $3 - 2 = 1$ free variable. Put $z = t$: $x = 18 - 7t$, $y = 10 - x - z = 6t - 8$.

5. Điều kiện không âm: $x \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 18/7 \approx 2,57$; $y \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 4/3 \approx 1,33$; $z \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$. Vậy số tiền vào cổ phiếu nằm trong $[4/3; 18/7]$ tỷ đồng, khoảng từ 1,33 đến 2,57 tỷ đồng.

Non-negativity: $x \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 18/7 \approx 2.57$; $y \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 4/3 \approx 1.33$; $z \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$. So the amount in shares lies in $[4/3; 18/7]$ billion, roughly VND 1.33 to 2.57 billion.

6. Phương án khác: $t = 2,5$ cho $x = 0,5$; $y = 7$; $z = 2,5$ (tỷ đồng). Kiểm: tổng 10; lợi nhuận $0,03 + 0,35 + 0,30 = 0,68$. Ý nghĩa: hai ràng buộc (vốn, lợi nhuận) chưa xác định duy nhất danh mục; quy định tỷ lệ là phương trình thứ ba chốt lại một phương án.

Another allocation: $t = 2.5$ gives $x = 0.5$, $y = 7$, $z = 2.5$ (VND billion). Check: total 10;

return $0.03 + 0.35 + 0.30 = 0.68$. Meaning: two constraints (capital, return) do not pin down a unique portfolio; the ratio rule is the third equation that fixes one allocation.

2.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — Essay questions and answer outlines

Câu 1. Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình: $x + y + 2z = 2$; $2x + 3y + 5z = 5$; $x + 2y + (m^2 + 2)z = m + 2$.

Question 1. Solve and discuss, in terms of the parameter m , the system: $x + y + 2z = 2$; $2x + 3y + 5z = 5$; $x + 2y + (m^2 + 2)z = m + 2$.

- Lập $[A|B]$ và khử: $d_2 - 2d_1$ cho $y + z = 1$; $d_3 - d_1$ cho $y + m^2z = m$; lấy $(d_3 - d_1) - (d_2 - 2d_1)$ cho $(m^2 - 1)z = m - 1$.
Form $[A|B]$ and eliminate: $r_2 - 2r_1$ gives $y + z = 1$; $r_3 - r_1$ gives $y + m^2z = m$; subtracting gives $(m^2 - 1)z = m - 1$.
- $m \neq \pm 1$: $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, nghiệm duy nhất $z = 1/(m + 1)$, $y = 1 - z = m/(m + 1)$, $x = 2 - y - 2z = m/(m + 1)$.
 $m \neq \pm 1$: $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, unique solution $z = 1/(m + 1)$, $y = 1 - z = m/(m + 1)$, $x = 2 - y - 2z = m/(m + 1)$.
- $m = 1$: dòng cuối thành $0 = 0$, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, vô số nghiệm với 1 ẩn tự do: $z = t$, $y = 1 - t$, $x = 1 - t$.
 $m = 1$: the last row becomes $0 = 0$, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, infinitely many solutions with 1 free variable: $z = t$, $y = 1 - t$, $x = 1 - t$.
- $m = -1$: dòng cuối thành $0 = -2$, $r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3$, hệ vô nghiệm.
 $m = -1$: the last row becomes $0 = -2$, $r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3$, the system is inconsistent.
- Kiểm nhanh: $\det A = (m - 1)(m + 1)$, bằng 0 đúng tại $m = \pm 1$, khớp với hai trường hợp đặc biệt.
Quick check: $\det A = (m - 1)(m + 1)$, zero exactly at $m = \pm 1$, matching the two special cases.

Câu 2. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1} rồi dùng A^{-1} giải hai hệ $AX = B_1$ và $AX = B_2$ với $B_1 = (5; 14; 12)$, $B_2 = (3; 7; 6)$.

Question 2. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Find A^{-1} , then use it to solve $AX = B_1$ and $AX = B_2$ with $B_1 = (5; 14; 12)$, $B_2 = (3; 7; 6)$.

- $\det A = 1(3 - 3) - 0 + 1(2 - 1) = 1 \neq 0$, A khả nghịch.
 $\det A = 1(3 - 3) - 0 + 1(2 - 1) = 1 \neq 0$, so A is invertible.
- Phần bù đại số: $A_{11} = 0$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = 1$; $A_{21} = 1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -1$; $A_{31} = -1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 1$.
Cofactors: $A_{11} = 0$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = 1$; $A_{21} = 1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -1$; $A_{31} = -1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 1$.
- Chuyển vị ma trận phần bù rồi chia $\det A$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Kiểm $A \cdot A^{-1} = I$.
Transpose the cofactor matrix and divide by $\det A$: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Check $A \cdot A^{-1} = I$.
- $X_1 = A^{-1}B_1 = (14 - 12; -15 + 28 - 12; 5 - 14 + 12) = (2; 1; 3)$.
 $X_1 = A^{-1}B_1 = (14 - 12; -15 + 28 - 12; 5 - 14 + 12) = (2; 1; 3)$.

- $X_2 = A^{-1}B_2 = (7 - 6; -9 + 14 - 6; 3 - 7 + 6) = (1; -1; 2)$. Một lần tính A^{-1} dùng cho mọi vế phải.

$X_2 = A^{-1}B_2 = (7 - 6; -9 + 14 - 6; 3 - 7 + 6) = (1; -1; 2)$. One inverse serves every right-hand side.

Câu 3. Cho hệ $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$; $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 7$; $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5$.

(a) Tìm hạng của A và $\bar{A}$. (b) Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng.

(c) Viết nghiệm tổng quát của hệ đã cho.

Question 3. Consider $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$; $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 7$; $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5$.

(a) Find the ranks of A and $\bar{A}$. (b) Find a fundamental system of solutions of the associated homogeneous system. (c) Write the general solution of the given system.

- Khử trên $[A|B]$: $d_2 - 2d_1$ cho $[0 \ 0 \ 3 \ 3 \ | \ 3]$; $d_3 - d_1$ cho $[0 \ 0 \ 3 \ 3 \ | \ 3]$; $d_3 - d_2$ cho dòng 0. Bậc thang có hai dòng khác 0: $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$, hệ có vô số nghiệm, 2 ẩn tự do.
Eliminate on $[A|B]$: $r_2 - 2r_1$ gives $[0 \ 0 \ 3 \ 3 \ | \ 3]$; $r_3 - r_1$ gives $[0 \ 0 \ 3 \ 3 \ | \ 3]$; $r_3 - r_2$ gives a zero row. The echelon form has two non-zero rows: $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$, infinitely many solutions, 2 free variables.
- Ẩn cơ sở x_1, x_3 (cột có trụ); ẩn tự do $x_2 = a, x_4 = b$. Từ $3x_3 + 3x_4 = 3$: $x_3 = 1 - b$. Từ dòng 1: $x_1 = 2 - 2a + x_3 - b = 3 - 2a - 2b$.
Basic variables x_1, x_3 (pivot columns); free variables $x_2 = a, x_4 = b$. From $3x_3 + 3x_4 = 3$: $x_3 = 1 - b$. From row 1: $x_1 = 2 - 2a + x_3 - b = 3 - 2a - 2b$.
- Hệ thuần nhất (vế phải bằng 0): $x_3 = -x_4, x_1 = -2x_2 - 2x_4$. Cho $(a, b) = (1, 0)$ và $(0, 1)$: hệ nghiệm cơ bản $U_1 = (-2; 1; 0; 0), U_2 = (-2; 0; -1; 1)$, gồm $4 - 2 = 2$ vector.
Homogeneous system (zero right-hand side): $x_3 = -x_4, x_1 = -2x_2 - 2x_4$. Taking $(a, b) = (1, 0)$ and $(0, 1)$: fundamental system $U_1 = (-2; 1; 0; 0), U_2 = (-2; 0; -1; 1)$, of $4 - 2 = 2$ vectors.
- Nghiệm riêng: cho $a = b = 0, X_0 = (3; 0; 1; 0)$. Kiểm: $3 - 1 = 2$; $6 + 1 = 7$; $3 + 2 = 5$.
Particular solution: $a = b = 0$ gives $X_0 = (3; 0; 1; 0)$. Check: $3 - 1 = 2$; $6 + 1 = 7$; $3 + 2 = 5$.
- Nghiệm tổng quát: $X = X_0 + aU_1 + bU_2 = (3 - 2a - 2b; a; 1 - b; b), a, b \in \mathbb{R}$.
General solution: $X = X_0 + aU_1 + bU_2 = (3 - 2a - 2b; a; 1 - b; b), a, b \in \mathbb{R}$.

2.12. Câu hỏi trắc nghiệm — Multiple-choice questions

8. Giải hệ $2x + 3y = 13$; $x - y = -1$ bằng quy tắc Cramer. Giá trị của y là:

Solve $2x + 3y = 13$; $x - y = -1$ by Cramer's rule. The value of y is:

- A. $y = -3$
- B. $y = 3$
- C. $y = 2$
- D. $y = 15$

9. Hệ 3 phương trình, 3 ẩn có $r(A) = 2$ và $r(\bar{A}) = 3$. Kết luận nào đúng?
A system of 3 equations in 3 unknowns has $r(A) = 2$ and $r(\bar{A}) = 3$. Which conclusion is correct?
- A. Vô số nghiệm, phụ thuộc 1 tham số / *Infinitely many solutions with 1 parameter*
 - B. Có nghiệm duy nhất / *A unique solution*
 - C. Vô nghiệm / *No solution*
 - D. Chỉ có nghiệm tầm thường / *Only the trivial solution*
10. Hệ 3 phương trình, 4 ẩn có $r(A) = r(\bar{A}) = 2$. Số ẩn tự do trong nghiệm tổng quát là:
A system of 3 equations in 4 unknowns has $r(A) = r(\bar{A}) = 2$. The number of free variables is:
- A. 2
 - B. 1
 - C. 3
 - D. 4
11. Hệ thuần nhất $x + y + z = 0$; $x + 2y + 3z = 0$; $x + 3y + mz = 0$ có nghiệm không tầm thường khi:
The homogeneous system $x + y + z = 0$; $x + 2y + 3z = 0$; $x + 3y + mz = 0$ has a non-trivial solution when:
- A. $m = -5$
 - B. $m \neq 5$
 - C. $m = 9$
 - D. $m = 5$
12. Hệ Cramer 3 ẩn có $D = 4$, $D_1 = 8$, $D_2 = -12$, $D_3 = 4$. Nghiệm $(x_1; x_2; x_3)$ là:
A Cramer system in 3 unknowns has $D = 4$, $D_1 = 8$, $D_2 = -12$, $D_3 = 4$. The solution $(x_1; x_2; x_3)$ is:
- A. $(8; -12; 4)$
 - B. $(2; 3; 1)$
 - C. $(2; -3; 1)$
 - D. $(1/2; -1/3; 1)$
13. Biết $A^{-1} = [3 \ -1; -5 \ 2]$ và $B = (1; 2)$ là vectơ cột. Nghiệm của $AX = B$ là:
Given $A^{-1} = [3 \ -1; -5 \ 2]$ and the column vector $B = (1; 2)$, the solution of $AX = B$ is:
- A. $X = (-1; 1)$
 - B. $X = (1; -1)$
 - C. $X = (-7; 3)$
 - D. $X = (3; -5)$

14. Phép nào sau đây có thể làm thay đổi tập nghiệm của hệ khi biến đổi ma trận bổ sung?

Which operation on the augmented matrix may change the solution set of the system?

- A.** Đổi chỗ hai dòng / *Swapping two rows*
- B.** Nhân một dòng với số 3 / *Multiplying a row by 3*
- C.** Cộng vào một dòng 2 lần dòng khác / *Adding twice another row to a row*
- D.** Nhân một dòng với số 0 / *Multiplying a row by 0*

Chương 3. Mô hình tuyến tính trong kinh tế — Chapter 3. Linear models in economics

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Lập và giải mô hình cân bằng thị trường một hàng hóa và nhiều hàng hóa; nhận biết hàng thay thế, hàng bổ sung qua dấu hệ số; tính tác động của thuế theo đơn vị sản phẩm.
Set up and solve single-good and multi-good market equilibrium models; recognise substitutes and complements from coefficient signs; compute the effect of a per-unit tax.
- Giải mô hình cân bằng thu nhập quốc dân trong ba trường hợp: không thuế, có thuế, có xuất nhập khẩu; tính và giải thích số nhân.
Solve the national income equilibrium model in three cases: no tax, with tax, with foreign trade; compute and interpret the multiplier.
- Lập phương trình IS, LM, tìm thu nhập và lãi suất cân bằng, phân tích chính sách tài khóa và tiền tệ.
Derive the IS and LM equations, find equilibrium income and interest rate, analyse fiscal and monetary policy.
- Xây dựng ma trận hệ số chi phí trực tiếp từ bảng cân đối liên ngành, tính tổng sản lượng $X = (I - A)^{-1}D$ và giải thích ý nghĩa từng hệ số.
Build the technical coefficient matrix from an input-output table, compute gross output $X = (I - A)^{-1}D$ and interpret each coefficient.
- Dùng numpy để giải và tự kiểm các mô hình trên.
Use numpy to solve and self-check the models above.

3.1. Mô hình cân bằng thị trường một hàng hóa — Single-good market equilibrium model

Trên thị trường một hàng hóa, lượng cầu Q_d và lượng cung Q_s phụ thuộc giá P . Trong khoảng giá hẹp, hai hàm này được xấp xỉ bằng hàm bậc nhất. Hàm cầu có hệ số góc âm (giá tăng, người mua mua ít hơn), hàm cung có hệ số góc dương (giá tăng, người bán bán nhiều hơn).

In a single-good market, quantity demanded Q_d and quantity supplied Q_s depend on the price P . Over a narrow price range both are approximated by linear functions. Demand has a negative slope (higher price, buyers buy less); supply has a positive slope (higher price, sellers sell more).

$$Q_d = c - dP, \quad Q_s = -a + bP \quad (a, b, c, d > 0) \quad (3.1)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — **Trạng thái cân bằng** là mức giá $\bar{P}$ tại đó lượng cầu bằng lượng cung: $Q_d(\bar{P}) = Q_s(\bar{P})$ (dấu gạch trên chỉ giá trị cân bằng). Với hàm (3.1): $\bar{P} = (a + c)/(b + d)$, $\bar{Q} = (bc - ad)/(b + d)$. Nghiệm có nghĩa kinh tế khi $\bar{P} > 0$ và $\bar{Q} > 0$, tức $bc > ad$. Khi $P > \bar{P}$: $Q_s > Q_d$, thị trường **đư cung**, giá có xu hướng giảm. Khi $P < \bar{P}$: $Q_d > Q_s$, thị trường **đư cầu**, giá có xu hướng tăng.

Equilibrium is the price $\bar{P}$ at which quantity demanded equals quantity supplied (the bar marks

equilibrium values): $Q_d(\bar{P}) = Q_s(\bar{P})$. With (3.1): $\bar{P} = (a + c)/(b + d)$, $\bar{Q} = (bc - ad)/(b + d)$. The solution is economically meaningful when $\bar{P} > 0$ and $\bar{Q} > 0$, i.e. $bc > ad$.

*When $P > \bar{P}$: $Q_s > Q_d$, the market has **excess supply** and the price tends to fall. When $P < \bar{P}$: $Q_d > Q_s$, the market has **excess demand** and the price tends to rise.*

Cách lập: cho $Q_d = Q_s$, chuyển các số hạng chứa P sang một vế, giải phương trình bậc nhất. Lượng cân bằng tính bằng cách thế $\bar{P}$ vào một trong hai hàm, rồi thế vào hàm còn lại để kiểm.

Procedure: set $Q_d = Q_s$, move the terms in P to one side, solve the linear equation. Find the equilibrium quantity by substituting $\bar{P}$ into one function, then into the other as a check.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tại một chợ đầu mối, thị trường thanh long có $Q_d = 120 - 3P$ và $Q_s = -30 + 2P$ (P : nghìn đồng/kg; Q : tấn/ngày).

Cân bằng: $120 - 3P = -30 + 2P \Rightarrow 5P = 150 \Rightarrow \bar{P} = 30$ nghìn đồng/kg.

Lượng: $Q_s = -30 + 60 = 30$; kiểm $Q_d = 120 - 90 = 30 \Rightarrow \bar{Q} = 30$ tấn/ngày.

Theo công thức: $\bar{P} = (30 + 120)/(2 + 3) = 30$; $\bar{Q} = (2 \cdot 120 - 30 \cdot 3)/5 = 150/5 = 30$.

Nếu giá bị giữ ở 35 nghìn đồng: $Q_d = 15$, $Q_s = 40$, dư cung 25 tấn/ngày.

At a wholesale market, the dragon-fruit market has $Q_d = 120 - 3P$ and $Q_s = -30 + 2P$ (P : thousand VND/kg; Q : tonnes/day).

Equilibrium: $120 - 3P = -30 + 2P \Rightarrow 5P = 150 \Rightarrow \bar{P} = 30$ thousand VND/kg.

Quantity: $Q_s = -30 + 60 = 30$; check $Q_d = 120 - 90 = 30 \Rightarrow \bar{Q} = 30$ tonnes/day.

By formula: $\bar{P} = (30 + 120)/(2 + 3) = 30$; $\bar{Q} = (2 \cdot 120 - 30 \cdot 3)/5 = 150/5 = 30$.

If the price is held at 35 thousand VND: $Q_d = 15$, $Q_s = 40$, an excess supply of 25 tonnes/day.

Thuế theo đơn vị sản phẩm — Per-unit tax

Khi Nhà nước thu thuế t đồng trên mỗi đơn vị từ người bán, người bán chỉ giữ lại $P - t$ trên mỗi đơn vị bán ra. Hàm cung theo giá người mua trả trở thành $Q_s = -a + b(P - t)$; hàm cầu giữ nguyên.

When the State levies a tax of t per unit on sellers, sellers keep only $P - t$ per unit sold. Supply in terms of the price buyers pay becomes $Q_s = -a + b(P - t)$; demand is unchanged.

$$P_t = \bar{P} + bt/(b + d), \quad Q_t = \bar{Q} - bdt/(b + d) \quad (3.2)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Thuế t trên mỗi đơn vị làm **giá người mua tăng $bt/(b + d)$** , **giá người bán nhận giảm $dt/(b + d)$** ; hai phần cộng lại bằng t . Bên nào có hệ số góc (theo giá) nhỏ hơn thì chịu phần thuế lớn hơn. Tổng thuế Nhà nước thu: **$TR = t \cdot Q_t$** .

*A per-unit tax t raises the buyers' price by $bt/(b + d)$ and lowers the sellers' net price by $dt/(b + d)$; the two shares add up to t . The side with the smaller price slope bears the larger share. Total tax revenue: **$TR = t \cdot Q_t$** .*

VÍ DỤ / EXAMPLE — Thị trường thanh long ở trên, Nhà nước thu $t = 5$ nghìn đồng/kg từ người bán.

Cân bằng mới: $120 - 3P = -30 + 2(P - 5) \Rightarrow 5P = 160 \Rightarrow P_t = 32$; $Q_t = 120 - 96 = 24$ tấn/ngày.

Người mua trả thêm $32 - 30 = 2 = 2 \cdot 5/5$; người bán nhận $32 - 5 = 27$, giảm $3 = 3 \cdot 5/5$.

Tổng thuế mỗi ngày: $5 \text{ nghìn đồng/kg} \times 24.000 \text{ kg} = 120 \text{ triệu đồng}$.

*In the dragon-fruit market above, the State levies $t = 5$ thousand VND/kg on sellers.
New equilibrium: $120 - 3P = -30 + 2(P - 5) \Rightarrow 5P = 160 \Rightarrow P_t = 32$; $Q_t = 120 - 96 = 24$ tonnes/day.
Buyers pay $32 - 30 = 2 = 2 \cdot 5/5$ more; sellers receive $32 - 5 = 27$, down by $3 = 3 \cdot 5/5$.
Daily tax revenue: $5 \text{ thousand VND/kg} \times 24,000 \text{ kg} = \text{VND } 120 \text{ million}$.*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết hàm cung sau thuế là $Q_s = -a + b(P + t)$. Người bán nộp thuế nên chỉ nhận $P - t$; viết $P + t$ làm giá cân bằng giảm (ví dụ trên ra $P = 28$), ngược với thực tế.
Writing post-tax supply as $Q_s = -a + b(P + t)$. Sellers pay the tax and keep only $P - t$; writing $P + t$ makes the equilibrium price fall ($P = 28$ in the example above), the opposite of reality.

Trợ cấp theo đơn vị sản phẩm — Per-unit subsidy

Trợ cấp s đồng trên mỗi đơn vị là thuế âm: người bán nhận $P + s$, hàm cung thành $Q_s = -a + b(P + s)$. Giá người mua trả giảm $bs/(b + d)$, lượng giao dịch tăng $bds/(b + d)$; ngân sách chi $s \cdot Q_s$.

A per-unit subsidy s is a negative tax: sellers receive $P + s$, so supply becomes $Q_s = -a + b(P + s)$. The buyers' price falls by $bs/(b + d)$, the quantity traded rises by $bds/(b + d)$; the budget pays $s \cdot Q_s$.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Thị trường thanh long, Nhà nước trợ cấp $s = 5$ nghìn đồng/kg cho người bán trong mùa thu hoạch rộ.

$120 - 3P = -30 + 2(P + 5) \Rightarrow 5P = 140 \Rightarrow P_s = 28$; $Q_s = 120 - 84 = 36$ tấn/ngày.

Người bán nhận $28 + 5 = 33$ nghìn đồng/kg. Ngân sách chi 5 nghìn đồng/kg $\times 36.000 \text{ kg} = 180$ triệu đồng/ngày.

Dragon-fruit market; the State pays sellers a subsidy $s = 5$ thousand VND/kg during the peak harvest.

$120 - 3P = -30 + 2(P + 5) \Rightarrow 5P = 140 \Rightarrow P_s = 28$; $Q_s = 120 - 84 = 36$ tonnes/day.

Sellers receive $28 + 5 = 33$ thousand VND/kg. The budget pays $5 \text{ thousand VND/kg} \times 36,000 \text{ kg} = \text{VND } 180 \text{ million/day}$.

Chỉ tiêu Item	Không can thiệp No intervention	Thuế $t = 5$ Tax $t = 5$	Trợ cấp $s = 5$ Subsidy $s = 5$
Giá người mua trả Price paid by buyers	30	32	28
Giá người bán nhận Price received by sellers	30	27	33
Lượng (tấn/ngày) Quantity (tonnes/day)	30	24	36
Ngân sách (triệu đồng/ngày) Budget (VND million/day)	0	+120 (thu) +120 (revenue)	-180 (chi) -180 (outlay)

3.2. Mô hình cân bằng thị trường nhiều hàng hóa — *Multi-good market equilibrium model*

Cầu (và có thể cả cung) của một hàng hóa phụ thuộc giá của các hàng hóa liên quan. Với n hàng hóa, điều kiện cân bằng đồng thời $Qd_i = Qs_i$ ($i = 1, \dots, n$) cho một hệ n phương trình tuyến tính n ẩn $P_1, \dots, P_n$. Hệ có nghiệm duy nhất khi định thức ma trận hệ số khác 0; giải bằng Cramer, Gauss hoặc ma trận nghịch đảo (Chương 2).

Demand (and possibly supply) for a good depends on the prices of related goods. With n goods, the simultaneous equilibrium conditions $Qd_i = Qs_i$ ($i = 1, \dots, n$) give a system of n linear equations in n unknowns $P_1, \dots, P_n$. The system has a unique solution when the determinant of the coefficient matrix is non-zero; solve it by Cramer, Gauss or the inverse matrix (Chapter 2).

$$Qd_i = a_{i0} + a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2, \quad Qs_i = b_{i0} + b_{i1}P_1 + b_{i2}P_2 \quad (3.3)$$

Đặt $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. Điều kiện cân bằng của mô hình hai hàng hóa viết dưới dạng ma trận:

Let $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. The equilibrium conditions of the two-good model in matrix form:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot (P_1; P_2) = (-c_{10}; -c_{20})$$

$$\bar{P}_1 = D_1/D, \quad \bar{P}_2 = D_2/D, \quad D = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0 \quad (3.4)$$

Dấu hệ số chéo trong hàm cầu <i>Sign of cross coefficient in demand</i>	Quan hệ hai hàng hóa <i>Relationship</i>	Ví dụ ở Việt Nam <i>Example in Vietnam</i>
Hệ số của P_j trong Qd_i dương ($a_{ij} > 0$) <i>Coefficient of P_j in Qd_i positive ($a_{ij} > 0$)</i>	Hàng thay thế : P_j tăng, người mua chuyển sang hàng i Substitutes : when P_j rises, buyers switch to good i	Cơm văn phòng và bún bò; xe buýt và xe ôm công nghệ <i>Office rice meals and beef noodle soup; buses and ride-hailing motorbikes</i>
Hệ số của P_j trong Qd_i âm ($a_{ij} < 0$) <i>Coefficient of P_j in Qd_i negative ($a_{ij} < 0$)</i>	Hàng bổ sung : P_j tăng, cầu hàng i giảm theo Complements : when P_j rises, demand for good i falls	Xe đạp điện và pin thay thế; máy in và hộp mực <i>E-bikes and replacement batteries; printers and cartridges</i>
Hệ số bằng 0 <i>Coefficient zero</i>	Hàng độc lập Independent goods	Gạo và vé xem phim <i>Rice and cinema tickets</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — Hai hàng thay thế: cơm văn phòng (hàng 1) và bún bò (hàng 2) tại một quận; P : nghìn đồng/suất; Q : trăm suất/ngày.

$$Qd_1 = 90 - 2P_1 + P_2, \quad Qs_1 = -20 + 3P_1; \quad Qd_2 = 180 + P_1 - 4P_2, \quad Qs_2 = -30 + 2P_2.$$

$$\text{Bước 1. Cân bằng thị trường 1: } 90 - 2P_1 + P_2 = -20 + 3P_1 \Rightarrow 5P_1 - P_2 = 110.$$

$$\text{Bước 2. Cân bằng thị trường 2: } 180 + P_1 - 4P_2 = -30 + 2P_2 \Rightarrow -P_1 + 6P_2 = 210.$$

$$\text{Bước 3. } D = 5 \cdot 6 - (-1)(-1) = 29; \quad D_1 = 110 \cdot 6 - (-1) \cdot 210 = 870; \quad D_2 = 5 \cdot 210 - (-1) \cdot 110 = 1.160.$$

Bước 4. $\bar{P}_1 = 870/29 = 30$, $\bar{P}_2 = 1.160/29 = 40$ (nghìn đồng).

Bước 5. $\bar{Q}_1 = -20 + 90 = 70$; $\bar{Q}_2 = -30 + 80 = 50$ (trăm suất/ngày). Kiểm: $Q_{d1} = 90 - 60 + 40 = 70$; $Q_{d2} = 180 + 30 - 160 = 50$.

Two substitutes: office rice meals (good 1) and beef noodle soup (good 2) in one district; P: thousand VND per serving; Q: hundred servings/day.

$Q_{d1} = 90 - 2P_1 + P_2$, $Q_{s1} = -20 + 3P_1$; $Q_{d2} = 180 + P_1 - 4P_2$, $Q_{s2} = -30 + 2P_2$.

Step 1. Market 1 equilibrium: $90 - 2P_1 + P_2 = -20 + 3P_1 \Rightarrow 5P_1 - P_2 = 110$.

Step 2. Market 2 equilibrium: $180 + P_1 - 4P_2 = -30 + 2P_2 \Rightarrow -P_1 + 6P_2 = 210$.

Step 3. $D = 5 \cdot 6 - (-1)(-1) = 29$; $D_1 = 110 \cdot 6 - (-1) \cdot 210 = 870$; $D_2 = 5 \cdot 210 - (-1) \cdot 110 = 1,160$.

Step 4. $\bar{P}_1 = 870/29 = 30$, $\bar{P}_2 = 1,160/29 = 40$ (thousand VND).

Step 5. $\bar{Q}_1 = -20 + 90 = 70$; $\bar{Q}_2 = -30 + 80 = 50$ (hundred servings/day). Check: $Q_{d1} = 90 - 60 + 40 = 70$; $Q_{d2} = 180 + 30 - 160 = 50$.

Hệ ở bước 1–2 viết dưới dạng ma trận và giải bằng nghịch đảo:

The system of steps 1–2 in matrix form, solved with the inverse:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot (P_1; P_2) = (110; 210)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (P_1; P_2) = (30; 40)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Hai hàng bổ sung: xe đạp điện (hàng 1, P_1 : triệu đồng/chiếc) và bộ pin lithium thay thế (hàng 2, P_2 : triệu đồng/bộ); Q: trăm sản phẩm/tháng.

$Q_{d1} = 54 - 3P_1 - P_2$, $Q_{s1} = -10 + 2P_1$; $Q_{d2} = 26 - P_1 - 2P_2$, $Q_{s2} = -6 + 3P_2$.

Hệ cân bằng: $5P_1 + P_2 = 64$; $P_1 + 5P_2 = 32$. $D = 25 - 1 = 24$; $D_1 = 64 \cdot 5 - 32 = 288$; $D_2 = 5 \cdot 32 - 64 = 96$.

$\bar{P}_1 = 12$ triệu đồng, $\bar{P}_2 = 4$ triệu đồng; $\bar{Q}_1 = -10 + 24 = 14$, $\bar{Q}_2 = -6 + 12 = 6$ (trăm sản phẩm/tháng).

Dấu hệ số chéo trong cả hai hàm cầu đều âm: giá pin tăng làm người mua ngại mua xe, và ngược lại.

Two complements: e-bikes (good 1, P_1 : million VND each) and replacement lithium battery packs (good 2, P_2 : million VND per pack); Q: hundred units/month.

$Q_{d1} = 54 - 3P_1 - P_2$, $Q_{s1} = -10 + 2P_1$; $Q_{d2} = 26 - P_1 - 2P_2$, $Q_{s2} = -6 + 3P_2$.

Equilibrium system: $5P_1 + P_2 = 64$; $P_1 + 5P_2 = 32$. $D = 25 - 1 = 24$; $D_1 = 64 \cdot 5 - 32 = 288$; $D_2 = 5 \cdot 32 - 64 = 96$.

$\bar{P}_1 = \text{VND } 12 \text{ million}$, $\bar{P}_2 = \text{VND } 4 \text{ million}$; $\bar{Q}_1 = -10 + 24 = 14$, $\bar{Q}_2 = -6 + 12 = 6$ (hundred units/month).

Both cross coefficients in demand are negative: dearer batteries put buyers off e-bikes, and vice versa.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Chuyển về quên đổi dấu hệ số chéo. Từ $90 - 2P_1 + P_2 = -20 + 3P_1$, nhiều bạn viết $5P_1 + P_2 = 110$ thay vì $5P_1 - P_2 = 110$. Cách tránh: luôn viết dạng $(Q_d - Q_s) = 0$ rồi đổi dấu toàn bộ một lần.

Forgetting to change the sign of the cross coefficient when moving terms. From $90 - 2P_1 + P_2 = -20$

+ $3P_1$, many students write $5P_1 + P_2 = 110$ instead of $5P_1 - P_2 = 110$. Remedy: always write $(Q_d - Q_s) = 0$ first, then change all signs at once.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Giải từng thị trường riêng khi đề cho hàm cầu có giá hàng khác. Hệ phải giải đồng thời; giải riêng thị trường 1 với P_2 “tạm bỏ qua” cho kết quả sai (xem Bài 1 cuối chương: 17,14 thay vì 20).

Solving each market separately when demand contains another good's price. The system must be solved simultaneously; solving market 1 while “ignoring” P_2 gives a wrong result (see Exercise 1 at the end of the chapter: 17.14 instead of 20).

3.3. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân — National income equilibrium model

Mô hình Keynes đơn giản xét nền kinh tế có thu nhập quốc dân Y , tiêu dùng C , đầu tư I và chi tiêu chính phủ G . I_0, G_0 là biến ngoại sinh (cho trước); Y, C là biến nội sinh (cần tìm). Tiêu dùng phụ thuộc thu nhập theo hàm tiêu dùng tuyến tính.

The simple Keynesian model considers an economy with national income Y , consumption C , investment I and government spending G . I_0, G_0 are exogenous (given); Y, C are endogenous (to be found). Consumption depends on income through a linear consumption function.

$$Y = C + I_0 + G_0, \quad C = C_0 + bY \quad (C_0 > 0, 0 < b < 1) \quad (3.5)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — C_0 là tiêu dùng tự định (khi $Y = 0$); b là **khuyh hướng tiêu dùng cận biên** (MPC): mỗi đồng thu nhập tăng thêm, b đồng được chi tiêu; $1 - b$ là khuyh hướng tiết kiệm cận biên (MPS).

Nghiệm cân bằng: $\bar{Y} = (C_0 + I_0 + G_0)/(1 - b)$, $\bar{C} = (C_0 + b(I_0 + G_0))/(1 - b)$.

Số nhân $k = 1/(1 - b)$: I_0 hoặc G_0 tăng ΔG thì $\bar{Y}$ tăng $k \cdot \Delta G$.

*C_0 is autonomous consumption (when $Y = 0$); b is the **marginal propensity to consume** (MPC): of each extra unit of income, b is spent; $1 - b$ is the marginal propensity to save (MPS).*

Equilibrium: $\bar{Y} = (C_0 + I_0 + G_0)/(1 - b)$, $\bar{C} = (C_0 + b(I_0 + G_0))/(1 - b)$.

***Multiplier** $k = 1/(1 - b)$: if I_0 or G_0 rises by ΔG , $\bar{Y}$ rises by $k \cdot \Delta G$.*

Chuyển ẩn sang về trái, mô hình (3.5) là hệ hai phương trình hai ẩn (Y, C):

Moving the unknowns to the left, model (3.5) is a system of two equations in (Y, C) :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \cdot (Y; C) = (I_0 + G_0; C_0)$$

Định thức ma trận hệ số bằng $1 - b > 0$, nên hệ luôn có nghiệm duy nhất. Thay cột 1 rồi cột 2 bằng vế phải (Cramer) cho đúng hai công thức trong hộp trên.

The determinant of the coefficient matrix is $1 - b > 0$, so the system always has a unique solution. Replacing column 1, then column 2, by the right-hand side (Cramer) gives exactly the two formulas above.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Cho $C_0 = 200$, $b = 0,8$, $I_0 = 300$, $G_0 = 500$ (nghìn tỷ đồng).

$\bar{Y} = (200 + 300 + 500)/(1 - 0,8) = 1.000/0,2 = \mathbf{5.000}$; $\bar{C} = 200 + 0,8 \cdot 5.000 = \mathbf{4.200}$ (nghìn tỷ đồng).

Kiểm: $\bar{C} + I_0 + G_0 = 4.200 + 300 + 500 = 5.000$.

Số nhân $k = 1/0,2 = 5$. Chính phủ tăng chi 40 nghìn tỷ đồng $\Rightarrow \Delta Y = 5 \cdot 40 = \mathbf{200}$ nghìn tỷ

đồng.

Let $C_0 = 200$, $b = 0.8$, $I_0 = 300$, $G_0 = 500$ (trillion VND).

$\bar{Y} = (200 + 300 + 500)/(1 - 0.8) = 1,000/0.2 = \mathbf{5,000}$; $\bar{C} = 200 + 0.8 \cdot 5,000 = \mathbf{4,200}$ (trillion VND).

Check: $\bar{C} + I_0 + G_0 = 4,200 + 300 + 500 = 5,000$.

Multiplier $k = 1/0.2 = 5$. Government spending up by 40 trillion $\Rightarrow \Delta Y = 5 \cdot 40 = \mathbf{VND\ 200\ trillion}$.

Cùng ví dụ, giải bằng Cramer trên dạng ma trận ($I_0 + G_0 = 800$, $C_0 = 200$, $b = 0.8$):

The same example solved by Cramer on the matrix form ($I_0 + G_0 = 800$, $C_0 = 200$, $b = 0.8$):

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$D_Y = \begin{bmatrix} 800 & -1 \\ 200 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1.000}{0.2} \Rightarrow \bar{Y} = 1.000/0.2 = 5.000$$

$$D_C = \begin{bmatrix} 1 & 800 \\ -0.8 & 200 \end{bmatrix} = \frac{840}{0.2} \Rightarrow \bar{C} = 840/0.2 = 4.200$$

Mô hình có thuế — Model with taxation

Khi có thuế $T = T_0 + tY$ (T_0 : thuế cố định, t : thuế suất biên, $0 < t < 1$), tiêu dùng phụ thuộc thu nhập khả dụng $Y_d = Y - T$. Ẩn nội sinh là Y , C , T .

With taxes $T = T_0 + tY$ (T_0 : lump-sum tax, t : marginal tax rate, $0 < t < 1$), consumption depends on disposable income $Y_d = Y - T$. The endogenous unknowns are Y , C , T .

$$Y = C + I_0 + G_0, \quad C = C_0 + b(Y - T), \quad T = T_0 + tY \quad (3.6)$$

$$\bar{Y} = (C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)/(1 - b + bt) \quad (3.7)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Giữ $C_0 = 200$, $b = 0.8$, $I_0 = 300$, $G_0 = 500$; thêm $T_0 = 50$, $t = 0.25$ (nghìn tỷ đồng).

Mẫu số: $1 - 0.8 + 0.8 \cdot 0.25 = 0.4$. Tử số: $200 - 0.8 \cdot 50 + 300 + 500 = 960$.

$\bar{Y} = 960/0.4 = \mathbf{2,400}$; $\bar{T} = 50 + 0.25 \cdot 2,400 = \mathbf{650}$; $Y_d = 1,750$; $\bar{C} = 200 + 0.8 \cdot 1,750 = \mathbf{1,600}$.

Kiểm: $1,600 + 300 + 500 = 2,400$. Số nhân $k = 1/0.4 = 2.5$ (nhỏ hơn 5 khi không có thuế).

Ngân sách $T - G = 650 - 500 = 150$ (thặng dư).

Keep $C_0 = 200$, $b = 0.8$, $I_0 = 300$, $G_0 = 500$; add $T_0 = 50$, $t = 0.25$ (trillion VND).

Denominator: $1 - 0.8 + 0.8 \cdot 0.25 = 0.4$. Numerator: $200 - 0.8 \cdot 50 + 300 + 500 = 960$.

$\bar{Y} = 960/0.4 = \mathbf{2,400}$; $\bar{T} = 50 + 0.25 \cdot 2,400 = \mathbf{650}$; $Y_d = 1,750$; $\bar{C} = 200 + 0.8 \cdot 1,750 = \mathbf{1,600}$.

Check: $1,600 + 300 + 500 = 2,400$. Multiplier $k = 1/0.4 = 2.5$ (below 5 without taxes). Budget $T - G = 650 - 500 = 150$ (surplus).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết mẫu số là $1 - b + t$ thay vì $1 - b + bt$.

Thuế lấy đi t đồng trên mỗi đồng thu nhập, nhưng chỉ b phần trong đó lẽ ra được tiêu dùng,

nên tiêu dùng giảm bt. Với số liệu trên, mẫu 0,45 cho $Y \approx 2.133,3$ — sai.

Writing the denominator as $1 - b + t$ instead of $1 - b + bt$. Taxes remove t of each unit of income, but only the fraction b of it would have been consumed, so consumption falls by bt . With the data above, a denominator of 0.45 gives $Y \approx 2,133.3$ — wrong.

Mô hình có xuất nhập khẩu — Model with foreign trade

Nền kinh tế mở có thêm xuất khẩu X_0 (ngoại sinh) và nhập khẩu $M = M_0 + mY$, m là **khuynh hướng nhập khẩu cận biên** (MPM). Nhập khẩu là phần chi tiêu chảy ra nước ngoài nên bị trừ khỏi tổng cầu trong nước.

*An open economy adds exports X_0 (exogenous) and imports $M = M_0 + mY$, where m is the **marginal propensity to import** (MPM). Imports are spending that leaks abroad, so they are subtracted from domestic aggregate demand.*

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - M, \quad M = M_0 + mY \quad (3.8)$$

$$\bar{Y} = (C_0 - bT_0 + I_0 + G_0 + X_0 - M_0) / (1 - b + bt + m) \quad (3.9)$$

Viết theo ba ẩn (Y, C, T) sau khi thế $M = M_0 + mY$ vào phương trình thứ nhất:

In terms of three unknowns (Y, C, T) after substituting $M = M_0 + mY$ into the first equation:

$$\begin{bmatrix} 1 + m & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (Y; C; T) = (I_0 + G_0 + X_0 - M_0; C_0; T_0)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Thêm vào ví dụ có thuế: $X_0 = 400$, $M_0 = 60$, $m = 0,1$.

Mẫu số: $0,4 + 0,1 = 0,5$. Tử số: $960 + 400 - 60 = 1.300 \Rightarrow \bar{Y} = \mathbf{2.600}$.

$\bar{T} = 50 + 650 = \mathbf{700}$; $Y_d = 1.900$; $\bar{C} = 200 + 0,8 \cdot 1.900 = \mathbf{1.720}$; $M = 60 + 260 = 320$; cán cân thương mại $X_0 - M = \mathbf{80}$ (thặng dư).

Kiểm: $1.720 + 300 + 500 + 400 - 320 = 2.600$. Số nhân $k = 1/0,5 = 2$.

Add to the tax example: $X_0 = 400$, $M_0 = 60$, $m = 0.1$.

Denominator: $0.4 + 0.1 = 0.5$. Numerator: $960 + 400 - 60 = 1,300 \Rightarrow \bar{Y} = \mathbf{2,600}$.

$\bar{T} = 50 + 650 = \mathbf{700}$; $Y_d = 1,900$; $\bar{C} = 200 + 0.8 \cdot 1,900 = \mathbf{1,720}$; $M = 60 + 260 = 320$; trade balance $X_0 - M = \mathbf{80}$ (surplus).

Check: $1,720 + 300 + 500 + 400 - 320 = 2,600$. Multiplier $k = 1/0.5 = 2$.

Mô hình <i>Model</i>	Số nhân k <i>Multiplier k</i>	Số liệu ví dụ <i>Example data</i>	$\bar{Y}$
Đơn giản <i>Simple</i>	$1/(1 - b)$	$b = 0,8$ $b = 0.8$	5.000 <i>5,000</i>
Có thuế <i>With tax</i>	$1/(1 - b + bt)$	$b = 0,8; t = 0,25$ $b = 0.8; t = 0.25$	2.400 <i>2,400</i>
Có thuế và ngoại thương <i>With tax and trade</i>	$1/(1 - b + bt + m)$	$b = 0,8; t = 0,25; m = 0,1$ $b = 0.8; t = 0.25; m = 0.1$	2.600 <i>2,600</i>

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Dùng số nhân $1/b$ hoặc $b/(1 - b)$. Với $b = 0,75$, số nhân đúng là $1/(1 - 0,75) = 4$; $1/b \approx 1,33$ và $b/(1 - b) = 3$ là hai phương án nhiễu hay gặp trong đề trắc nghiệm.

Using a multiplier of $1/b$ or $b/(1 - b)$. With $b = 0.75$ the correct multiplier is $1/(1 - 0.75) = 4$; $1/b \approx 1.33$ and $b/(1 - b) = 3$ are common distractors in multiple-choice tests.

3.4. Mô hình IS–LM — The IS–LM model

Mô hình IS–LM ghép thị trường hàng hóa và thị trường tiền tệ. Đầu tư giảm khi lãi suất r tăng; cầu tiền tăng theo thu nhập (giao dịch) và giảm theo lãi suất (đầu cơ). Hai ẩn nội sinh là Y và r .

The IS–LM model combines the goods market and the money market. Investment falls as the interest rate r rises; money demand rises with income (transactions) and falls with the interest rate (speculation). The two endogenous unknowns are Y and r .

Thị trường <i>Market</i>	Giả thiết <i>Assumptions</i>	Phương trình cân bằng <i>Equilibrium equation</i>
Hàng hóa (IS) <i>Goods (IS)</i>	$C = C_0 + bY$; $I = I_0 - dr$; $G = G_0$ ($d > 0$)	$(1 - b)Y + dr = C_0 + I_0 + G_0$
Tiền tệ (LM) <i>Money (LM)</i>	Cầu tiền $L = kY - hr$; cung tiền M_0 ($k, h > 0$) <i>Money demand $L = kY - hr$; money supply M_0 ($k, h > 0$)</i>	$kY - hr = M_0$

Đặt $A = C_0 + I_0 + G_0$ (chi tiêu tự định). Hệ IS–LM dạng ma trận:

Let $A = C_0 + I_0 + G_0$ (autonomous spending). The IS–LM system in matrix form:

$$\begin{bmatrix} 1 - b & d \\ k & -h \end{bmatrix} \cdot (Y; r) = (A; M_0)$$

$$\bar{Y} = (hA + dM_0)/(h(1 - b) + dk), \quad \bar{r} = (kA - (1 - b)M_0)/(h(1 - b) + dk) \quad (3.10)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Định thức hệ bằng $-[h(1 - b) + dk] < 0$ nên hệ luôn có nghiệm duy nhất. Từ (3.10):

Số nhân tài khóa $\partial \bar{Y} / \partial G_0 = h/(h(1 - b) + dk)$, nhỏ hơn $1/(1 - b)$ vì lãi suất tăng làm giảm đầu tư (hiệu ứng lấn át).

Số nhân tiền tệ $\partial \bar{Y} / \partial M_0 = d/(h(1 - b) + dk) > 0$; tăng cung tiền làm $\bar{r}$ giảm.

The determinant equals $-[h(1 - b) + dk] < 0$, so the system always has a unique solution. From (3.10):

Fiscal multiplier $\partial \bar{Y} / \partial G_0 = h/(h(1 - b) + dk)$, smaller than $1/(1 - b)$ because the rising interest rate cuts investment (the **crowding-out effect**).

Monetary multiplier $\partial \bar{Y} / \partial M_0 = d/(h(1 - b) + dk) > 0$; a larger money supply lowers $\bar{r}$.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Cho $C = 150 + 0,75Y$, $I = 350 - 40r$, $G_0 = 300$; $L = 0,25Y - 50r$, $M_0 = 350$ (Y : nghìn tỷ đồng; r : %/năm).

IS: $Y = 150 + 0,75Y + 350 - 40r + 300 \Rightarrow 0,25Y + 40r = 800$. LM: $0,25Y - 50r = 350$.

Trừ hai phương trình: $90r = 450 \Rightarrow \bar{r} = 5\%$; $0,25Y = 800 - 200 \Rightarrow \bar{Y} = 2.400$.

Kiểm bằng (3.10): mẫu $50 \cdot 0,25 + 40 \cdot 0,25 = 22,5$; $\bar{Y} = (50 \cdot 800 + 40 \cdot 350) / 22,5 = 54.000 / 22,5 = 2.400$; $\bar{r} = (0,25 \cdot 800 - 0,25 \cdot 350) / 22,5 = 112,5 / 22,5 = 5$.

Tại cân bằng: $C = 150 + 1.800 = 1.950$; $I = 350 - 200 = 150$; $C + I + G_0 = 2.400$.

Let $C = 150 + 0.75Y$, $I = 350 - 40r$, $G_0 = 300$; $L = 0.25Y - 50r$, $M_0 = 350$ (Y : trillion VND; r : % per year).

IS: $Y = 150 + 0.75Y + 350 - 40r + 300 \Rightarrow 0.25Y + 40r = 800$. LM: $0.25Y - 50r = 350$.

Subtract: $90r = 450 \Rightarrow \bar{r} = 5\%$; $0.25Y = 800 - 200 \Rightarrow \bar{Y} = 2,400$.

Check with (3.10): denominator $50 \cdot 0.25 + 40 \cdot 0.25 = 22.5$; $\bar{Y} = (50 \cdot 800 + 40 \cdot 350) / 22.5 = 54,000 / 22.5 = 2,400$; $\bar{r} = (0.25 \cdot 800 - 0.25 \cdot 350) / 22.5 = 112.5 / 22.5 = 5$.

At equilibrium: $C = 150 + 1,800 = 1,950$; $I = 350 - 200 = 150$; $C + I + G_0 = 2,400$.

Viết mỗi đường thành r theo Y để đọc độ dốc. Đường IS dốc xuống: thu nhập cao hơn chỉ cân bằng được thị trường hàng hóa khi lãi suất thấp hơn (đầu tư lớn hơn). Đường LM dốc lên: thu nhập cao làm tăng cầu tiền, lãi suất phải tăng để cầu tiền trở lại bằng cung tiền.

Write each curve as r in terms of Y to read its slope. The IS curve slopes down: higher income clears the goods market only at a lower interest rate (more investment). The LM curve slopes up: higher income raises money demand, so the interest rate must rise to bring it back to the money supply.

$$\text{IS: } r = 20 - Y/160, \quad \text{LM: } r = Y/200 - 7 \Rightarrow \text{tại } Y = 2.400: r = 5 \quad (3.11)$$

Thay đổi <i>Change</i>	Đường dịch chuyển <i>Curve shifted</i>	$\bar{Y}$	$\bar{r}$
G_0 hoặc I_0 tăng, C_0 tăng <i>G_0 or I_0 up, C_0 up</i>	IS sang phải <i>IS to the right</i>	Tăng <i>Up</i>	Tăng <i>Up</i>
Thuế tăng <i>Taxes up</i>	IS sang trái <i>IS to the left</i>	Giảm <i>Down</i>	Giảm <i>Down</i>
Cung tiền M_0 tăng <i>Money supply M_0 up</i>	LM sang phải <i>LM to the right</i>	Tăng <i>Up</i>	Giảm <i>Down</i>
Cung tiền M_0 giảm <i>Money supply M_0 down</i>	LM sang trái <i>LM to the left</i>	Giảm <i>Down</i>	Tăng <i>Up</i>

Phân tích chính sách trên cùng số liệu (mỗi lần thay đổi một biến ngoại sinh, biến kia giữ nguyên):

Policy analysis on the same data (one exogenous variable changes at a time, the other is held fixed):

Tình huống <i>Scenario</i>	$\bar{Y}$	$\bar{r}$ (%)	Đầu tư I <i>Investment I</i>	Nhận xét <i>Comment</i>
Ban đầu: $G_0 = 300, M_0 = 350$ <i>Baseline: $G_0 = 300, M_0 = 350$</i>	2.400 <i>2,400</i>	5	150	Điểm xuất phát <i>Starting point</i>
Tài khóa mở rộng: $G_0 = 345$ <i>Fiscal expansion: $G_0 = 345$</i>	2.500 <i>2,500</i>	5,5 <i>5.5</i>	130	$\Delta Y = 100 < 4 \cdot 45 = 180$: lần át đầu tư 20 <i>$\Delta Y = 100 < 4 \cdot 45 = 180$: investment crowded out by 20</i>
Tiền tệ mở rộng: $M_0 = 395$ <i>Monetary expansion: $M_0 = 395$</i>	2.480 <i>2,480</i>	4,5 <i>4.5</i>	170	Lãi suất giảm kích thích đầu tư <i>Lower interest rate stimulates investment</i>

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lỗi đơn vị lãi suất. Nếu hệ số $d = 40$ được ước lượng với r tính bằng %, thì $\bar{r} = 5$ nghĩa là 5%; thay $r = 0,05$ vào phương trình IS sẽ cho Y sai. Luôn đọc đơn vị của r trong đề.

Mixing interest-rate units. If $d = 40$ was estimated with r in per cent, $\bar{r} = 5$ means 5%; plugging $r = 0.05$ into the IS equation gives a wrong Y . Always read the unit of r in the problem.

3.5. Mô hình input–output Leontief — *The Leontief input–output model*

Nền kinh tế chia thành n ngành, mỗi ngành sản xuất một loại sản phẩm. Sản phẩm của ngành i một phần dùng làm **đầu vào trung gian** cho các ngành (kể cả chính nó), phần còn lại đáp ứng **cầu cuối cùng** (tiêu dùng hộ gia đình, đầu tư, chi tiêu chính phủ, xuất khẩu). Các đại lượng đo bằng giá trị (tỷ đồng).

*The economy is split into n sectors, each producing one product. Part of sector i 's output is used as **intermediate input** by the sectors (including itself); the rest meets **final demand** (household consumption, investment, government spending, exports). Quantities are measured in value (billion VND).*

Ký hiệu <i>Symbol</i>	Ý nghĩa <i>Meaning</i>
X_i	Tổng sản lượng (tổng cầu) của ngành i <i>Gross output (total demand) of sector i</i>
x_{ij}	Giá trị sản phẩm ngành i mà ngành j dùng làm đầu vào <i>Value of sector i output used as input by sector j</i>
D_i	Cầu cuối cùng đối với sản phẩm ngành i <i>Final demand for sector i output</i>

Ký hiệu <i>Symbol</i>	Ý nghĩa <i>Meaning</i>
$a_{ij} = x_{ij}/X_j$	Hệ số chi phí trực tiếp: giá trị sản phẩm ngành i cần để ngành j sản xuất 1 đơn vị giá trị sản lượng <i>Technical coefficient: value of sector i output needed for sector j to produce one unit of output value</i>
$A = (a_{ij})$	Ma trận hệ số chi phí trực tiếp (ma trận công nghệ) <i>Technical coefficient matrix (technology matrix)</i>
$I - A$	Ma trận Leontief <i>Leontief matrix</i>
$(I - A)^{-1}$	Ma trận hệ số chi phí toàn phần (nghịch đảo Leontief) <i>Total requirements matrix (Leontief inverse)</i>

Cân đối theo hàng: sản lượng ngành i = tổng đầu vào bán cho các ngành + cầu cuối cùng.
Thay $x_{ij} = a_{ij}X_j$ được hệ phương trình tuyến tính:

Row balance: output of sector i = total input sold to the sectors + final demand. Substituting $x_{ij} = a_{ij}X_j$ gives a linear system:

$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{in}X_n + D_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.12)$$

$$X = AX + D \Leftrightarrow (I - A)X = D \Leftrightarrow X = (I - A)^{-1}D \quad (3.13)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Ý nghĩa hệ số a_{ij} : để ngành j làm ra 1 đồng sản lượng, cần trực tiếp a_{ij} đồng sản phẩm của ngành i. Chỉ số đầu (i) là ngành bán, chỉ số sau (j) là ngành mua; a_{ij} tính bằng cách chia cho tổng sản lượng của ngành mua, tức chia theo cột.

Tổng cột j của A, $\sum_i a_{ij}$, là chi phí trung gian trên 1 đồng sản lượng ngành j; $1 - \sum_i a_{ij}$ là tỷ lệ giá trị gia tăng (lương, khấu hao, lợi nhuận, thuế) của ngành j.

Phần tử (i, j) của $(I - A)^{-1}$: lượng sản phẩm ngành i phải sản xuất (trực tiếp và gián tiếp) để đáp ứng 1 đồng cầu cuối cùng của ngành j. Tổng cột j là số nhân sản lượng của ngành j.

Meaning of a_{ij} : for sector j to make one unit of output value, it needs directly a_{ij} units of sector i output. The first index (i) is the selling sector, the second (j) the buying sector; a_{ij} is computed by dividing by the gross output of the buying sector, i.e. by column.

Column sum j of A, $\sum_i a_{ij}$, is the intermediate cost per unit of sector j output; $1 - \sum_i a_{ij}$ is the value added share (wages, depreciation, profit, taxes) of sector j.

Entry (i, j) of $(I - A)^{-1}$: the output sector i must produce (directly and indirectly) to meet one unit of final demand for sector j. Column sum j is sector j's output multiplier.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Điều kiện sản xuất được: $a_{ij} \geq 0$ và mọi tổng cột của A nhỏ hơn 1 thì $(I - A)^{-1}$ tồn tại và có mọi phần tử không âm; khi đó mọi $D \geq 0$ cho $X \geq 0$. Đây là điều kiện đủ. Điều kiện cần và đủ (Hawkins–Simon): mọi định thức con chính góc trên trái của $I - A$ đều dương.

Productiveness condition: if $a_{ij} \geq 0$ and every column sum of A is below 1, then $(I - A)^{-1}$ exists and has all entries non-negative; every $D \geq 0$ then gives $X \geq 0$. This is a sufficient condition. The necessary and sufficient condition (Hawkins–Simon): all leading principal minors of $I - A$ are positive.

Từ bảng cân đối liên ngành đến ma trận A — From the input–output table to matrix A

Bảng giao dịch của một nền kinh tế hai ngành (tỷ đồng): nông nghiệp (1), công nghiệp (2).

Transactions table of a two-sector economy (billion VND): agriculture (1), industry (2).

Ngành bán \ Ngành mua <i>Selling \ Buying</i>	Nông nghiệp <i>Agriculture</i>	Công nghiệp <i>Industry</i>	Cầu cuối cùng <i>Final demand</i>	Tổng sản lượng <i>Gross output</i>
Nông nghiệp <i>Agriculture</i>	50	100	100	250
Công nghiệp <i>Industry</i>	100	200	200	500
Giá trị gia tăng <i>Value added</i>	100	200		
Tổng đầu vào <i>Total input</i>	250	500		

VÍ DỤ / EXAMPLE — Bước 1. Hệ số theo cột: $a_{11} = 50/250 = 0,2$; $a_{21} = 100/250 = 0,4$; $a_{12} = 100/500 = 0,2$; $a_{22} = 200/500 = 0,4$. Đọc $a_{21} = 0,4$: mỗi 1 tỷ đồng nông sản cần 0,4 tỷ đồng sản phẩm công nghiệp (phân bón, máy móc, xăng dầu).

Bước 2. $I - A$ có các hàng $(0,8; -0,2)$ và $(-0,4; 0,6)$; $\det = 0,48 - 0,08 = 0,4$.

Bước 3. $(I - A)^{-1} = (1/0,4) \cdot [(0,6; 0,2), (0,4; 0,8)]$, có các hàng $(1,5; 0,5)$ và $(1; 2)$.

Bước 4. Kiểm: $(I - A)^{-1} \cdot (100; 200) = (150 + 100; 100 + 400) = (250; 500)$, khớp bảng.

Bước 5. Năm sau cầu cuối cùng nông sản tăng lên 150, công nghiệp giữ 200: $X' = (1,5 \cdot 150 + 0,5 \cdot 200; 1 \cdot 150 + 2 \cdot 200) = (325; 550)$ tỷ đồng. Cầu cuối cùng tăng 50 nhưng tổng sản lượng tăng 125.

Step 1. Column coefficients: $a_{11} = 50/250 = 0.2$; $a_{21} = 100/250 = 0.4$; $a_{12} = 100/500 = 0.2$; $a_{22} = 200/500 = 0.4$. Reading $a_{21} = 0.4$: each VND 1 billion of farm output needs VND 0.4 billion of industrial goods (fertiliser, machinery, fuel).

Step 2. $I - A$ has rows $(0.8; -0.2)$ and $(-0.4; 0.6)$; $\det = 0.48 - 0.08 = 0.4$.

Step 3. $(I - A)^{-1} = (1/0.4) \cdot [(0.6; 0.2), (0.4; 0.8)]$, with rows $(1.5; 0.5)$ and $(1; 2)$.

Step 4. Check: $(I - A)^{-1} \cdot (100; 200) = (150 + 100; 100 + 400) = (250; 500)$, matching the table.

Step 5. Next year final demand for farm goods rises to 150, industry stays at 200: $X' = (1.5 \cdot 150 + 0.5 \cdot 200; 1 \cdot 150 + 2 \cdot 200) = (325; 550)$ billion VND. Final demand rises by 50 but gross output by 125.

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{số nhân sản lượng: } 2,5 \text{ và } 2,5$$

Khi các tổng cột của A nhỏ hơn 1, nghịch đảo Leontief khai triển được thành chuỗi. Mỗi số hạng là một “vòng” đầu vào: D là cầu cuối cùng, AD là đầu vào trực tiếp để làm ra D, A^2D là đầu vào để làm ra AD, ...

When the column sums of A are below 1, the Leontief inverse expands as a series. Each term is one “round” of inputs: D is final demand, AD the direct input needed to make D , A^2D the input needed to make AD , ...

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots \Rightarrow X = D + AD + A^2D + \dots \quad (3.14)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Với ví dụ hai ngành, $D = (100; 200)$: $AD = (0,2 \cdot 100 + 0,2 \cdot 200; 0,4 \cdot 100 + 0,4 \cdot 200) = (60; 120) = 0,6 \cdot D$; $A^2D = 0,36 \cdot D = (36; 72)$; ...

$X = D \cdot (1 + 0,6 + 0,36 + \dots) = D / (1 - 0,6) = 2,5 \cdot D = (250; 500)$, khớp kết quả bằng nghịch đảo. Ba vòng đầu đã cho (196; 392), tức 78,4% tổng sản lượng.

In the two-sector example, $D = (100; 200)$: $AD = (0,2 \cdot 100 + 0,2 \cdot 200; 0,4 \cdot 100 + 0,4 \cdot 200) = (60; 120) = 0,6 \cdot D$; $A^2D = 0,36 \cdot D = (36; 72)$; ...

$X = D \cdot (1 + 0,6 + 0,36 + \dots) = D / (1 - 0,6) = 2,5 \cdot D = (250; 500)$, matching the inverse method. The first three rounds already give (196; 392), i.e. 78.4% of gross output.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Tính a_{ij} bằng cách chia cho tổng sản lượng ngành **bán** (theo hàng): $a_{21} = 100/500 = 0,2$ thay vì $100/250 = 0,4$. Ma trận sai làm mọi kết quả sau sai theo. Nhớ: chia cho cột, tức cho ngành dùng đầu vào.

*Computing a_{ij} by dividing by the gross output of the **selling** sector (by row): $a_{21} = 100/500 = 0.2$ instead of $100/250 = 0.4$. A wrong matrix spoils every later result. Remember: divide by the column, i.e. by the sector that uses the input.*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $X = (I - A)D$, $X = A^{-1}D$ hoặc $X = D(I - A)^{-1}$. Công thức đúng là $X = (I - A)^{-1}D$: nghịch đảo của ma trận Leontief, nhân **bên trái** vector cột D . Phép nhân ma trận không giao hoán, đổi thứ tự là sai kích thước hoặc sai kết quả.

*Writing $X = (I - A)D$, $X = A^{-1}D$ or $X = D(I - A)^{-1}$. The correct formula is $X = (I - A)^{-1}D$: the inverse of the Leontief matrix multiplied **on the left** of the column vector D . Matrix multiplication is not commutative; changing the order gives wrong dimensions or wrong results.*

Mô hình ba ngành — Three-sector model

Với ba ngành, nghịch đảo $(I - A)^{-1}$ tính bằng ma trận phụ hợp hoặc Gauss–Jordan (Chương 1), hoặc bằng máy (mục 3.6). Cho nông nghiệp (1), công nghiệp (2), dịch vụ (3):

With three sectors, the inverse $(I - A)^{-1}$ is computed by the adjugate or Gauss–Jordan (Chapter 1), or by computer (section 3.6). For agriculture (1), industry (2), services (3):

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix} \quad D = (100; 200; 150)$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,3 \\ -0,1 & 0,9 & -0,1 \\ -0,1 & -0,3 & 0,9 \end{bmatrix} \quad \det(I - A) = 0,5$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,56 & 0,36 & 0,56 \\ 0,20 & 1,20 & 0,20 \\ 0,24 & 0,44 & 1,24 \end{bmatrix}$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tổng sản lượng: $X_1 = 1,56 \cdot 100 + 0,36 \cdot 200 + 0,56 \cdot 150 = 156 + 72 + 84 = 312$; $X_2 = 0,2 \cdot 100 + 1,2 \cdot 200 + 0,2 \cdot 150 = 290$; $X_3 = 0,24 \cdot 100 + 0,44 \cdot 200 + 1,24 \cdot 150 = 24 + 88 + 186 = 298$ (tỷ đồng).

Kiểm hàng 1: $0,7 \cdot 312 - 0,1 \cdot 290 - 0,3 \cdot 298 = 218,4 - 29 - 89,4 = 100 = D_1$.

Giá trị gia tăng: mỗi cột của A có tổng 0,5 nên $V = 0,5 \cdot X = (156; 145; 149)$, $\sum V = 450 = \sum D$.

Cầu cuối cùng công nghiệp tăng 20 $\Rightarrow \Delta X = 20 \times$ cột 2 của $(I - A)^{-1} = (7,2; 24; 8,8)$, tổng sản lượng tăng 40 tỷ đồng.

Gross output: $X_1 = 1.56 \cdot 100 + 0.36 \cdot 200 + 0.56 \cdot 150 = 156 + 72 + 84 = 312$; $X_2 = 0.2 \cdot 100 + 1.2 \cdot 200 + 0.2 \cdot 150 = 290$; $X_3 = 0.24 \cdot 100 + 0.44 \cdot 200 + 1.24 \cdot 150 = 24 + 88 + 186 = 298$ (billion VND).

Row 1 check: $0.7 \cdot 312 - 0.1 \cdot 290 - 0.3 \cdot 298 = 218.4 - 29 - 89.4 = 100 = D_1$.

Value added: each column of A sums to 0.5, so $V = 0.5 \cdot X = (156; 145; 149)$, $\sum V = 450 = \sum D$.

Industry final demand up by 20 $\Rightarrow \Delta X = 20 \times$ column 2 of $(I - A)^{-1} = (7.2; 24; 8.8)$; gross output rises by VND 40 billion.

Ngành <i>Sector</i>	Tổng cột của A <i>Column sum of A</i>	Tỷ lệ giá trị gia tăng <i>Value-added share</i>	Số nhân sản lượng <i>Output multiplier</i>
Nông nghiệp <i>Agriculture</i>	0,5 <i>0.5</i>	0,5 <i>0.5</i>	$1,56 + 0,20 + 0,24 = 2,00$ <i>$1.56 + 0.20 + 0.24 = 2.00$</i>
Công nghiệp <i>Industry</i>	0,5 <i>0.5</i>	0,5 <i>0.5</i>	$0,36 + 1,20 + 0,44 = 2,00$ <i>$0.36 + 1.20 + 0.44 = 2.00$</i>
Dịch vụ <i>Services</i>	0,5 <i>0.5</i>	0,5 <i>0.5</i>	$0,56 + 0,20 + 1,24 = 2,00$ <i>$0.56 + 0.20 + 1.24 = 2.00$</i>

Khi mọi cột của A có cùng tổng s, mọi cột của $(I - A)^{-1}$ có tổng $1/(1 - s)$; ở đây $1/(1 - 0,5) = 2$. Đây là cách kiểm nhanh kết quả nghịch đảo.

When every column of A has the same sum s, every column of $(I - A)^{-1}$ sums to $1/(1 - s)$; here $1/(1 - 0.5) = 2$. This is a quick check on the inverse.

Nhu cầu lao động và các nguồn lực khác — Labour and other resource requirements

Nếu ngành j cần l_j lao động cho mỗi đơn vị sản lượng (hệ số lao động), tổng lao động cần là $L = l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_n X_n$. Cách tính giống hệt cho điện năng, nước, phát thải: thay l_j bằng hệ số tiêu hao tương ứng.

If sector j needs l_j workers per unit of output (the labour coefficient), total labour required is $L = l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_n X_n$. The same calculation applies to electricity, water or emissions: replace l_j with the corresponding usage coefficient.

$$L = l \cdot X = l \cdot (I - A)^{-1} D \quad (3.15)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ba ngành ở trên có hệ số lao động $l = (3; 1,5; 2)$ người/tỷ đồng. Với $X = (312; 290; 298)$:

$L = 3 \cdot 312 + 1,5 \cdot 290 + 2 \cdot 298 = 936 + 435 + 596 = \mathbf{1.967}$ người.

Cầu cuối cùng công nghiệp tăng 20 $\Rightarrow \Delta L = 3 \cdot 7,2 + 1,5 \cdot 24 + 2 \cdot 8,8 = 21,6 + 36 + 17,6 = \mathbf{75,2}$ người (khoảng 75 người), trong đó 39,2 người làm ở hai ngành không có thêm cầu cuối cùng.

The three sectors above have labour coefficients $l = (3; 1.5; 2)$ persons per VND billion. With $X = (312; 290; 298)$:

$L = 3 \cdot 312 + 1.5 \cdot 290 + 2 \cdot 298 = 936 + 435 + 596 = \mathbf{1,967}$ persons.

Industry final demand up by 20 $\Rightarrow \Delta L = 3 \cdot 7.2 + 1.5 \cdot 24 + 2 \cdot 8.8 = 21.6 + 36 + 17.6 = \mathbf{75.2}$ persons (about 75), of whom 39.2 work in the two sectors with no extra final demand.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Quên kiểm điều kiện sản xuất được. Nếu một tổng cột của A lớn hơn hoặc bằng 1 (ngành tiêu tốn đầu vào nhiều hơn giá trị nó làm ra), $(I - A)^{-1}$ có thể có phần tử âm và X tính ra âm, vô nghĩa kinh tế.

Forgetting the productiveness check. If a column sum of A is 1 or more (the sector uses more input than the value it produces), $(I - A)^{-1}$ may have negative entries and X may come out negative, which is economically meaningless.

3.6. Giải mô hình bằng Python — Solving the models with Python

Mọi mô hình trong chương đưa về dạng $MX = B$. Hàm `numpy.linalg.solve(M, B)` giải trực tiếp, `numpy.linalg.inv(M)` cho ma trận nghịch đảo, `numpy.linalg.det(M)` cho định thức. Toán tử `@` là phép nhân ma trận. Kết quả số thực có thể lệch ở chữ số thập phân thứ 15 do sai số làm tròn; dùng `round` để đọc.

Every model in this chapter reduces to $MX = B$. `numpy.linalg.solve(M, B)` solves it directly, `numpy.linalg.inv(M)` gives the inverse, `numpy.linalg.det(M)` the determinant. The `@` operator is matrix multiplication. Floating-point results may differ in the 15th decimal place due to rounding; use `round` to read them.

Cân bằng thị trường hai hàng hóa — Two-good market equilibrium

```
import numpy as np

# Hai hàng hóa thay thế (mục 3.2): 5P1 - P2 = 110; -P1 + 6P2 = 210
M = np.array([[5, -1], [-1, 6]])
B = np.array([110, 210])
P = np.linalg.solve(M, B)
print('det =', round(np.linalg.det(M), 4))
print('P1 =', round(P[0], 4), '| P2 =', round(P[1], 4))
print('Q1 =', round(-20 + 3 * P[0], 4), '| Q2 =', round(-30 + 2 * P[1], 4))
```

Kết quả in ra:

Printed output:

```
det = 29.0
P1 = 30.0 | P2 = 40.0
Q1 = 70.0 | Q2 = 50.0
```

Thu nhập quốc dân có thuế và ngoại thương — *National income with tax and foreign trade*

```
import numpy as np

# Thu nhập quốc dân có thuế và ngoại thương (mục 3.3), ần (Y, C, T)
b, t, m = 0.8, 0.25, 0.1
C0, T0, I0, G0, X0, M0 = 200, 50, 300, 500, 400, 60
M = np.array([[1 + m, -1, 0],
               [-b, 1, b],
               [-t, 0, 1]])
B = np.array([I0 + G0 + X0 - M0, C0, T0])
Y, C, T = np.linalg.solve(M, B)
print('Y =', round(Y, 2), '| C =', round(C, 2), '| T =', round(T, 2))
print('Nhập khẩu M =', round(M0 + m * Y, 2))
```

Kết quả in ra, khớp ví dụ ở mục 3.3:

Printed output, matching the example in section 3.3:

```
Y = 2600.0 | C = 1720.0 | T = 700.0
Nhập khẩu M = 320.0
```

IS–LM và phân tích chính sách — *IS–LM and policy analysis*

```
import numpy as np

# IS: 0.25Y + 40r = 800 ; LM: 0.25Y - 50r = 350 (mục 3.4)
M = np.array([[0.25, 40], [0.25, -50]])
for G0, Ms in [(300, 350), (345, 350), (300, 395)]:
    B = np.array([150 + 350 + G0, Ms])
    Y, r = np.linalg.solve(M, B)
    print('G0 =', G0, 'Ms =', Ms, '-> Y =', round(Y, 2), 'r =', round(r, 2))
```

Kết quả in ra, khớp bảng phân tích chính sách ở mục 3.4:

Printed output, matching the policy table in section 3.4:

```
G0 = 300 Ms = 350 -> Y = 2400.0 r = 5.0
G0 = 345 Ms = 350 -> Y = 2500.0 r = 5.5
G0 = 300 Ms = 395 -> Y = 2480.0 r = 4.5
```

Mô hình Leontief ba ngành — *Three-sector Leontief model*

```
import numpy as np

# Leontief ba ngành (mục 3.5)
A = np.array([[0.3, 0.1, 0.3],
               [0.1, 0.1, 0.1],
               [0.1, 0.3, 0.1]])
D = np.array([100, 200, 150])
L = np.eye(3) - A # ma trận Leontief
Linv = np.linalg.inv(L)
print('det(I - A) =', round(np.linalg.det(L), 4))
print(np.round(Linv, 4))
X = Linv @ D # tổng cầu = (I - A)^(-1) D
print('X =', np.round(X, 2))
print('Kiểm tra X - AX =', np.round(X - A @ X, 2))
```

Kết quả in ra:

Printed output:

```
det(I - A) = 0.5
[[1.56 0.36 0.56]
 [0.2  1.2  0.2 ]
 [0.24 0.44 1.24]]
X = [312. 290. 298.]
Kiểm tra X - AX = [100. 200. 150.]
```

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tự kiểm bài Leontief bằng máy theo ba bước: (1) nhập A theo đúng thứ tự hàng = ngành bán, cột = ngành mua; (2) in `np.round(X - A @ X, 2)` để thấy lại đúng D; (3) in tổng cột của A bằng `A.sum(axis=0)` để kiểm điều kiện sản xuất được.

Self-check a Leontief exercise in three steps: (1) enter A with rows = selling sectors, columns = buying sectors; (2) print `np.round(X - A @ X, 2)` to recover D; (3) print the column sums of A with `A.sum(axis=0)` to check productiveness.

3.7. Tổng hợp công thức và thuật ngữ — Summary of formulas and terms

Quy trình giải chung — General solution procedure

Bước Step	Việc làm Task	Kiểm tra Check
1	Xác định biến nội sinh (ẩn) và biến ngoại sinh (cho trước) <i>Identify endogenous (unknown) and exogenous (given) variables</i>	Số phương trình bằng số ẩn <i>As many equations as unknowns</i>
2	Viết điều kiện cân bằng: $Q_d = Q_s$; $Y =$ tổng cầu; cầu tiền = cung tiền; $X = AX + D$ <i>Write the equilibrium conditions: $Q_d = Q_s$; $Y =$ aggregate demand; money demand = money supply; $X = AX + D$</i>	Mỗi phương trình có đơn vị nhất quán <i>Each equation has consistent units</i>
3	Chuyển ẩn sang vế trái, hằng số sang vế phải, viết $MX = B$ <i>Move unknowns left, constants right, write $MX = B$</i>	Đổi dấu khi chuyển vế <i>Change signs when moving terms</i>
4	Tính $\det M$; giải bằng Cramer, Gauss hoặc $M^{-1}B$ <i>Compute $\det M$; solve by Cramer, Gauss or $M^{-1}B$</i>	$\det M \neq 0$
5	Thế nghiệm vào phương trình gốc; xét ý nghĩa kinh tế <i>Substitute back into the original equations; interpret economically</i>	Giá, lượng, sản lượng dương; lãi suất hợp lý <i>Prices, quantities, outputs positive; plausible interest rate</i>

Bảng tổng hợp công thức — Formula summary

Công thức Formula	Ý nghĩa kinh tế Economic meaning
$\bar{P} = (a + c)/(b + d)$; $\bar{Q} = (bc - ad)/(b + d)$	Giá, lượng cân bằng với $Q_d = c - dP$, $Q_s = -a + bP$ <i>Equilibrium price and quantity with $Q_d = c - dP$, $Q_s = -a + bP$</i>

Công thức <i>Formula</i>	Ý nghĩa kinh tế <i>Economic meaning</i>
ΔP người mua = $bt/(b + d)$; ΔP người bán = $-dt/(b + d)$ $\Delta P_{buyers} = bt/(b + d)$; $\Delta P_{sellers} = -dt/(b + d)$	Phân chia gánh nặng thuế t trên mỗi đơn vị <i>Incidence of a per-unit tax t</i>
$\sum_i (a_{ij} - b_{ij})P_j = b_{i0} - a_{i0}$	Hệ cân bằng n hàng hóa; giải bằng Cramer hoặc nghịch đảo <i>n-good equilibrium system; solve by Cramer or inverse</i>
$\bar{Y} = (C_0 + I_0 + G_0)/(1 - b)$	Thu nhập cân bằng, nền kinh tế đóng không thuế <i>Equilibrium income, closed economy without tax</i>
$\bar{Y} = (C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)/(1 - b + bt)$	Thu nhập cân bằng có thuế $T = T_0 + tY$ <i>Equilibrium income with tax $T = T_0 + tY$</i>
$\bar{Y} = (C_0 - bT_0 + I_0 + G_0 + X_0 - M_0)/(1 - b + bt + m)$	Thu nhập cân bằng nền kinh tế mở <i>Equilibrium income in an open economy</i>
$k = 1/(1 - b + bt + m)$	Số nhân chi tiêu: $\Delta Y = k \cdot \Delta G$ <i>Spending multiplier: $\Delta Y = k \cdot \Delta G$</i>
IS: $(1 - b)Y + dr = A$; LM: $kY - hr = M_0$	Cân bằng đồng thời thị trường hàng hóa và tiền tệ <i>Joint equilibrium of goods and money markets</i>
$\partial \bar{Y} / \partial G_0 = h/(h(1 - b) + dk)$	Số nhân tài khóa có lấn át đầu tư <i>Fiscal multiplier with crowding out</i>
$a_{ij} = x_{ij}/X_j$	Đầu vào từ ngành i cho 1 đơn vị sản lượng ngành j <i>Input from sector i per unit of sector j output</i>
$X = (I - A)^{-1}D$	Tổng sản lượng cần để đáp ứng cầu cuối cùng D <i>Gross output required to meet final demand D</i>
$\Delta X = (I - A)^{-1}\Delta D$	Tác động của thay đổi cầu cuối cùng <i>Effect of a change in final demand</i>
$V_j = (1 - \sum_i a_{ij})X_j$	Giá trị gia tăng của ngành j <i>Value added of sector j</i>

Bảng thuật ngữ Việt – Anh — Vietnamese – English glossary

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Cân bằng thị trường	Market equilibrium	Trạng thái lượng cầu bằng lượng cung <i>State where quantity demanded equals quantity supplied</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Dư cung	Excess supply	Lượng cung lớn hơn lượng cầu tại mức giá đang xét <i>Quantity supplied exceeds quantity demanded at the given price</i>
Dư cầu	Excess demand	Lượng cầu lớn hơn lượng cung <i>Quantity demanded exceeds quantity supplied</i>
Hàng thay thế	Substitute goods	Giá hàng này tăng làm cầu hàng kia tăng <i>A rise in one price raises demand for the other</i>
Hàng bổ sung	Complementary goods	Giá hàng này tăng làm cầu hàng kia giảm <i>A rise in one price lowers demand for the other</i>
Thuế theo đơn vị sản phẩm	Per-unit tax	Thuế cố định trên mỗi đơn vị bán ra <i>A fixed tax on each unit sold</i>
Biến nội sinh	Endogenous variable	Biến do mô hình xác định <i>Variable determined by the model</i>
Biến ngoại sinh	Exogenous variable	Biến cho trước từ bên ngoài mô hình <i>Variable given from outside the model</i>
Khuynh hướng tiêu dùng cận biên	Marginal propensity to consume (MPC)	Phần chi tiêu thêm khi thu nhập tăng 1 đơn vị <i>Extra spending per unit rise in income</i>
Khuynh hướng tiết kiệm cận biên	Marginal propensity to save (MPS)	Bằng 1 – MPC <i>Equals 1 – MPC</i>
Khuynh hướng nhập khẩu cận biên	Marginal propensity to import (MPM)	Phần nhập khẩu thêm khi thu nhập tăng 1 đơn vị <i>Extra imports per unit rise in income</i>
Thu nhập khả dụng	Disposable income	Thu nhập sau thuế $Y_d = Y - T$ <i>After-tax income $Y_d = Y - T$</i>
Số nhân	Multiplier	Mức thay đổi của Y khi chi tiêu tự định tăng 1 đơn vị <i>Change in Y per unit rise in autonomous spending</i>
Đường IS	IS curve	Các cặp (Y, r) cân bằng thị trường hàng hóa <i>(Y, r) pairs clearing the goods market</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Đường LM	LM curve	Các cặp (Y, r) cân bằng thị trường tiền tệ <i>(Y, r) pairs clearing the money market</i>
Hiệu ứng lấn át	Crowding-out effect	Đầu tư tư nhân giảm do chi tiêu công đẩy lãi suất lên <i>Private investment falls as public spending raises interest rates</i>
Mô hình input–output	Input–output model	Mô hình cân đối liên ngành của Leontief <i>Leontief's inter-industry balance model</i>
Hệ số chi phí trực tiếp	Technical coefficient	$a_{ij} = x_{ij}/X_j$
Ma trận Leontief	Leontief matrix	Ma trận $I - A$ <i>The matrix $I - A$</i>
Ma trận hệ số chi phí toàn phần	Total requirements matrix (Leontief inverse)	Ma trận $(I - A)^{-1}$ <i>The matrix $(I - A)^{-1}$</i>
Cầu cuối cùng	Final demand	Phần sản lượng không dùng làm đầu vào trung gian <i>Output not used as intermediate input</i>
Giá trị gia tăng	Value added	Sản lượng trừ chi phí trung gian <i>Output minus intermediate cost</i>
Số nhân sản lượng	Output multiplier	Tổng cột j của $(I - A)^{-1}$ <i>Column sum j of $(I - A)^{-1}$</i>

3.8. Bài tập vận dụng có lời giải — *Applied exercises with solutions*

Bài 1. Ba sản phẩm của một chuỗi cửa hàng tiện lợi — *Exercise 1. Three products in a convenience-store chain*

Một chuỗi cửa hàng tiện lợi tại Thành phố Hồ Chí Minh bán ba sản phẩm: cà phê sữa đóng chai (hàng 1), trà sữa đóng chai (hàng 2) và bánh ngọt (hàng 3). Giá P_1, P_2, P_3 tính bằng nghìn đồng/sản phẩm; lượng tính bằng trăm sản phẩm/ngày. Hàm cầu và hàm cung ước

$$\begin{array}{lcl}
 \text{lượng} & \text{từ} & \text{dữ liệu bán hàng:} \\
 Q_{d1} & = & 100 - 4P_1 + 2P_2 - P_3; \quad Q_{s1} = -20 + 3P_1 \\
 Q_{d2} & = & 75 + 2P_1 - 5P_2 - P_3; \quad Q_{s2} = -30 + 4P_2 \\
 Q_{d3} & = & 90 - P_1 - P_2 - 3P_3; \quad Q_{s3} = -25 + 5P_3
 \end{array}$$

(a) Cho biết quan hệ giữa các cặp hàng hóa. (b) Tìm giá và lượng cân bằng của cả ba thị trường. (c) Nếu bỏ qua ảnh hưởng chéo, giá cà phê tính ra bao nhiêu và sai lệch bao nhiêu? (d) Cầu cà phê tăng thêm 10 trăm chai/ngày ở mọi mức giá; giá ba hàng thay đổi thế nào?

A convenience-store chain in Ho Chi Minh City sells three products: bottled milk coffee (good 1), bottled milk tea (good 2) and pastries (good 3). Prices P_1, P_2, P_3 are in thousand VND per item; quantities are in hundreds of items per day. Demand and supply functions estimated from sales data:

$$\begin{array}{lcl} Q_{d1} & = & 100 - 4P_1 + 2P_2 - P_3; & Q_{s1} & = & -20 + 3P_1 \\ Q_{d2} & = & 75 + 2P_1 - 5P_2 - P_3; & Q_{s2} & = & -30 + 4P_2 \\ Q_{d3} & = & 90 - P_1 - P_2 - 3P_3; & Q_{s3} & = & -25 + 5P_3 \end{array}$$

(a) State the relationship between each pair of goods. (b) Find the equilibrium prices and quantities in all three markets. (c) Ignoring cross effects, what coffee price would one obtain and how large is the error? (d) Coffee demand rises by 10 hundred bottles a day at every price; how do the three prices change?

1. Quan hệ giữa các hàng: trong Q_{d1} hệ số của P_2 là $+2 > 0$ và trong Q_{d2} hệ số của P_1 là $+2 > 0$, nên cà phê và trà sữa là **hàng thay thế**. Hệ số của P_3 trong Q_{d1}, Q_{d2} đều âm và hệ số của P_1, P_2 trong Q_{d3} đều âm, nên bánh ngọt là **hàng bổ sung** của cả hai loại đồ uống.

*Relationships: in Q_{d1} the coefficient of P_2 is $+2 > 0$ and in Q_{d2} the coefficient of P_1 is $+2 > 0$, so coffee and milk tea are **substitutes**. The coefficients of P_3 in Q_{d1}, Q_{d2} are negative and those of P_1, P_2 in Q_{d3} are negative, so pastries are a **complement** of both drinks.*

2. Lập hệ cân bằng $Q_{di} = Q_{si}$, chuyển ẩn sang vế trái: $7P_1 - 2P_2 + P_3 = 120$; $-2P_1 + 9P_2 + P_3 = 105$; $P_1 + P_2 + 8P_3 = 115$. Ma trận hệ số M có các hàng $(7; -2; 1)$, $(-2; 9; 1)$, $(1; 1; 8)$, vế phải $B = (120; 105; 115)$.

Set $Q_{di} = Q_{si}$ and move unknowns to the left: $7P_1 - 2P_2 + P_3 = 120$; $-2P_1 + 9P_2 + P_3 = 105$; $P_1 + P_2 + 8P_3 = 115$. Coefficient matrix M has rows $(7; -2; 1)$, $(-2; 9; 1)$, $(1; 1; 8)$, right-hand side $B = (120; 105; 115)$.

3. Cramer: $\det M = 7(72 - 1) + 2(-16 - 1) + 1(-2 - 9) = 497 - 34 - 11 = 452 \neq 0$. $D_1 = 9.040$, $D_2 = 6.780$, $D_3 = 4.520 \Rightarrow P_1 = 9.040/452 = 20$; $P_2 = 6.780/452 = 15$; $P_3 = 4.520/452 = 10$ (nghìn đồng).

Cramer: $\det M = 7(72 - 1) + 2(-16 - 1) + 1(-2 - 9) = 497 - 34 - 11 = 452 \neq 0$. $D_1 = 9,040$, $D_2 = 6,780$, $D_3 = 4,520 \Rightarrow P_1 = 9,040/452 = 20$; $P_2 = 6,780/452 = 15$; $P_3 = 4,520/452 = 10$ (thousand VND).

4. Lượng cân bằng: $Q_1 = -20 + 3 \cdot 20 = 40$; $Q_2 = -30 + 4 \cdot 15 = 30$; $Q_3 = -25 + 5 \cdot 10 = 25$ (trăm sản phẩm/ngày). Kiểm lại phía cầu: $Q_{d1} = 100 - 80 + 30 - 10 = 40$; $Q_{d2} = 75 + 40 - 75 - 10 = 30$; $Q_{d3} = 90 - 20 - 15 - 30 = 25$. Giá và lượng đều dương, nghiệm có nghĩa kinh tế.

Equilibrium quantities: $Q_1 = -20 + 3 \cdot 20 = 40$; $Q_2 = -30 + 4 \cdot 15 = 30$; $Q_3 = -25 + 5 \cdot 10 = 25$ (hundred items per day). Demand check: $Q_{d1} = 100 - 80 + 30 - 10 = 40$; $Q_{d2} = 75 + 40 - 75 - 10 = 30$; $Q_{d3} = 90 - 20 - 15 - 30 = 25$. All prices and quantities are positive, so the solution is economically valid.

5. Bỏ qua ảnh hưởng chéo: $100 - 4P_1 = -20 + 3P_1 \Rightarrow P_1 = 120/7 \approx 17,14$ nghìn đồng, thấp hơn giá đúng 20 nghìn đồng khoảng 2,86 nghìn đồng (14,3%). Giá trà sữa cao kéo cầu cà phê lên, phần này bị mất khi xét riêng một thị trường.

Ignoring cross effects: $100 - 4P_1 = -20 + 3P_1 \Rightarrow P_1 = 120/7 \approx 17.14$ thousand VND, about 2.86 thousand VND (14.3%) below the true 20. The high milk-tea price pushes coffee demand up; that effect is lost when one market is studied alone.

6. Cầu cà phê tăng 10: về phải đổi thành $B + (10; 0; 0)$, nên $\Delta P = M^{-1} \cdot (10; 0; 0) = 10 \times$ cột 1 của M^{-1} . Cột 1 của M^{-1} là $(71; 17; -11)/452 \Rightarrow \Delta P_1 \approx 1,57; \Delta P_2 \approx 0,38; \Delta P_3 \approx -0,24$ nghìn đồng. Cà phê tăng giá, trà sữa (hàng thay thế) tăng giá theo, bánh ngọt (hàng bổ sung) giảm giá.

Coffee demand up by 10: the right-hand side becomes $B + (10; 0; 0)$, so $\Delta P = M^{-1} \cdot (10; 0; 0) = 10 \times$ column 1 of M^{-1} . Column 1 of M^{-1} is $(71; 17; -11)/452 \Rightarrow \Delta P_1 \approx 1.57; \Delta P_2 \approx 0.38; \Delta P_3 \approx -0.24$ thousand VND. Coffee becomes dearer, milk tea (a substitute) follows it up, and pastries (a complement) become cheaper.

Bài 2. Kế hoạch sản xuất của một tỉnh ba ngành — Exercise 2. Production plan for a three-sector province

Bảng cân đối liên ngành năm 2025 của một tỉnh (đơn vị: tỷ đồng) gồm ba ngành: nông nghiệp (1), công nghiệp (2), dịch vụ (3). Tổng sản lượng $X_1 = 500, X_2 = 400, X_3 = 600$. Giá trị sản phẩm ngành i bán cho ngành j làm đầu vào (x_{ij}): hàng 1: 100; 80; 60 — hàng 2: 100; 40; 120 — hàng 3: 100; 40; 120. Số lao động cần cho 1 tỷ đồng sản lượng lần lượt là 2; 1; 1,5 người. (a) Lập ma trận hệ số chi phí trực tiếp A , tìm cầu cuối cùng và giá trị gia tăng của từng ngành. (b) Năm 2026 tỉnh đặt mục tiêu cầu cuối cùng $D' = (300; 160; 360)$. Tìm tổng sản lượng cần có của mỗi ngành. (c) Tỉnh cần thêm bao nhiêu lao động?

The 2025 input-output table of a province (unit: billion VND) has three sectors: agriculture (1), industry (2), services (3). Gross outputs $X_1 = 500, X_2 = 400, X_3 = 600$. The value of sector i 's output sold to sector j as input (x_{ij}): row 1: 100; 80; 60 — row 2: 100; 40; 120 — row 3: 100; 40; 120. Labour needed per VND 1 billion of output is 2; 1; 1.5 persons respectively. (a) Build the technical coefficient matrix A , and find each sector's final demand and value added. (b) For 2026 the province targets final demand $D' = (300; 160; 360)$. Find the required gross output of each sector. (c) How many extra workers does the province need?

1. Hệ số $a_{ij} = x_{ij}/X_j$ (chia cho tổng sản lượng của ngành MUA, tức theo cột): cột 1 chia 500, cột 2 chia 400, cột 3 chia 600. A có các hàng $(0,2; 0,2; 0,1), (0,2; 0,1; 0,2), (0,2; 0,1; 0,2)$. Ví dụ $a_{23} = 120/600 = 0,2$: dịch vụ cần 0,2 tỷ đồng sản phẩm công nghiệp cho mỗi 1 tỷ đồng sản lượng của mình.

Coefficients $a_{ij} = x_{ij}/X_j$ (divide by the gross output of the BUYING sector, i.e. by column): column 1 by 500, column 2 by 400, column 3 by 600. A has rows $(0.2; 0.2; 0.1), (0.2; 0.1; 0.2), (0.2; 0.1; 0.2)$. For example $a_{23} = 120/600 = 0.2$: services need VND 0.2 billion of industrial output per VND 1 billion of their own output.

2. Cầu cuối cùng $D_i = X_i -$ tổng hàng i : $D_1 = 500 - 240 = 260; D_2 = 400 - 260 = 140; D_3 = 600 - 260 = 340$. Giá trị gia tăng $V_j = X_j -$ tổng cột j : $V_1 = 500 - 300 = 200; V_2 = 400 - 160 = 240; V_3 = 600 - 300 = 300$. Kiểm: $\sum D = 740 = \sum V$, đúng đồng nhất thức của bảng cân đối.

Final demand $D_i = X_i -$ row- i total: $D_1 = 500 - 240 = 260; D_2 = 400 - 260 = 140; D_3 = 600 - 260 = 340$. Value added $V_j = X_j -$ column- j total: $V_1 = 500 - 300 = 200; V_2 = 400 - 160 = 240; V_3 = 600 - 300 = 300$. Check: $\sum D = 740 = \sum V$, the accounting identity of the table.

3. Ma trận Leontief $I - A$ có các hàng $(0,8; -0,2; -0,1)$, $(-0,2; 0,9; -0,2)$, $(-0,2; -0,1; 0,8)$; $\det(I - A) = 0,5$. Ma trận nghịch đảo $(I - A)^{-1}$ có các hàng $(1,40; 0,34; 0,26)$, $(0,40; 1,24; 0,36)$, $(0,40; 0,24; 1,36)$.
Leontief matrix $I - A$ has rows $(0.8; -0.2; -0.1)$, $(-0.2; 0.9; -0.2)$, $(-0.2; -0.1; 0.8)$; $\det(I - A) = 0.5$. The inverse $(I - A)^{-1}$ has rows $(1.40; 0.34; 0.26)$, $(0.40; 1.24; 0.36)$, $(0.40; 0.24; 1.36)$.
4. Tổng sản lượng năm 2026: $X' = (I - A)^{-1}D'$. $X'_1 = 1,4 \cdot 300 + 0,34 \cdot 160 + 0,26 \cdot 360 = 420 + 54,4 + 93,6 = 568$; $X'_2 = 0,4 \cdot 300 + 1,24 \cdot 160 + 0,36 \cdot 360 = 120 + 198,4 + 129,6 = 448$; $X'_3 = 0,4 \cdot 300 + 0,24 \cdot 160 + 1,36 \cdot 360 = 120 + 38,4 + 489,6 = 648$ (tỷ đồng).
Gross output for 2026: $X' = (I - A)^{-1}D'$. $X'_1 = 1.4 \cdot 300 + 0.34 \cdot 160 + 0.26 \cdot 360 = 420 + 54.4 + 93.6 = 568$; $X'_2 = 0.4 \cdot 300 + 1.24 \cdot 160 + 0.36 \cdot 360 = 120 + 198.4 + 129.6 = 448$; $X'_3 = 0.4 \cdot 300 + 0.24 \cdot 160 + 1.36 \cdot 360 = 120 + 38.4 + 489.6 = 648$ (billion VND).
5. Kiểm: $0,8 \cdot 568 - 0,2 \cdot 448 - 0,1 \cdot 648 = 454,4 - 89,6 - 64,8 = 300 = D'_1$; tương tự cho $D'_2 = 160$, $D'_3 = 360$. Cầu cuối cùng tăng 80 tỷ đồng nhưng tổng sản lượng tăng 164 tỷ đồng: phần chênh là đầu vào trung gian các ngành phải cung cấp cho nhau.
Check: $0.8 \cdot 568 - 0.2 \cdot 448 - 0.1 \cdot 648 = 454.4 - 89.6 - 64.8 = 300 = D'_1$; similarly $D'_2 = 160$, $D'_3 = 360$. Final demand rises by VND 80 billion but gross output rises by VND 164 billion: the gap is the intermediate input the sectors must supply to one another.
6. Lao động: năm 2025 cần $2 \cdot 500 + 1 \cdot 400 + 1,5 \cdot 600 = 2.300$ người; năm 2026 cần $2 \cdot 568 + 1 \cdot 448 + 1,5 \cdot 648 = 1.136 + 448 + 972 = 2.556$ người. Tỉnh cần thêm 256 lao động, trong đó nông nghiệp 136, công nghiệp 48, dịch vụ 72.
Labour: 2025 needs $2 \cdot 500 + 1 \cdot 400 + 1.5 \cdot 600 = 2,300$ persons; 2026 needs $2 \cdot 568 + 1 \cdot 448 + 1.5 \cdot 648 = 1,136 + 448 + 972 = 2,556$ persons. The province needs 256 more workers: 136 in agriculture, 48 in industry and 72 in services.

3.9. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — Essay questions and answer outlines

Câu 1. Nền kinh tế mở có $C = 120 + 0,75Y_d$, $Y_d = Y - T$, $T = 40 + 0,2Y$, $I = 280$, $G = 400$, xuất khẩu $X = 300$, nhập khẩu $M = 50 + 0,1Y$ (nghìn tỷ đồng). Tìm thu nhập cân bằng, tiêu dùng, thuế, nhập khẩu, cán cân thương mại; tính số nhân chi tiêu chính phủ và tác động khi G tăng 50.

Question 1. An open economy has $C = 120 + 0.75Y_d$, $Y_d = Y - T$, $T = 40 + 0.2Y$, $I = 280$, $G = 400$, exports $X = 300$, imports $M = 50 + 0.1Y$ (trillion VND). Find equilibrium income, consumption, taxes, imports and the trade balance; compute the government spending multiplier and the effect of G rising by 50.

- Thế vào $Y = C + I + G + X - M$: $Y = 120 + 0,75(Y - 40 - 0,2Y) + 280 + 400 + 300 - 50 - 0,1Y \Rightarrow Y(1 - 0,75 + 0,15 + 0,1) = 120 - 30 + 930 \Rightarrow 0,5Y = 1.020$.
Substitute into $Y = C + I + G + X - M$: $Y = 120 + 0.75(Y - 40 - 0.2Y) + 280 + 400 + 300 - 50 - 0.1Y \Rightarrow Y(1 - 0.75 + 0.15 + 0.1) = 120 - 30 + 930 \Rightarrow 0.5Y = 1,020$.
- Đáp số: $Y = 2.040$; $T = 40 + 408 = 448$; $Y_d = 1.592$; $C = 120 + 0,75 \cdot 1.592 = 1.314$ (nghìn tỷ đồng).
Answer: $Y = 2,040$; $T = 40 + 408 = 448$; $Y_d = 1,592$; $C = 120 + 0.75 \cdot 1,592 = 1,314$ (trillion VND).

- Nhập khẩu $M = 50 + 204 = 254$; cán cân thương mại $X - M = 300 - 254 = 46$ (thặng dư). Kiểm: $1.314 + 280 + 400 + 300 - 254 = 2.040$.
Imports $M = 50 + 204 = 254$; trade balance $X - M = 300 - 254 = 46$ (surplus). Check: $1,314 + 280 + 400 + 300 - 254 = 2,040$.
- Số nhân: $k = 1/(1 - b + bt + m) = 1/0,5 = 2$. G tăng 50 $\Rightarrow \Delta Y = 2 \cdot 50 = 100$, Y mới = 2.140.
Multiplier: $k = 1/(1 - b + bt + m) = 1/0.5 = 2$. G up by 50 $\Rightarrow \Delta Y = 2 \cdot 50 = 100$, new $Y = 2,140$.
- Ngân sách ban đầu $T - G = 448 - 400 = 48$ (thặng dư); sau khi G tăng, $T = 40 + 0,2 \cdot 2.140 = 468$, ngân sách còn thặng dư 18. Số nhân nhỏ hơn $1/(1 - b) = 4$ vì thuế và nhập khẩu rò rỉ một phần chi tiêu.
Initial budget $T - G = 448 - 400 = 48$ (surplus); after G rises, $T = 40 + 0.2 \cdot 2,140 = 468$ and the surplus is 18. The multiplier is below $1/(1 - b) = 4$ because taxes and imports leak part of spending.

Câu 2. Cho $C = 100 + 0,8Y_d$, $T = 0,25Y$, $I = 300 - 20r$, $G = 400$; cầu tiền $L = 0,2Y - 40r$, cung tiền $M_s = 150$ (Y : nghìn tỷ đồng, r : %/năm). Lập phương trình IS, LM; tìm Y , r cân bằng; tính C , I ; xét tác động khi G tăng 50.

Question 2. Let $C = 100 + 0.8Y_d$, $T = 0.25Y$, $I = 300 - 20r$, $G = 400$; money demand $L = 0.2Y - 40r$, money supply $M_s = 150$ (Y : trillion VND, r : % per year). Derive IS and LM; find equilibrium Y and r ; compute C and I ; examine the effect of G rising by 50.

- IS: $Y = 100 + 0,8 \cdot 0,75Y + 300 - 20r + 400 \Rightarrow 0,4Y + 20r = 800$.
IS: $Y = 100 + 0.8 \cdot 0.75Y + 300 - 20r + 400 \Rightarrow 0.4Y + 20r = 800$.
- LM: $0,2Y - 40r = 150$.
LM: $0.2Y - 40r = 150$.
- Định thức hệ: $0,4 \cdot (-40) - 20 \cdot 0,2 = -20$. $Y = (800 \cdot (-40) - 20 \cdot 150)/(-20) = 1.750$; $r = (0,4 \cdot 150 - 0,2 \cdot 800)/(-20) = 5$ (%).
Determinant: $0.4 \cdot (-40) - 20 \cdot 0.2 = -20$. $Y = (800 \cdot (-40) - 20 \cdot 150)/(-20) = 1,750$; $r = (0.4 \cdot 150 - 0.2 \cdot 800)/(-20) = 5$ (%).
- $Y_d = 0,75 \cdot 1.750 = 1.312,5$; $C = 100 + 1.050 = 1.150$; $I = 300 - 100 = 200$. Kiểm: $1.150 + 200 + 400 = 1.750$.
 $Y_d = 0.75 \cdot 1,750 = 1,312.5$; $C = 100 + 1,050 = 1,150$; $I = 300 - 100 = 200$. Check: $1,150 + 200 + 400 = 1,750$.
- G tăng 50: IS thành $0,4Y + 20r = 850 \Rightarrow Y = 1.850$, $r = 5,5$. $\Delta Y = 100 < 2,5 \cdot 50 = 125$ (số nhân khi r cố định); phần chênh lệch 25 = $2,5 \cdot 10$ do đầu tư bị lấn át: $\Delta I = -20 \cdot 0,5 = -10$.
 G up by 50: IS becomes $0.4Y + 20r = 850 \Rightarrow Y = 1,850$, $r = 5.5$. $\Delta Y = 100 < 2.5 \cdot 50 = 125$ (the multiplier with r fixed); the gap of 25 = $2.5 \cdot 10$ comes from crowded-out investment: $\Delta I = -20 \cdot 0.5 = -10$.

Câu 3. Nền kinh tế hai ngành có ma trận hệ số chi phí trực tiếp A với các hàng (0,4; 0,2) và (0,1; 0,3), cầu cuối cùng $D = (120; 80)$ tỷ đồng. Kiểm điều kiện sản xuất được, tìm $(I - A)^{-1}$, tổng sản lượng X , giá trị gia tăng; xét tác động khi cầu cuối cùng

ngành 1 tăng 20.

Question 3. A two-sector economy has technical coefficient matrix A with rows $(0.4; 0.2)$ and $(0.1; 0.3)$, and final demand $D = (120; 80)$ billion VND. Check the productiveness condition, find $(I - A)^{-1}$, gross output X and value added; examine the effect of sector 1 final demand rising by 20.

- Tổng cột của A : 0,5 và 0,5, đều nhỏ hơn 1 $\Rightarrow$ nền kinh tế sản xuất được. $I - A$ có các hàng $(0,6; -0,2)$, $(-0,1; 0,7)$; $\det = 0,42 - 0,02 = 0,4 > 0$.

Column sums of A : 0.5 and 0.5, both below 1 $\Rightarrow$ the economy is productive. $I - A$ has rows $(0.6; -0.2)$, $(-0.1; 0.7)$; $\det = 0.42 - 0.02 = 0.4 > 0$.

- $(I - A)^{-1} = (1/0,4) \cdot [(0,7; 0,2), (0,1; 0,6)]$ có các hàng $(1,75; 0,5)$, $(0,25; 1,5)$.

$(I - A)^{-1} = (1/0.4) \cdot [(0.7; 0.2), (0.1; 0.6)]$ with rows $(1.75; 0.5)$, $(0.25; 1.5)$.

- $X = (I - A)^{-1}D$: $X_1 = 1,75 \cdot 120 + 0,5 \cdot 80 = 250$; $X_2 = 0,25 \cdot 120 + 1,5 \cdot 80 = 150$ (tỷ đồng).

$X = (I - A)^{-1}D$: $X_1 = 1.75 \cdot 120 + 0.5 \cdot 80 = 250$; $X_2 = 0.25 \cdot 120 + 1.5 \cdot 80 = 150$ (billion VND).

- Giá trị gia tăng: $V_1 = (1 - 0,5) \cdot 250 = 125$; $V_2 = (1 - 0,5) \cdot 150 = 75$; $\sum V = 200 = \sum D$.

Value added: $V_1 = (1 - 0.5) \cdot 250 = 125$; $V_2 = (1 - 0.5) \cdot 150 = 75$; $\sum V = 200 = \sum D$.

- D_1 tăng 20 $\Rightarrow \Delta X = 20 \times$ cột 1 của $(I - A)^{-1} = (35; 5)$. Ngành 2 không có thêm cầu cuối cùng nhưng vẫn phải sản xuất thêm 5 tỷ đồng để cung cấp đầu vào cho ngành 1.

D_1 up by 20 $\Rightarrow \Delta X = 20 \times$ column 1 of $(I - A)^{-1} = (35; 5)$. Sector 2 gets no extra final demand yet must produce VND 5 billion more to supply inputs to sector 1.

3.10. Câu hỏi trắc nghiệm — Multiple-choice questions

15. Thị trường có $Q_d = 90 - 2P$ và $Q_s = -30 + 4P$ (P : nghìn đồng/kg). Giá cân bằng là:

A market has $Q_d = 90 - 2P$ and $Q_s = -30 + 4P$ (P : thousand VND/kg). The equilibrium price is:

- A. $P = 10$
- B. $P = 30$
- C. $P = 20$
- D. $P = 60$

16. Với $Q_d = 90 - 2P$, $Q_s = -30 + 4P$, Nhà nước thu thuế 3 nghìn đồng trên mỗi kg từ người bán. Giá người mua trả là:

With $Q_d = 90 - 2P$, $Q_s = -30 + 4P$, the State levies 3 thousand VND per kg on sellers. The price buyers pay is:

- A. $P = 22$
- B. $P = 18$
- C. $P = 23$
- D. $P = 20$

- 17.** Mô hình $Y = C + I_0 + G_0$, $C = C_0 + 0,75Y$. Số nhân chi tiêu bằng:
In the model $Y = C + I_0 + G_0$, $C = C_0 + 0.75Y$, the spending multiplier is:
- A. 1,33 / 1.33
 - B. 0,25 / 0.25
 - C. 3
 - D. 4
- 18.** Cho $C = 100 + 0,8(Y - T)$, $T = 0,25Y$, $I_0 + G_0 = 300$. Thu nhập cân bằng là:
Let $C = 100 + 0.8(Y - T)$, $T = 0.25Y$, $I_0 + G_0 = 300$. Equilibrium income is:
- A. $Y = 2.000$ / $Y = 2,000$
 - B. $Y = 1.000$ / $Y = 1,000$
 - C. $Y = 888,9$ / $Y = 888.9$
 - D. $Y = 1.600$ / $Y = 1,600$
- 19.** Trong mô hình Leontief, hệ số $a_{21} = 0,3$ có nghĩa là:
In the Leontief model, the coefficient $a_{21} = 0.3$ means:
- A. Để sản xuất 1 đồng sản phẩm ngành 1 cần 0,3 đồng sản phẩm ngành 2 /
Producing 1 dong of sector 1 output requires 0.3 dong of sector 2 output
 - B. Để sản xuất 1 đồng sản phẩm ngành 2 cần 0,3 đồng sản phẩm ngành 1 /
Producing 1 dong of sector 2 output requires 0.3 dong of sector 1 output
 - C. 30% sản lượng ngành 2 được bán cho ngành 1 / *30% of sector 2 output is sold to sector 1*
 - D. Cầu cuối cùng của ngành 2 bằng 0,3 lần của ngành 1 / *Sector 2 final demand is 0.3 times that of sector 1*
- 20.** Cho A có các hàng (0,2; 0,1) và (0,3; 0,4), cầu cuối cùng $D = (65; 60)$. Tổng sản lượng $X = (X_1; X_2)$ là:
Let A have rows (0.2; 0.1) and (0.3; 0.4), final demand $D = (65; 60)$. Gross output $X = (X_1; X_2)$ is:
- A. (84; 103,5) / (84; 103.5)
 - B. (46; 16,5) / (46; 16.5)
 - C. (81,25; 100) / (81.25; 100)
 - D. (100; 150)
- 21.** IS: $0,2Y + 20r = 500$; LM: $0,25Y - 50r = 250$ (r tính bằng %). Điểm cân bằng (Y; r) là:
IS: $0.2Y + 20r = 500$; LM: $0.25Y - 50r = 250$ (r in %). The equilibrium (Y; r) is:
- A. (4.000; -15) / (4,000; -15)
 - B. (4.000; 15) / (4,000; 15)
 - C. (2.000; 5) / (2,000; 5)
 - D. (2.500; 0) / (2,500; 0)

Chương 4. Hàm số, giới hạn và liên tục trong kinh tế — Chapter 4. Functions, limits and continuity in economics

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Lập và đọc được các hàm số kinh tế: cung, cầu, doanh thu, chi phí, lợi nhuận, sản xuất; tìm hàm ngược và miền có nghĩa kinh tế.
Build and read economic functions: supply, demand, revenue, cost, profit, production; find inverse functions and economically meaningful domains.
- Tính giới hạn hữu hạn, vô hạn, một phía; khử các dạng vô định $0/0$, ∞/∞ , $\infty - \infty$, 1^∞ mũ ∞ bằng phân tích, nhân liên hợp, chia bậc cao nhất, vô cùng bé tương đương.
Evaluate finite, infinite and one-sided limits; resolve the indeterminate forms $0/0$, ∞/∞ , $\infty - \infty$ and 1^∞ to the power ∞ by factorising, conjugates, dividing by the highest power and equivalent infinitesimals.
- Dùng số e để tính lãi kép nhiều kỳ, lãi kép liên tục, lãi suất hiệu dụng, giá trị hiện tại.
Use the number e for multi-period and continuous compounding, effective rates and present value.
- Xét tính liên tục, phân loại điểm gián đoạn, tìm tham số để hàm từng khúc liên tục; đọc biểu giá bậc thang và biểu thuế lũy tiến dưới dạng hàm số.
Test continuity, classify discontinuities, find parameters making a piecewise function continuous; read tiered tariffs and progressive tax schedules as functions.

4.1. Hàm số một biến và các hàm số kinh tế cơ bản — Functions of one variable and basic economic functions

Khái niệm hàm số, miền xác định và miền có nghĩa kinh tế — Functions, domain and economically meaningful domain

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Hàm số f từ tập $X \subset \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi $x \in X$ với **đúng một** số thực $y = f(x)$. X là **miền xác định**, tập các giá trị $f(x)$ là **miền giá trị**. x là biến độc lập, y là biến phụ thuộc.

*A **function** f from $X \subset \mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is a rule assigning to **each** $x \in X$ **exactly one** real number $y = f(x)$. X is the **domain**; the set of values $f(x)$ is the **range**. x is the independent variable, y the dependent variable.*

Trong kinh tế, miền xác định toán học thường rộng hơn miền có nghĩa. Hàm cầu $Q = 120 - 2P$ xác định với mọi P , nhưng giá và lượng phải không âm: $P \geq 0$ và $Q \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 60$. Mọi kết quả tính ra (giá cân bằng, sản lượng tối ưu) phải được đối chiếu với miền có nghĩa này.

In economics the mathematical domain is often wider than the meaningful one. Demand $Q = 120 - 2P$ is defined for every P , but price and quantity must be non-negative: $P \geq 0$ and $Q \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 60$. Every result (equilibrium price, optimal output) must be checked against this domain.

Tính chất <i>Property</i>	Định nghĩa <i>Definition</i>	Ví dụ kinh tế <i>Economic example</i>
Hàm tăng (đồng biến) <i>Increasing function</i>	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	Hàm cung: giá tăng thì lượng cung tăng <i>Supply: a higher price raises quantity supplied</i>
Hàm giảm (nghịch biến) <i>Decreasing function</i>	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	Hàm cầu: giá tăng thì lượng cầu giảm <i>Demand: a higher price lowers quantity demanded</i>
Hàm bị chặn <i>Bounded function</i>	Có M sao cho $ f(x) \leq M$ với mọi x <i>There is M with $f(x) \leq M$ for all x</i>	Doanh số một sản phẩm mới không vượt quy mô thị trường <i>Sales of a new product cannot exceed market size</i>
Hàm hợp <i>Composite function</i>	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	Chi phí theo lao động, lao động theo sản lượng $\Rightarrow$ chi phí theo sản lượng <i>Cost via labour, labour via output $\Rightarrow$ cost via output</i>

Các hàm số sơ cấp thường gặp — *Common elementary functions*

Loại hàm <i>Type</i>	Dạng <i>Form</i>	Dùng trong kinh tế <i>Economic use</i>
Bậc nhất <i>Linear</i>	$y = ax + b$	Cung, cầu tuyến tính; chi phí có chi phí biến đổi không đổi <i>Linear supply and demand; cost with constant unit variable cost</i>
Bậc hai <i>Quadratic</i>	$y = ax^2 + bx + c$	Doanh thu từ cầu tuyến tính; lợi nhuận <i>Revenue from linear demand; profit</i>
Bậc ba <i>Cubic</i>	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Chi phí ngắn hạn có đoạn tăng nhanh dần <i>Short-run cost with an accelerating segment</i>
Lũy thừa <i>Power</i>	$y = a \cdot x^a \ (x > 0)$	Hàm sản xuất $Q = 20\sqrt{L}$; cầu co giãn không đổi <i>Production $Q = 20\sqrt{L}$; constant-elasticity demand</i>
Phân thức <i>Rational</i>	$y = P(x)/R(x)$	Chi phí bình quân $AC = TC/Q$; đường cầu hyperbol <i>Average cost $AC = TC/Q$; hyperbolic demand</i>
Mũ <i>Exponential</i>	$y = a \cdot \exp(kx)$	Lãi kép liên tục, tăng trưởng dân số, doanh thu <i>Continuous compounding, population and revenue growth</i>

Loại hàm <i>Type</i>	Dạng <i>Form</i>	Dùng trong kinh tế <i>Economic use</i>
Logarit <i>Logarithmic</i>	$y = a + b \cdot \ln x$	Thời gian để vốn đạt mục tiêu; lợi ích tăng chậm dần <i>Time to reach a target; slowly rising utility</i>

Ký hiệu $\exp(u)$ nghĩa là e mũ u . Trong câu thường dùng $\exp(0,08t)$ để khỏi viết chỉ số trên; trong công thức hiển thị viết đầy đủ e mũ.

The notation $\exp(u)$ means e to the power u . In running text $\exp(0.08t)$ avoids superscripts; displayed formulas use the full power of e .

Các hàm số kinh tế cơ bản — Basic economic functions

Hàm số <i>Function</i>	Ký hiệu, dạng <i>Notation, form</i>	Ý nghĩa <i>Meaning</i>
Hàm cầu <i>Demand function</i>	$Q_d = D(P)$, thường giảm <i>$Q_d = D(P)$, usually decreasing</i>	Lượng người mua muốn mua ở mỗi mức giá <i>Quantity buyers wish to buy at each price</i>
Hàm cung <i>Supply function</i>	$Q_s = S(P)$, thường tăng <i>$Q_s = S(P)$, usually increasing</i>	Lượng người bán muốn bán ở mỗi mức giá <i>Quantity sellers wish to sell at each price</i>
Hàm doanh thu <i>Revenue function</i>	$TR = P \cdot Q$	Tổng tiền bán hàng <i>Total sales receipts</i>
Hàm chi phí <i>Cost function</i>	$TC = FC + VC(Q)$	Chi phí cố định cộng chi phí biến đổi <i>Fixed plus variable cost</i>
Chi phí bình quân <i>Average cost</i>	$AC = TC/Q$	Chi phí cho một đơn vị sản phẩm <i>Cost per unit of output</i>
Hàm lợi nhuận <i>Profit function</i>	$\pi = TR - TC$	Phần còn lại sau khi trừ chi phí <i>What remains after costs</i>
Hàm sản xuất <i>Production function</i>	$Q = f(L)$ hoặc $Q = f(K, L)$ <i>$Q = f(L)$ or $Q = f(K, L)$</i>	Sản lượng theo lượng đầu vào <i>Output from input quantities</i>
Hàm tiêu dùng, tiết kiệm <i>Consumption, saving</i>	$C = C(Y)$, $S = Y - C(Y)$	Chi tiêu và tiết kiệm theo thu nhập <i>Spending and saving as functions of income</i>

Ba công thức nối các hàm kinh tế với nhau:

Three formulas link the economic functions:

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q \quad (4.1)$$

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) \quad (4.2)$$

$$AC(Q) = TC(Q)/Q = FC/Q + AVC(Q) \quad (4.3)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Thị trường gạo đóng túi tại một tỉnh: cầu $Q_d = 120 - 2P$, cung $Q_s = 3P - 30$ (Q : tấn/ngày, P : nghìn đồng/kg). Cân bằng: $120 - 2P = 3P - 30 \Leftrightarrow 5P = 150 \Leftrightarrow P = 30$ nghìn đồng/kg, $Q = 60$ tấn/ngày. Miền có nghĩa của cầu: $0 \leq P \leq 60$; của cung: $P \geq 10$ (dưới 10 nghìn đồng/kg không ai bán). Giá cân bằng 30 nằm trong $[10; 60]$ nên hợp lệ.
A packaged-rice market in one province: demand $Q_d = 120 - 2P$, supply $Q_s = 3P - 30$ (Q : tonnes per day, P : VND thousand per kg). Equilibrium: $120 - 2P = 3P - 30 \Leftrightarrow 5P = 150 \Leftrightarrow P = 30$ thousand VND per kg, $Q = 60$ tonnes per day. Demand is meaningful for $0 \leq P \leq 60$, supply for $P \geq 10$ (nobody sells below VND 10 thousand per kg). The equilibrium price 30 lies in $[10, 60]$, so it is valid.

Hàm tiêu dùng của một nền kinh tế: $C(Y) = 50 + 0,8Y$, Y là thu nhập khả dụng, C là tiêu dùng (nghìn tỷ đồng). Hàm tiết kiệm $S(Y) = Y - C(Y) = -50 + 0,2Y$. Tiết kiệm bằng 0 khi $Y = 250$ nghìn tỷ đồng: dưới mức này các hộ phải tiêu vào tiền tích lũy cũ. Tỉ số tiêu dùng trên thu nhập là một hàm phân thức:

An economy's consumption function: $C(Y) = 50 + 0.8Y$, where Y is disposable income and C consumption (VND trillion). Saving is $S(Y) = Y - C(Y) = -50 + 0.2Y$. Saving is zero at $Y = 250$ trillion: below that level households draw on past savings. The ratio of consumption to income is a rational function:

$$APC(Y) = C(Y)/Y = 50/Y + 0,8, \quad APC(250) = 1, \quad APC(500) = 0,9 \quad (4.4)$$

Thu nhập càng cao, tỉ lệ thu nhập dành cho tiêu dùng càng giảm và tiến dần về 0,8; mục 4.2 viết quan hệ đó dưới dạng giới hạn.

As income rises, the share of income consumed falls towards 0.8; section 4.2 states this as a limit.

Hàm ngược và hàm cầu ngược — Inverse functions and inverse demand

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Nếu $y = f(x)$ **đơn điệu ngặt** (tăng hoặc giảm) trên X thì mỗi y thuộc miền giá trị ứng với đúng một x . Quy tắc $y \mapsto x$ là **hàm ngược** $x = f^{-1}(y)$. Đồ thị của f và f^{-1} (khi đổi tên biến) đối xứng nhau qua đường $y = x$. Miền xác định của f^{-1} là miền giá trị của f .

*If $y = f(x)$ is **strictly monotonic** on X , each y in the range corresponds to exactly one x . The rule $y \mapsto x$ is the **inverse function** $x = f^{-1}(y)$. The graphs of f and f^{-1} (after renaming variables) are symmetric about $y = x$. The domain of f^{-1} is the range of f .*

Hàm cầu $Q = D(P)$ giảm ngặt nên có hàm ngược $P = D^{-1}(Q)$, gọi là **hàm cầu ngược**: giá tối đa người mua chấp nhận trả cho lượng Q . Doanh thu thường viết theo Q qua hàm cầu ngược.

*Demand $Q = D(P)$ is strictly decreasing, so it has an inverse $P = D^{-1}(Q)$, the **inverse demand function**: the highest price buyers accept for quantity Q . Revenue is usually written in terms of Q through it.*

$$Q = D(P) \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q), \quad TR(Q) = D^{-1}(Q) \cdot Q \quad (4.5)$$

Ví dụ: cầu $Q = 120 - 2P$ (sản phẩm, nghìn đồng), chi phí $TC = 800 + 10Q$ (nghìn đồng). Lập hàm lợi nhuận và tìm điểm hòa vốn.

Example: demand $Q = 120 - 2P$ (units, VND thousand), cost $TC = 800 + 10Q$ (VND thousand). Find profit and the break-even points.

1. Hàm cầu ngược: $2P = 120 - Q \Rightarrow P = 60 - Q/2$, với $0 \leq Q \leq 120$.
Inverse demand: $2P = 120 - Q \Rightarrow P = 60 - Q/2$, for $0 \leq Q \leq 120$.
2. Doanh thu: $TR = (60 - Q/2) \cdot Q = 60Q - Q^2/2$.
Revenue: $TR = (60 - Q/2) \cdot Q = 60Q - Q^2/2$.
3. Lợi nhuận: $\pi = 60Q - Q^2/2 - 800 - 10Q = -Q^2/2 + 50Q - 800$.
Profit: $\pi = 60Q - Q^2/2 - 800 - 10Q = -Q^2/2 + 50Q - 800$.
4. Hòa vốn: $\pi = 0 \Leftrightarrow Q^2 - 100Q + 1.600 = 0 \Leftrightarrow (Q - 20)(Q - 80) = 0 \Rightarrow Q = 20$ hoặc $Q = 80$ sản phẩm. Có lãi khi $20 < Q < 80$.
Break-even: $\pi = 0 \Leftrightarrow Q^2 - 100Q + 1,600 = 0 \Leftrightarrow (Q - 20)(Q - 80) = 0 \Rightarrow Q = 20$ or $Q = 80$ units. Profit is positive for $20 < Q < 80$.

$$\pi(Q) = -Q^2/2 + 50Q - 800 = -(Q - 20)(Q - 80)/2 \quad (4.6)$$

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Viết $D^{-1}(Q)$ thành $1/D(Q)$. Ký hiệu mũ -1 ở đây là **hàm ngược**, không phải nghịch đảo số học: với $Q = 120 - 2P$ thì $D^{-1}(Q) = 60 - Q/2$, còn $1/D(P) = 1/(120 - 2P)$ là một hàm khác.

*Writing $D^{-1}(Q)$ as $1/D(Q)$. The superscript -1 means the **inverse function**, not the reciprocal: for $Q = 120 - 2P$, $D^{-1}(Q) = 60 - Q/2$, whereas $1/D(P) = 1/(120 - 2P)$ is a different function.*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Giải xong phương trình rồi nhận cả nghiệm nằm ngoài miền có nghĩa kinh tế: giá âm, sản lượng âm, sản lượng vượt mức làm giá bằng 0. Mỗi đáp số phải được đối chiếu lại với điều kiện $P \geq 0$, $Q \geq 0$ của bài.

Accepting every root of an equation, including those outside the economic domain: negative prices, negative output, or output so high that price falls to zero. Every answer must be checked against the conditions $P \geq 0$, $Q \geq 0$ of the problem.

Hàm hợp: từ hàm sản xuất sang hàm chi phí — *Composite functions: from production to cost*

Một tiệm bánh có hàm sản xuất $Q = 20\sqrt{L}$, Q là số hộp bánh/ngày, L là số giờ công. Mỗi giờ công trả 0,02 triệu đồng (20 nghìn đồng), chi phí cố định 50 triệu đồng/tháng quy về 0,5 triệu đồng/ngày. Tìm hàm chi phí theo sản lượng.

A bakery has production function $Q = 20\sqrt{L}$, where Q is boxes of cakes per day and L is labour hours. Each hour costs VND 0.02 million (VND 20 thousand); fixed cost of VND 50 million a month amounts to VND 0.5 million a day. Find cost as a function of output.

1. Hàm ngược của hàm sản xuất ($L > 0$): $\sqrt{L} = Q/20 \Rightarrow L = Q^2/400$ giờ công.
Invert the production function ($L > 0$): $\sqrt{L} = Q/20 \Rightarrow L = Q^2/400$ hours.
2. Chi phí theo lao động: $TC(L) = 0,5 + 0,02L$ (triệu đồng).
Cost via labour: $TC(L) = 0.5 + 0.02L$ (VND million).
3. Hợp hai hàm: $TC(Q) = 0,5 + 0,02 \cdot Q^2/400 = 0,5 + Q^2/20.000$ (triệu đồng). Với $Q = 200$ hộp: $L = 100$ giờ, $TC = 0,5 + 2 = 2,5$ triệu đồng.
Compose: $TC(Q) = 0.5 + 0.02 \cdot Q^2/400 = 0.5 + Q^2/20,000$ (VND million). For $Q = 200$ boxes: $L = 100$ hours, $TC = 0.5 + 2 = \text{VND } 2.5 \text{ million}$.

$$TC(Q) = TC(L(Q)) = 0,5 + 0,02 \cdot Q^2/400 \quad (4.7)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Sản lượng tăng gấp đôi từ 100 lên 200 hộp thì chi phí biến đổi tăng từ 0,5 lên 2 triệu đồng, tức gấp bốn: hàm sản xuất căn bậc hai làm chi phí tăng theo bình phương sản lượng. Đây là biểu hiện bằng hàm số của năng suất lao động giảm dần.

Doubling output from 100 to 200 boxes raises variable cost from VND 0.5 to 2 million, fourfold: a square-root production function makes cost grow with the square of output. This is diminishing labour productivity written as a function.

4.2. Giới hạn của hàm số — Limits of functions

Định nghĩa giới hạn và giới hạn một phía — Definition of a limit and one-sided limits

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Số L là **giới hạn** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu $f(x)$ gần L tùy ý khi x đủ gần x_0 ($x \neq x_0$): với mọi $\varepsilon > 0$ có $\delta > 0$ sao cho $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Giá trị $f(x_0)$, nếu có, **không** tham gia vào định nghĩa.

*L is the **limit** of $f(x)$ as $x \rightarrow x_0$ if $f(x)$ is arbitrarily close to L whenever x is close enough to x_0 ($x \neq x_0$): for every $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. The value $f(x_0)$, if any, plays **no** part in the definition.*

Giới hạn trái ($x \rightarrow x_0^-$) chỉ xét $x < x_0$; giới hạn phải ($x \rightarrow x_0^+$) chỉ xét $x > x_0$. Giới hạn hai phía tồn tại khi và chỉ khi hai giới hạn một phía tồn tại và bằng nhau:

The left limit ($x \rightarrow x_0^-$) uses only $x < x_0$; the right limit ($x \rightarrow x_0^+$) only $x > x_0$. The two-sided limit exists if and only if both one-sided limits exist and are equal:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad (4.8)$$

Giới hạn tại vô cùng mô tả dáng điệu dài hạn: $\lim f(x) = L$ khi $x \rightarrow +\infty$ nghĩa là $f(x)$ gần L tùy ý khi x đủ lớn; đường $y = L$ là **tiệm cận ngang**. Giới hạn vô hạn $\lim f(x) = +\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ cho **tiệm cận đứng** $x = x_0$.

*Limits at infinity describe long-run behaviour: $\lim f(x) = L$ as $x \rightarrow +\infty$ means $f(x)$ is arbitrarily close to L for large enough x ; $y = L$ is a **horizontal asymptote**. An infinite limit $\lim f(x) = +\infty$ as $x \rightarrow x_0$ gives a **vertical asymptote** $x = x_0$.*

Các phép toán và các giới hạn cơ bản — Limit laws and basic limits

Quy tắc <i>Rule</i>	Phát biểu (khi $\lim f = A$, $\lim g = B$ hữu hạn) <i>Statement ($\lim f = A$, $\lim g = B$ finite)</i>
Tổng, hiệu <i>Sum, difference</i>	$\lim (f \pm g) = A \pm B$
Tích, nhân hằng số <i>Product, constant multiple</i>	$\lim (f \cdot g) = A \cdot B$; $\lim (k \cdot f) = k \cdot A$ <i>$\lim (f \cdot g) = A \cdot B$; $\lim (k \cdot f) = k \cdot A$</i>
Thương <i>Quotient</i>	$\lim (f/g) = A/B$ nếu $B \neq 0$ <i>$\lim (f/g) = A/B$ if $B \neq 0$</i>
Hàm hợp liên tục <i>Continuous composition</i>	$\lim h(f(x)) = h(A)$ nếu h liên tục tại A <i>$\lim h(f(x)) = h(A)$ if h is continuous at A</i>

Quy tắc <i>Rule</i>	Phát biểu (khi $\lim f = A$, $\lim g = B$ hữu hạn) <i>Statement ($\lim f = A$, $\lim g = B$ finite)</i>
Định lý kẹp <i>Squeeze theorem</i>	$g \leq f \leq h$ và $\lim g = \lim h = L \Rightarrow \lim f = L$ $g \leq f \leq h$ and $\lim g = \lim h = L \Rightarrow \lim f = L$

Giới hạn cơ bản <i>Basic limit</i>	Giá trị <i>Value</i>	Ghi chú <i>Note</i>
$1/x^\alpha$ khi $x \rightarrow +\infty$ ($\alpha > 0$) $1/x^\alpha$ as $x \rightarrow +\infty$ ($\alpha > 0$)	0	Phần cố định chia cho quy mô lớn dần <i>A fixed amount spread over a growing scale</i>
a^x khi $x \rightarrow +\infty$ a^x as $x \rightarrow +\infty$	$+\infty$ nếu $a > 1$; 0 nếu $0 < a < 1$ $+\infty$ if $a > 1$; 0 if $0 < a < 1$	Tăng trưởng và suy giảm theo cấp số nhân <i>Exponential growth and decay</i>
$\sin x/x$ khi $x \rightarrow 0$ $\sin x/x$ as $x \rightarrow 0$	1	x tính bằng radian <i>x in radians</i>
$(1 + 1/x)^x$ khi $x \rightarrow \infty$ $(1 + 1/x)^x$ as $x \rightarrow \infty$	$e \approx 2,71828$ $e \approx 2.71828$	Gốc của lãi kép liên tục <i>Origin of continuous compounding</i>
$\ln(1 + x)/x$ khi $x \rightarrow 0$ $\ln(1 + x)/x$ as $x \rightarrow 0$	1	
$(\exp(x) - 1)/x$ khi $x \rightarrow 0$ $(\exp(x) - 1)/x$ as $x \rightarrow 0$	1	
$\ln x/x^\alpha$ khi $x \rightarrow +\infty$ ($\alpha > 0$) $\ln x/x^\alpha$ as $x \rightarrow +\infty$ ($\alpha > 0$)	0	Logarit tăng chậm hơn mọi lũy thừa <i>Logarithms grow slower than any power</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — Chi phí bình quân khi $TC = 800 + 10Q$ (nghìn đồng): $AC(Q) = 800/Q + 10$. Khi $Q \rightarrow +\infty$: $800/Q \rightarrow 0$ nên **AC** $\rightarrow 10$ nghìn đồng/sản phẩm; đường $y = 10$ là tiệm cận ngang. Khi $Q \rightarrow 0^+$: $800/Q \rightarrow +\infty$ nên **AC** $\rightarrow +\infty$; trục $Q = 0$ là tiệm cận đứng. Ý nghĩa: mở rộng sản xuất làm chi phí bình quân giảm về chi phí biến đổi đơn vị; sản xuất quá ít thì chi phí cố định làm giá thành mỗi sản phẩm cao.

*Average cost with $TC = 800 + 10Q$ (VND thousand): $AC(Q) = 800/Q + 10$. As $Q \rightarrow +\infty$: $800/Q \rightarrow 0$ so **AC** $\rightarrow 10$ thousand per unit; $y = 10$ is a horizontal asymptote. As $Q \rightarrow 0^+$: $800/Q \rightarrow +\infty$ so **AC** $\rightarrow +\infty$; $Q = 0$ is a vertical asymptote. Meaning: expanding output drives average cost down to unit variable cost; producing too little makes fixed cost dominate the unit cost.*

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ứng dụng ví điện tử của một ngân hàng có số người dùng sau t tháng là $N(t) = 500t/(t + 4)$ (nghìn người). $N(4) = 2.000/8 = 250$ nghìn. Khi $t \rightarrow +\infty$: $N(t) = 500/(1 + 4/t) \rightarrow 500$ nghìn. Thị trường bão hòa ở mức 500 nghìn người dùng; sau 4 tháng ứng dụng đạt một nửa mức bão hòa.

A bank's e-wallet app has $N(t) = 500t/(t + 4)$ thousand users after t months. $N(4) = 2,000/8 = 250$ thousand. As $t \rightarrow +\infty$: $N(t) = 500/(1 + 4/t) \rightarrow 500$ thousand. The market saturates at 500 thousand users; after 4 months the app reaches half of that level.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Với hàm tiêu dùng $C(Y) = 50 + 0,8Y$: giới hạn của $APC(Y) = 50/Y + 0,8$ khi $Y \rightarrow +\infty$ bằng **0,8**. Phần tiêu dùng tự định 50 nghìn tỷ đồng ngày càng nhỏ so với thu nhập; khi thu nhập lớn, tỉ lệ tiêu dùng trên thu nhập gần bằng xu hướng tiêu dùng cận biên 0,8.

With $C(Y) = 50 + 0.8Y$: the limit of $APC(Y) = 50/Y + 0.8$ as $Y \rightarrow +\infty$ is **0.8**. Autonomous consumption of VND 50 trillion becomes ever smaller relative to income; at very high income the consumption share is close to the marginal propensity to consume 0.8.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Giá theo lô của một nhà phân phối: $P(Q) = 50$ nghìn đồng/sản phẩm khi $Q < 100$, $P(Q) = 45$ nghìn đồng khi $Q \geq 100$. Giới hạn trái tại $Q = 100$ bằng 50, giới hạn phải bằng 45: hai giới hạn một phía khác nhau nên **không tồn tại** giới hạn của $P(Q)$ khi $Q \rightarrow 100$.

A distributor's quantity pricing: $P(Q) = \text{VND } 50 \text{ thousand per unit for } Q < 100 \text{ and VND } 45 \text{ thousand for } Q \geq 100$. The left limit at $Q = 100$ is 50 and the right limit is 45: they differ, so the limit of $P(Q)$ as $Q \rightarrow 100$ does not exist.

4.3. Vô cùng bé, vô cùng lớn và giới hạn dạng vô định — Infinitesimals, infinitely large quantities and indeterminate forms

Vô cùng bé, vô cùng lớn và so sánh — Infinitesimals, infinitely large quantities and comparison

PHẢI THUỘC / MEMORISE — $\alpha(x)$ là **vô cùng bé** (VCB) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim \alpha(x) = 0$; $A(x)$ là **vô cùng lớn** (VCL) nếu $\lim |A(x)| = +\infty$. Nếu α là VCB và $\alpha \neq 0$ thì $1/\alpha$ là VCL, và ngược lại. Hai VCB α, β **tương đương**, viết $\alpha \sim \beta$, khi $\lim \alpha/\beta = 1$.

$\alpha(x)$ is an **infinitesimal** as $x \rightarrow x_0$ if $\lim \alpha(x) = 0$; $A(x)$ is **infinitely large** if $\lim |A(x)| = +\infty$. If α is infinitesimal and $\alpha \neq 0$ then $1/\alpha$ is infinitely large, and conversely. Two infinitesimals α, β are **equivalent**, written $\alpha \sim \beta$, when $\lim \alpha/\beta = 1$.

So sánh hai VCB α, β qua giới hạn của tỉ số:

Compare two infinitesimals α, β through their ratio:

$$\lim \alpha/\beta = 0: \alpha \text{ bậc cao hơn } \beta; \quad \lim \alpha/\beta = k \neq 0: \text{cùng bậc}; \quad \lim \alpha/\beta = 1: \alpha \sim \beta \quad (4.9)$$

VCB tương đương khi $u \rightarrow 0$ Equivalent infinitesimals as $u \rightarrow 0$	Ví dụ Example
$\sin u \sim u; \tan u \sim u$	$\sin 3x \sim 3x$ khi $x \rightarrow 0$ $\sin 3x \sim 3x$ as $x \rightarrow 0$
$1 - \cos u \sim u^2/2$	$1 - \cos 2x \sim 2x^2$
$\ln(1 + u) \sim u$	$\ln(1 + 3x) \sim 3x$
$\exp(u) - 1 \sim u$	$\exp(2x) - 1 \sim 2x$

VCB tương đương khi $u \rightarrow 0$ <i>Equivalent infinitesimals as $u \rightarrow 0$</i>	Ví dụ <i>Example</i>
$(1 + u)^a - 1 \sim a \cdot u$	$\sqrt[3]{1 + 4x} - 1 \sim 2x$
$a^u - 1 \sim u \cdot \ln a$	$1,08^x - 1 \sim x \cdot \ln 1,08$ $1,08^x - 1 \sim x \cdot \ln 1,08$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Khi $x \rightarrow 0$: $\alpha = 1 - \cos x$ và $\beta = x^2$ có $\alpha/\beta \rightarrow 1/2$ nên **cùng bậc** (không tương đương); $\gamma = x^3$ và x có $x^3/x = x^2 \rightarrow 0$ nên x^3 là VCB **bậc cao hơn** x . Trong kinh tế, khi lãi suất r nhỏ, $\exp(r) - 1 \sim r$: với $r = 0,06$, $\exp(0,06) - 1 \approx 0,0618$, sai lệch so với r chỉ 0,0018.

*As $x \rightarrow 0$: $\alpha = 1 - \cos x$ and $\beta = x^2$ give $\alpha/\beta \rightarrow 1/2$, so they are of the **same order** (not equivalent); $\gamma = x^3$ and x give $x^3/x = x^2 \rightarrow 0$, so x^3 is of **higher order** than x . In economics, for a small rate r , $\exp(r) - 1 \sim r$: for $r = 0.06$, $\exp(0.06) - 1 \approx 0.0618$, only 0.0018 away from r .*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Trong giới hạn của **tích hoặc thương**, được thay mỗi VCB bằng một VCB tương đương. **Không** thay trong tổng hay hiệu: thay $\sin x \sim x$ trong $(x - \sin x)/x^3$ cho kết quả 0, sai (đáp số đúng 1/6).

*In the limit of a **product or quotient**, each infinitesimal may be replaced by an equivalent one. **Do not** replace inside a sum or difference: replacing $\sin x \sim x$ in $(x - \sin x)/x^3$ gives 0, which is wrong (the correct value is 1/6).*

Bảy dạng vô định và cách khử — *Seven indeterminate forms and how to resolve them*

Khi thay trực tiếp cho ra một trong các dạng dưới đây thì chưa kết luận được; phải biến đổi biểu thức.

When direct substitution yields one of the forms below, no conclusion is possible yet; the expression must be transformed.

Dạng <i>Form</i>	Cách khử thường dùng <i>Usual technique</i>	Ví dụ trong mục <i>Example in this section</i>
0/0	Phân tích nhân tử, nhân liên hợp, VCB tương đương <i>Factorise, conjugate, equivalent infinitesimals</i>	Ví dụ 1, 2, 5 <i>Examples 1, 2, 5</i>
∞/∞	Chia tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất <i>Divide by the highest power</i>	Ví dụ 3 <i>Example 3</i>
$\infty - \infty$	Nhân liên hợp hoặc quy đồng để đưa về ∞/∞ <i>Conjugate or common denominator to reach ∞/∞</i>	Ví dụ 4 <i>Example 4</i>
$0 \cdot \infty$	Viết lại thành 0/0 hoặc ∞/∞ <i>Rewrite as 0/0 or ∞/∞</i>	$x \cdot \ln(1 + 1/x) \rightarrow 1$ $x \cdot \ln(1 + 1/x) \rightarrow 1$

Dạng Form	Cách khử thường dùng Usual technique	Ví dụ trong mục Example in this section
1 mũ ∞ <i>1 to the power</i> ∞	Đưa về dạng $(1 + u)$ mũ $(1/u) \rightarrow e$, mục 4.4 <i>Reduce to $(1 + u)$ to the power $(1/u) \rightarrow e$, section 4.4</i>	$(1 + 2/x)$ mũ $3x \rightarrow \exp(6)$ <i>$(1 + 2/x)$ to the power $3x \rightarrow \exp(6)$</i>
0^0 và ∞^0 <i>0^0 and ∞^0</i>	Lấy logarit để đưa về $0 \cdot \infty$ <i>Take logarithms to reach $0 \cdot \infty$</i>	Giải bằng L'Hôpital ở chương 5 <i>Solved by L'Hôpital in chapter 5</i>

Với giới hạn của phân thức hữu tỉ khi $x \rightarrow \infty$, chỉ cần so bậc của tử (m) và mẫu (n), a và b là hệ số bậc cao nhất:

For rational functions as $x \rightarrow \infty$, compare the degrees of numerator (m) and denominator (n), with a and b their leading coefficients:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a \cdot x^m + \dots) / (b \cdot x^n + \dots) = 0 \text{ nếu } m < n; a/b \text{ nếu } m = n; \infty \text{ nếu } m > n \quad (4.10)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 1 (0/0, phân tích): giới hạn khi $x \rightarrow 2$ của $(x^2 - 4)/(x - 2)$. Thay $x = 2$ được 0/0. $(x^2 - 4)/(x - 2) = (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = x + 2$ với $x \neq 2 \Rightarrow$ giới hạn bằng 4.

Example 1 (0/0, factorising): the limit as $x \rightarrow 2$ of $(x^2 - 4)/(x - 2)$. Substituting $x = 2$ gives 0/0. $(x^2 - 4)/(x - 2) = (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = x + 2$ for $x \neq 2 \Rightarrow$ the limit is 4.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 2 (0/0, liên hợp): giới hạn khi $x \rightarrow 0$ của $(\sqrt{x+9} - 3)/x$. Nhân tử và mẫu với $\sqrt{x+9} + 3$: $(x + 9 - 9)/[x(\sqrt{x+9} + 3)] = 1/(\sqrt{x+9} + 3) \rightarrow 1/6$. Đáp số 1/6.

Example 2 (0/0, conjugate): the limit as $x \rightarrow 0$ of $(\sqrt{x+9} - 3)/x$. Multiply by $\sqrt{x+9} + 3$: $(x + 9 - 9)/[x(\sqrt{x+9} + 3)] = 1/(\sqrt{x+9} + 3) \rightarrow 1/6$. Answer 1/6.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 3 (∞/∞): giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ của $(3x^2 + 5x)/(6x^2 - 1)$. Chia tử, mẫu cho x^2 : $(3 + 5/x)/(6 - 1/x^2) \rightarrow 3/6 = 1/2$, khớp công thức (4.10) với $m = n = 2$.

Example 3 (∞/∞): the limit as $x \rightarrow +\infty$ of $(3x^2 + 5x)/(6x^2 - 1)$. Divide by x^2 : $(3 + 5/x)/(6 - 1/x^2) \rightarrow 3/6 = 1/2$, matching formula (4.10) with $m = n = 2$.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 4 ($\infty - \infty$): giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ của $\sqrt{x^2 + 4x} - x$. Nhân và chia cho $\sqrt{x^2 + 4x} + x$: $4x/(\sqrt{x^2 + 4x} + x) = 4/(\sqrt{1 + 4/x} + 1) \rightarrow 4/2 = 2$.

Example 4 ($\infty - \infty$): the limit as $x \rightarrow +\infty$ of $\sqrt{x^2 + 4x} - x$. Multiply and divide by $\sqrt{x^2 + 4x} + x$: $4x/(\sqrt{x^2 + 4x} + x) = 4/(\sqrt{1 + 4/x} + 1) \rightarrow 4/2 = 2$.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Ví dụ 5 (VCB tương đương): giới hạn khi $x \rightarrow 0$ của $\ln(1 + 3x)/(exp(2x) - 1)$. Tử $\sim 3x$, mẫu $\sim 2x$, đây là thương nên được thay: giới hạn bằng $3x/2x = 3/2$.

Example 5 (equivalent infinitesimals): the limit as $x \rightarrow 0$ of $\ln(1 + 3x)/(exp(2x) - 1)$. Numerator $\sim 3x$, denominator $\sim 2x$; it is a quotient, so the replacement is allowed: the limit is $3x/2x = 3/2$.

Trình tự tính một giới hạn — A procedure for evaluating a limit

1. Thay trực tiếp giá trị x_0 (hoặc xét dáng điệu khi $x \rightarrow \infty$). Ra một số xác định thì đó là đáp số.

Substitute x_0 directly (or examine behaviour as $x \rightarrow \infty$). A definite number is the answer.

2. Ra dạng vô định thì nhận diện dạng theo bảng trên.

If an indeterminate form appears, identify it using the table above.

3. Biến đổi: phân tích nhân tử chung ($x - x_0$), nhân liên hợp khi có căn, chia lũy thừa bậc cao nhất khi $x \rightarrow \infty$, thay VCB tương đương trong tích và thương.

Transform: cancel the common factor ($x - x_0$), use the conjugate for roots, divide by the highest power as $x \rightarrow \infty$, replace equivalent infinitesimals in products and quotients.

4. Thay lại và đổi chiều: giới hạn của đại lượng kinh tế phải có dấu và đơn vị hợp lý.

Substitute again and check: a limit of an economic quantity must have a sensible sign and unit.

Quy tắc L'Hôpital (lấy đạo hàm tử và mẫu) giải nhanh các dạng $0/0$ và ∞/∞ ; quy tắc này cần đạo hàm nên được trình bày ở chương 5. Ở chương này mọi giới hạn đều khử bằng biến đổi đại số và VCB tương đương.

L'Hôpital's rule (differentiating numerator and denominator) quickly settles $0/0$ and ∞/∞ ; it needs derivatives and is covered in chapter 5. Here every limit is resolved by algebra and equivalent infinitesimals.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Coi $\infty - \infty = 0$ hoặc $\infty/\infty = 1$. Ví dụ 4 cho thấy $\sqrt{x^2 + 4x} - x$ tiến tới 2 chứ không tới 0, còn $(3x^2 + 5x)/(6x^2 - 1)$ tiến tới $1/2$ chứ không tới 1. Hai VCL “bằng nhau” về dạng nhưng khác nhau về tốc độ.

Treating $\infty - \infty$ as 0 or ∞/∞ as 1. Example 4 shows $\sqrt{x^2 + 4x} - x$ tends to 2, not 0, and $(3x^2 + 5x)/(6x^2 - 1)$ tends to $1/2$, not 1. Two infinitely large quantities share a form but not a speed.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thấy $0/0$ rồi kết luận “giới hạn không tồn tại” hoặc “bằng 0”. Dạng $0/0$ chỉ báo hiệu phải biến đổi tiếp; ví dụ 1 có giới hạn 4.

Seeing $0/0$ and concluding “the limit does not exist” or “equals 0”. The form $0/0$ only signals that more work is needed; example 1 has limit 4.

4.4. Số e, lãi kép và lãi kép liên tục — The number e, compound and continuous compounding

Số e — The number e

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Dãy $(1 + 1/n)^n$ tăng và bị chặn nên có giới hạn, ký hiệu **e** $\approx 2,71828$. Tổng quát, với a, b là hằng số: $(1 + a/x)^{bx} \rightarrow \exp(ab)$ khi $x \rightarrow \infty$. Logarit cơ số e là **logarit tự nhiên** ln.

*The sequence $(1 + 1/n)^n$ is increasing and bounded, so it has a limit, denoted **e** ≈ 2.71828 . More generally, for constants a, b: $(1 + a/x)$ to the power $bx \rightarrow \exp(ab)$ as $x \rightarrow \infty$. The base-e logarithm is the **natural logarithm** ln.*

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \approx 2,71828 \quad (4.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a/x)^{bx} = e^{ab} \quad (4.12)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ của $(1 + 2/x)^{3x}$ là dạng 1 mũ ∞ . Theo (4.12) với a = 2, b = 3: giới hạn bằng **exp(6) $\approx 403,43$** . Cách làm tay: đặt $u = x/2$, biểu thức thành $[(1 + 1/u)^u]^6 \rightarrow e^6$.

The limit as $x \rightarrow +\infty$ of $(1 + 2/x)$ to the power $3x$ has the form 1 to the power ∞ . By (4.12) with $a = 2$, $b = 3$ the limit is $\exp(6) \approx 403.43$. By hand: put $u = x/2$, the expression becomes $[(1 + 1/u)^u]^6 \rightarrow e^6$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Cho rằng 1 mũ ∞ bằng 1 vì “1 mũ bao nhiêu cũng bằng 1”. Cơ số chỉ tiến tới 1 chứ không bằng 1, còn số mũ tiến tới vô cùng; kết quả có thể là bất kỳ số dương nào, như $\exp(6)$ ở ví dụ trên.

Claiming 1 to the power ∞ equals 1 because “1 to any power is 1”. The base only *tends to* 1 while the exponent grows without bound; the result can be any positive number, such as $\exp(6)$ above.

Lãi kép nhiều kỳ và lãi kép liên tục — *Compounding m times a year and continuous compounding*

Gửi số tiền PV với lãi suất danh nghĩa $r/\text{năm}$ (dạng thập phân), ghép lãi m lần mỗi năm, sau t năm nhận được FV. Cho $m \rightarrow \infty$ và dùng (4.12) với $a = r$, $b = t$ ta được lãi kép liên tục:

Deposit PV at a nominal annual rate r (as a decimal), compounded m times a year; after t years the amount is FV. Letting $m \rightarrow \infty$ and using (4.12) with $a = r$, $b = t$ gives continuous compounding:

$$FV = PV \cdot (1 + r/m)^{mt} \quad (4.13)$$

$$FV = \lim_{m \rightarrow \infty} PV \cdot (1 + r/m)^{mt} = PV \cdot e^{rt} \quad (4.14)$$

Lãi đơn chỉ tính lãi trên vốn gốc: $FV = PV \cdot (1 + rt)$. Với 200 triệu đồng, 8%/năm, 5 năm, lãi đơn cho $200 \cdot 1,4 = 280$ triệu đồng. Lãi kép tính lãi trên cả lãi đã nhập vốn nên luôn cho nhiều hơn khi $t > 1$.

Simple interest is earned on principal only: $FV = PV \cdot (1 + rt)$. With VND 200 million at 8% a year for 5 years, simple interest gives $200 \cdot 1.4 = \text{VND } 280$ million. Compound interest also earns on credited interest, so it yields more whenever $t > 1$.

Bảng dưới tính cho $PV = 200$ triệu đồng, $r = 8\%/\text{năm}$, $t = 5$ năm. Số tiền tăng theo m nhưng bị chặn trên bởi mức ghép liên tục.

The table uses $PV = \text{VND } 200$ million, $r = 8\%$ a year, $t = 5$ years. The amount rises with m but is bounded above by the continuous-compounding value.

Cách ghép lãi <i>Compounding</i>	m	Công thức <i>Formula</i>	FV (triệu đồng) <i>FV (VND million)</i>
Hàng năm <i>Annually</i>	1	$200 \cdot 1,08^5$ $200 \cdot 1.08^5$	293,87 293.87
Hàng quý <i>Quarterly</i>	4	$200 \cdot 1,02^{20}$ $200 \cdot 1.02^{20}$	297,19 297.19
Hàng tháng <i>Monthly</i>	12	$200 \cdot (1 + 0,08/12)^{60}$ $200 \cdot (1 + 0.08/12)^{60}$	297,97 297.97
Hàng ngày <i>Daily</i>	365	$200 \cdot (1 + 0,08/365)^{1825}$ $200 \cdot (1 + 0.08/365)^{1825}$	298,35 298.35

Cách ghép lãi <i>Compounding</i>	m	Công thức <i>Formula</i>	FV (triệu đồng) <i>FV (VND million)</i>
Liên tục <i>Continuously</i>	∞	$200 \cdot \exp(0,4)$ $200 \cdot \exp(0.4)$	298,36 298.36

Lãi suất hiệu dụng, thời gian gấp đôi và giá trị hiện tại — *Effective rate, doubling time and present value*

Lãi suất hiệu dụng năm r_e là lãi suất ghép một lần/năm cho cùng kết quả. Hai khoản gửi chỉ so sánh được khi quy về cùng r_e .

The effective annual rate r_e is the once-a-year rate giving the same result. Two deposits are comparable only after conversion to the same r_e .

$$r_e = (1 + r/m)^m - 1; \text{ ghép liên tục: } r_e = e^r - 1 \quad (4.15)$$

$$\text{Thời gian gấp đôi: } e^{rt} = 2 \Leftrightarrow t = \ln 2/r \approx 0,693/r \quad (4.16)$$

$$\text{Giá trị hiện tại (chiết khấu liên tục): } PV = FV \cdot e^{-rt} \quad (4.17)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — (a) $r = 6\%$ /năm ghép liên tục: $r_e = \exp(0,06) - 1 \approx \mathbf{6,18\%}$. (b) $r = 7\%$ ghép liên tục: thời gian gấp đôi $t = 0,6931/0,07 \approx \mathbf{9,90 \text{ năm}}$; quy tắc nhẩm “70 chia lãi suất” cho $70/7 = 10$ năm. (c) Một khoản phải trả 500 triệu đồng sau 4 năm, chiết khấu liên tục 5% /năm: $PV = 500 \cdot \exp(-0,2) \approx \mathbf{409,37 \text{ triệu đồng}}$.

(a) $r = 6\%$ a year compounded continuously: $r_e = \exp(0.06) - 1 \approx \mathbf{6.18\%}$. (b) $r = 7\%$ continuously: doubling time $t = 0.6931/0.07 \approx \mathbf{9.90 \text{ years}}$; the “rule of 70” gives $70/7 = 10$ years. (c) A payment of VND 500 million due in 4 years, discounted continuously at 5% a year: $PV = 500 \cdot \exp(-0.2) \approx \mathbf{VND 409.37 \text{ million}}$.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Thay $r = 8$ thay vì $r = 0,08$ vào $\exp(rt)$, hoặc dùng t theo tháng trong khi r tính theo năm. r và t phải cùng đơn vị thời gian, r viết dạng thập phân: $8\% = 0,08$.

Plugging $r = 8$ instead of $r = 0.08$ into $\exp(rt)$, or using t in months while r is annual. r and t must share a time unit, and r is a decimal: $8\% = 0.08$.

4.5. Hàm số liên tục và điểm gián đoạn — *Continuous functions and discontinuities*

Định nghĩa và tính chất — *Definition and properties*

PHẢI THUỘC / MEMORISE — f liên tục tại x_0 khi đủ ba điều kiện: (1) $f(x_0)$ xác định; (2) giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ tồn tại; (3) giới hạn đó bằng $f(x_0)$. f liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu liên tục tại mọi điểm của khoảng; liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu thêm liên tục phải tại a và liên tục trái tại b .

*f is **continuous at x_0** when three conditions hold: (1) $f(x_0)$ is defined; (2) the limit of $f(x)$ as $x \rightarrow x_0$ exists; (3) that limit equals $f(x_0)$. f is continuous on (a, b) if it is continuous at every point of the interval, and on $[a, b]$ if, in addition, it is right-continuous at a and left-continuous at b .*

$$f \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (4.18)$$

- Tổng, hiệu, tích của hai hàm liên tục là hàm liên tục; thương liên tục tại các điểm mẫu khác 0; hợp của hai hàm liên tục là hàm liên tục.
Sums, differences and products of continuous functions are continuous; a quotient is continuous where the denominator is non-zero; a composition of continuous functions is continuous.
- Mọi hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, mũ, logarit, lượng giác, căn và tổ hợp của chúng) liên tục trên miền xác định. Với hàm từng khúc chỉ cần kiểm tra tại các điểm nối.
Every elementary function (polynomial, rational, exponential, logarithmic, trigonometric, root and their combinations) is continuous on its domain. For a piecewise function only the junction points need checking.

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Định lý Weierstrass: f liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn đó. **Định lý giá trị trung gian:** f liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì có $c \in (a; b)$ với $f(c) = 0$.

Weierstrass theorem: if f is continuous on $[a, b]$, it attains a maximum and a minimum there.

Intermediate value theorem: if f is continuous on $[a, b]$ and $f(a) \cdot f(b) < 0$, there is $c \in (a, b)$ with $f(c) = 0$.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Thị trường cà phê rang xay tại một thành phố có hàm dư cầu $E(P) = Q_d - Q_s = 80 - P^2 - 3P$ (P : trăm nghìn đồng/kg). E liên tục; $E(7) = 80 - 49 - 21 = 10 > 0$, $E(8) = 80 - 64 - 24 = -8 < 0$. Theo định lý giá trị trung gian có giá cân bằng $P_0 \in (7; 8)$. Giải phương trình bậc hai: $P_0 = (-3 + \sqrt{329})/2 \approx 7,57$, tức khoảng 757 nghìn đồng/kg.

A city's ground-coffee market has excess demand $E(P) = Q_d - Q_s = 80 - P^2 - 3P$ (P in VND hundred thousand per kg). E is continuous; $E(7) = 80 - 49 - 21 = 10 > 0$, $E(8) = 80 - 64 - 24 = -8 < 0$. By the intermediate value theorem an equilibrium price $P_0 \in (7, 8)$ exists. Solving the quadratic: $P_0 = (-3 + \sqrt{329})/2 \approx 7.57$, about VND 757 thousand per kg.

Định lý giá trị trung gian cho phương pháp chia đôi: lấy trung điểm đoạn, giữ nửa đoạn mà E đổi dấu. Bốn bước đầu với $E(P) = 80 - P^2 - 3P$ trên $[7; 8]$:

The intermediate value theorem gives the bisection method: take the midpoint and keep the half on which E changes sign. The first four steps for $E(P) = 80 - P^2 - 3P$ on $[7, 8]$:

Bước Step	Đoạn đang xét Current interval	Trung điểm c Midpoint c	$E(c)$	Đoạn mới New interval
1	$[7; 8]$ $[7, 8]$	7,5 7.5	$1,25 > 0$ $1.25 > 0$	$[7,5; 8]$ $[7.5, 8]$
2	$[7,5; 8]$ $[7.5, 8]$	7,75 7.75	$-3,3125 < 0$ $-3.3125 < 0$	$[7,5; 7,75]$ $[7.5, 7.75]$
3	$[7,5; 7,75]$ $[7.5, 7.75]$	7,625 7.625	$-1,0156 < 0$ $-1.0156 < 0$	$[7,5; 7,625]$ $[7.5, 7.625]$
4	$[7,5; 7,625]$ $[7.5, 7.625]$	7,5625 7.5625	$0,1211 > 0$ $0.1211 > 0$	$[7,5625; 7,625]$ $[7.5625, 7.625]$

Sau bốn bước nghiệm nằm trong đoạn dài 0,0625, chứa giá trị đúng 7,569. Mỗi bước độ dài đoạn giảm một nửa.

After four steps the root lies in an interval of length 0.0625 containing the true value 7.569. Each step halves the interval.

Phân loại điểm gián đoạn — Classifying discontinuities

Loại <i>Kind</i>	Dấu hiệu <i>Sign</i>	Ví dụ <i>Example</i>
Loại một, bỏ được <i>First kind, removable</i>	Hai giới hạn một phía bằng nhau nhưng khác $f(x_0)$ hoặc $f(x_0)$ không xác định <i>Equal one-sided limits that differ from $f(x_0)$, or $f(x_0)$ undefined</i>	$(x^2 - 9)/(x - 3)$ tại $x = 3$ <i>$(x^2 - 9)/(x - 3)$ at $x = 3$</i>
Loại một, bước nhảy <i>First kind, jump</i>	Hai giới hạn một phía hữu hạn nhưng khác nhau; bước nhảy = giới hạn phải – giới hạn trái <i>Finite but different one-sided limits; jump = right limit – left limit</i>	Giá theo lô tại $Q = 100$; thuế suất bậc <i>Quantity price at $Q = 100$; bracket rates</i>
Loại hai <i>Second kind</i>	Ít nhất một giới hạn một phía vô hạn hoặc không tồn tại <i>At least one one-sided limit infinite or non-existent</i>	$1/(x - 2)$ tại $x = 2$; $AC(Q)$ tại $Q = 0$ <i>$1/(x - 2)$ at $x = 2$; $AC(Q)$ at $Q = 0$</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tìm a để hàm $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ khi $x \neq 3$, $f(3) = a$ liên tục tại $x = 3$. Với $x \neq 3$: $f(x) = x + 3 \rightarrow 6$. Điều kiện (4.18): $a = 6$. Với $a \neq 6$, $x = 3$ là điểm gián đoạn bỏ được: chỉ cần định nghĩa lại $f(3) = 6$.

Find a so that $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ for $x \neq 3$, $f(3) = a$ is continuous at $x = 3$. For $x \neq 3$: $f(x) = x + 3 \rightarrow 6$. Condition (4.18): $a = 6$. For $a \neq 6$, $x = 3$ is a removable discontinuity: redefining $f(3) = 6$ is enough.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Hàm giá theo lô $P(Q)$ ở mục 4.2: tại $Q = 100$ giới hạn trái 50, giới hạn phải $45 = P(100)$. Gián đoạn loại một, bước nhảy $45 - 50 = -5$ nghìn đồng. Hàm $AC(Q) = 800/Q + 10$ có $AC \rightarrow +\infty$ khi $Q \rightarrow 0^+$ nên $Q = 0$ là điểm gián đoạn loại hai (và nằm ngoài miền có nghĩa).

The quantity price $P(Q)$ of section 4.2: at $Q = 100$ the left limit is 50 and the right limit is $45 = P(100)$. A first-kind discontinuity with jump $45 - 50 = -5$ thousand VND. $AC(Q) = 800/Q + 10$ tends to $+\infty$ as $Q \rightarrow 0^+$, so $Q = 0$ is a discontinuity of the second kind (and outside the meaningful domain).

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Chỉ kiểm một phía. Với hàm từng khúc, phải tính cả giới hạn trái, giới hạn phải và giá trị tại điểm nối; tính đúng giới hạn trái bằng $f(x_0)$ mới chứng tỏ liên tục trái.

*Checking only one side. For a piecewise function compute the left limit, the right limit **and** the value at the junction; a left limit equal to $f(x_0)$ proves only left-continuity.*

4.6. Hàm liên tục từng khúc trong kinh tế: giá bậc thang và thuế lũy tiến — *Piecewise functions in economics: tiered prices and progressive tax*

Biểu giá bậc thang — *Tiered (block) tariffs*

Một công ty cấp nước tính tiền theo bậc: 10 m³ đầu 6 nghìn đồng/m³, từ trên 10 đến 20 m³ 9 nghìn đồng/m³, trên 20 m³ 12 nghìn đồng/m³. Mỗi bậc chỉ áp cho phần lượng nước rơi vào bậc đó. Hàm tiền nước T(x) (nghìn đồng) theo lượng nước x (m³):

A water company charges by tiers: the first 10 m³ at VND 6 thousand per m³, over 10 up to 20 m³ at VND 9 thousand, over 20 m³ at VND 12 thousand. Each rate applies only to the water falling in its tier. The bill T(x) (VND thousand) as a function of use x (m³):

$$T(x) = 6x \quad (0 \leq x \leq 10); \quad 60 + 9(x - 10) \quad (10 < x \leq 20); \quad 150 + 12(x - 20) \quad (x > 20) \quad (4.19)$$

Điểm nối <i>Junction</i>	Giới hạn trái <i>Left limit</i>	Giá trị và giới hạn phải <i>Value and right limit</i>	Kết luận <i>Conclusion</i>
x = 10	6 · 10 = 60	T(10) = 60; 60 + 9 · 0 = 60	Liên tục <i>Continuous</i>
x = 20	60 + 9 · 10 = 150	T(20) = 150; 150 + 12 · 0 = 150 <i>T(20) = 150; 150 + 12 · 0 = 150</i>	Liên tục <i>Continuous</i>

VÍ DỤ / EXAMPLE — Hộ dùng 26 m³: T(26) = 150 + 12 · 6 = **222 nghìn đồng**; giá bình quân 222/26 ≈ 8,54 nghìn đồng/m³. Hàm tiền nước T liên tục, nhưng hàm **đơn giá của m³ cuối cùng** p(x) nhận các giá trị 6, 9, 12 và nhảy bậc tại x = 10 và x = 20: gián đoạn loại một với bước nhảy +3 tại mỗi điểm. Dùng thêm 1 m³ quanh mốc 20 m³ không làm hóa đơn nhảy vọt, chỉ làm giá của m³ tiếp theo tăng.

*A household using 26 m³: T(26) = 150 + 12 · 6 = VND 222 thousand; average price 222/26 ≈ VND 8.54 thousand per m³. The bill T is continuous, but the **price of the last m³** p(x) takes the values 6, 9, 12 and jumps at x = 10 and x = 20: first-kind discontinuities with jump +3 at each. Using one more m³ around 20 m³ does not make the bill leap; it only makes the next m³ dearer.*

Chiết khấu cho toàn bộ lô hàng — *All-units quantity discount*

Khác với giá bậc thang, chiết khấu toàn bộ lô áp giá thấp cho **cả** lô khi đạt ngưỡng. Với giá 50 nghìn đồng/sản phẩm khi Q < 100 và 45 nghìn đồng khi Q ≥ 100, tổng tiền là:

*Unlike a tiered tariff, an all-units discount applies the lower price to the **whole** order once the threshold is reached. With VND 50 thousand per unit for Q < 100 and VND 45 thousand for Q ≥ 100, the total is:*

$$C(Q) = 50Q \quad (0 \leq Q < 100); \quad C(Q) = 45Q \quad (Q \geq 100) \quad (4.20)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tại Q = 100: giới hạn trái 50 · 100 = 5.000, C(100) = 4.500 nghìn đồng. C gián đoạn loại một, bước nhảy **-500** nghìn đồng. Mua 99 sản phẩm trả 4.950 nghìn, mua 100 sản phẩm chỉ trả 4.500 nghìn. Giải 45Q ≤ 4.950 ⇔ Q ≤ 110: người mua cần từ 99 sản phẩm nên đặt luôn 100 đến 110 sản phẩm, tổng tiền không vượt mức của 99 sản phẩm.

At Q = 100: the left limit is 50 · 100 = 5,000 while C(100) = 4,500 (VND thousand). C has a first-kind

discontinuity with jump –500 thousand. Buying 99 units costs 4,950 thousand, buying 100 only 4,500 thousand. Solving $45Q \leq 4,950 \Leftrightarrow Q \leq 110$: a buyer needing 99 units should order anything from 100 to 110, paying no more than for 99.

Chi phí cố định theo bậc — *Step fixed costs*

Một xưởng in bao bì có một máy in công suất 500 nghìn hộp/tháng. Vượt mức đó phải thuê thêm máy, chi phí cố định tăng từ 200 lên 350 triệu đồng; chi phí biến đổi 4 triệu đồng cho mỗi nghìn hộp. Hàm chi phí (triệu đồng, Q nghìn hộp):

A packaging printer has one press with a capacity of 500 thousand boxes a month. Beyond that a second press must be hired and fixed cost rises from VND 200 to 350 million; variable cost is VND 4 million per thousand boxes. The cost function (VND million, Q in thousand boxes):

$$TC(Q) = 200 + 4Q \quad (0 \leq Q \leq 500); \quad TC(Q) = 350 + 4Q \quad (Q > 500) \quad (4.21)$$

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tại $Q = 500$: $TC(500) = 2.200$ bằng giới hạn trái; giới hạn phải $350 + 2.000 = 2.350$. TC liên tục trái, gián đoạn loại một tại $Q = 500$ với bước nhảy **150 triệu đồng**. Chi phí bình quân $AC(500) = 4,4$ triệu đồng/nghìn hộp, còn ngay trên 500 $AC \approx 4,7$. Đơn hàng vừa vượt công suất một máy làm chi phí bình quân tăng vọt; xưởng chỉ nên nhận khi đơn hàng đủ lớn hoặc giá bán bù được phần chi phí cố định tăng thêm.

*At $Q = 500$: $TC(500) = 2,200$ equals the left limit; the right limit is $350 + 2,000 = 2,350$. TC is left-continuous with a first-kind discontinuity at $Q = 500$, jump **VND 150 million**. Average cost $AC(500) = 4.4$ million per thousand boxes, while just above 500 $AC \approx 4.7$. An order just beyond one press's capacity makes average cost leap; the printer should accept it only if the order is large enough or the price covers the extra fixed cost.*

Thuế lũy tiến từng phần và lũy tiến toàn phần — *Graduated (tiered) and whole-income progressive tax*

Xét một biểu thuế thu nhập bốn bậc tính theo tháng (thu nhập tính thuế x, triệu đồng). Thuế lũy tiến **từng phần** áp mỗi thuế suất cho phần thu nhập nằm trong bậc tương ứng.

*Consider a four-bracket monthly income tax schedule (taxable income x, VND million). A **graduated** (tiered) tax applies each rate only to the part of income inside its bracket.*

Bậc Bracket	Thu nhập tính thuế (triệu đồng) Taxable income (VND million)	Thuế suất Rate	Thuế lũy kế ở cận trên Cumulative tax at upper bound	Công thức rút gọn Short formula
1	Đến 8 Up to 8	5%	0,4 0.4	$0,05x$ $0.05x$
2	Trên 8 đến 20 Over 8 to 20	10%	$0,4 + 1,2 = 1,6$ $0.4 + 1.2 = 1.6$	$0,1x - 0,4$ $0.1x - 0.4$
3	Trên 20 đến 40 Over 20 to 40	20%	$1,6 + 4 = 5,6$ $1.6 + 4 = 5.6$	$0,2x - 2,4$ $0.2x - 2.4$
4	Trên 40 Over 40	30%	—	$0,3x - 6,4$ $0.3x - 6.4$

$$T(x) = 0,05x; 0,1x - 0,4; 0,2x - 2,4; 0,3x - 6,4 \text{ (theo bốn bậc)} \quad (4.22)$$

Kiểm tra liên tục tại các điểm nối: tại $x = 8$: $0,05 \cdot 8 = 0,4 = 0,1 \cdot 8 - 0,4$; tại $x = 20$: $0,1 \cdot 20 - 0,4 = 1,6 = 0,2 \cdot 20 - 2,4$; tại $x = 40$: $0,2 \cdot 40 - 2,4 = 5,6 = 0,3 \cdot 40 - 6,4$. Thuế lũy tiến từng phần là hàm **liên tục** và tăng: thu nhập trước thuế tăng thì thu nhập sau thuế không bao giờ giảm.

*Continuity at the junctions: at $x = 8$: $0.05 \cdot 8 = 0.4 = 0.1 \cdot 8 - 0.4$; at $x = 20$: $0.1 \cdot 20 - 0.4 = 1.6 = 0.2 \cdot 20 - 2.4$; at $x = 40$: $0.2 \cdot 40 - 2.4 = 5.6 = 0.3 \cdot 40 - 6.4$. Graduated tax is a **continuous**, increasing function: higher pre-tax income never lowers after-tax income.*

VÍ DỤ / EXAMPLE — Thu nhập tính thuế 30 triệu đồng/tháng (bậc 3): $T(30) = 0,2 \cdot 30 - 2,4 = 3,6$ triệu đồng; thuế suất bình quân $3,6/30 = 12\%$, thấp hơn thuế suất biên 20% . Nếu áp lũy tiến **toàn phần** (cả thu nhập chịu thuế suất của bậc cao nhất đạt tới) thì thuế là $0,1x$ trên bậc 2 và $0,2x$ trên bậc 3: tại $x = 20$ thuế là 2 triệu, ngay trên 20 thuế xấp xỉ 4 triệu, bước nhảy 2 triệu đồng. Người có 20,5 triệu còn lại $20,5 - 4,1 = 16,4$ triệu, ít hơn người có 20 triệu (còn 18 triệu).

*Taxable income of VND 30 million a month (bracket 3): $T(30) = 0.2 \cdot 30 - 2.4 = \text{VND } 3.6 \text{ million}$; average rate $3.6/30 = 12\%$, below the marginal rate of 20% . Under a **whole-income** scheme (all income taxed at the highest rate reached) tax is $0.1x$ in bracket 2 and $0.2x$ in bracket 3: at $x = 20$ tax is 2 million, just above 20 it is about 4 million, a jump of VND 2 million. A person earning 20.5 million keeps $20.5 - 4.1 = 16.4$ million, less than one earning 20 million (who keeps 18 million).*

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Lấy thuế suất của bậc cao nhất nhân với toàn bộ thu nhập khi biểu thuế là lũy tiến từng phần. Với $x = 30$ cách tính sai cho $0,2 \cdot 30 = 6$ triệu thay vì 3,6 triệu. Mỗi thuế suất chỉ nhân với phần thu nhập trong bậc của nó.

Multiplying the top rate reached by the whole income under a graduated schedule. For $x = 30$ this gives $0.2 \cdot 30 = 6$ million instead of 3.6 million. Each rate multiplies only the income inside its bracket.

LỖI HAY GẶP / COMMON MISTAKE — Nhầm hàm tổng tiền với hàm đơn giá. Ở biểu giá bậc thang, tổng tiền liên tục còn đơn giá biên nhảy bậc; ở chiết khấu toàn bộ lô, chính tổng tiền gián đoạn. Đọc kỹ đề hỏi hàm nào.

Confusing the total-charge function with the unit-price function. Under a tiered tariff the total is continuous while the marginal price jumps; under an all-units discount the total itself is discontinuous. Read which function the question asks about.

4.7. Kiểm tra kết quả bằng Python — Checking results with Python

Thư viện sympy tính giới hạn bằng hàm limit(biểu thức, biến, điểm), điểm vô cùng viết sp.oo, giới hạn một phía thêm đối số chiều, ví dụ "+" cho giới hạn phải. Đoạn mã dưới tính lại các ví dụ chính của chương; lũy thừa viết bằng pow.

The sympy library computes limits with limit(expression, variable, point); infinity is sp.oo, and a one-sided limit takes a direction argument, e.g. "+" for the right limit. The code below re-checks the chapter's main examples; powers are written with pow.

```
import sympy as sp
x, Q, n = sp.symbols("x Q n")
print(sp.limit((pow(x, 2) - 4) / (x - 2), x, 2))
print(sp.limit((sp.sqrt(x + 9) - 3) / x, x, 0))
print(sp.limit((3*pow(x, 2) + 5*x) / (6*pow(x, 2) - 1), x, sp.oo))
print(sp.limit(sp.sqrt(pow(x, 2) + 4*x) - x, x, sp.oo))
print(sp.limit(sp.log(1 + 3*x) / (sp.exp(2*x) - 1), x, 0))
print(sp.limit(pow(1 + 2/x, 3*x), x, sp.oo))
print(sp.limit((800 + 10*Q) / Q, Q, sp.oo), sp.limit((800 + 10*Q) / Q, Q, 0, "+"))
print(sp.solve(-pow(Q, 2)/2 + 50*Q - 800, Q))
for m in [1, 4, 12, 365]:
    print(m, round(200*pow(1 + 0.08/m, 5*m), 2))
print("lien tuc", round(float(200*sp.exp(0.4)), 2))
```

Kết quả in ra:

Output:

```
4
1/6
1/2
2
3/2
exp(6)
10 oo
[20, 80]
1 293.87
4 297.19
12 297.97
365 298.35
lien tuc 298.36
```

Các dòng lần lượt khớp với ví dụ 1–5 mục 4.3, giới hạn $\exp(6)$ mục 4.4, chi phí bình quân và điểm hòa vốn mục 4.1–4.2, bảng lãi kép mục 4.4. Máy in số thập phân bằng dấu chấm (298.36 tức 298,36).

The lines match examples 1–5 of section 4.3, the limit $\exp(6)$ of section 4.4, the average cost and break-even points of sections 4.1–4.2, and the compounding table of section 4.4.

4.8. Bảng tổng hợp công thức chương 4 — Chapter 4 formula summary

Công thức <i>Formula</i>	Ý nghĩa kinh tế <i>Economic meaning</i>
$TR = P(Q) \cdot Q; \pi = TR - TC; AC = TC/Q$	Doanh thu, lợi nhuận, chi phí bình quân <i>Revenue, profit, average cost</i>
$Q = D(P) \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q)$	Hàm cầu ngược: giá tối đa người mua trả cho lượng Q <i>Inverse demand: highest price buyers pay for Q</i>
$Q_d = Q_s$	Điều kiện cân bằng thị trường <i>Market equilibrium condition</i>
$\lim AC = AVC$ khi $Q \rightarrow +\infty$ (FC cố định) <i>$\lim AC = AVC$ as $Q \rightarrow +\infty$ (fixed FC)</i>	Chi phí cố định dần mỏng khi mở rộng quy mô <i>Fixed cost spread thin at large scale</i>
$\lim (a \cdot x^m + \dots) / (b \cdot x^n + \dots): 0; a/b; \infty$	Dáng điệu dài hạn của tỉ số hai đại lượng <i>Long-run behaviour of a ratio of two quantities</i>

Công thức <i>Formula</i>	Ý nghĩa kinh tế <i>Economic meaning</i>
$\sin u \sim u; \ln(1 + u) \sim u; \exp(u) - 1 \sim u$	Xấp xỉ khi biến thay đổi nhỏ <i>Approximation for small changes</i>
$(1 + a/x)^{bx} \rightarrow \exp(ab)$ <i>$(1 + a/x)$ to the power $bx \rightarrow \exp(ab)$</i>	Gốc của lãi kép liên tục <i>Origin of continuous compounding</i>
$FV = PV \cdot (1 + r/m)^{mt}$ <i>$FV = PV \cdot (1 + r/m)$ to the power mt</i>	Lãi kép m kỳ mỗi năm <i>Compounding m times a year</i>
$FV = PV \cdot \exp(rt); PV = FV \cdot \exp(-rt)$	Lãi kép và chiết khấu liên tục <i>Continuous compounding and discounting</i>
$r_e = (1 + r/m)^m - 1; r_e = \exp(r) - 1$	Lãi suất hiệu dụng để so sánh các khoản gửi <i>Effective rate for comparing deposits</i>
$t = \ln 2/r$	Thời gian vốn gấp đôi <i>Doubling time</i>
$\lim f(x) = f(x_0)$ (hai phía) <i>$\lim f(x) = f(x_0)$ (both sides)</i>	Liên tục: thay đổi nhỏ của biến gây thay đổi nhỏ của hàm <i>Continuity: small input changes cause small output changes</i>
T(x) lũy tiến từng phần: liên tục <i>Graduated tax T(x): continuous</i>	Thu nhập tăng thì thu nhập sau thuế không giảm <i>Higher income never lowers after-tax income</i>

4.9. Thuật ngữ Việt – Anh chương 4 — Chapter 4 Vietnamese – English glossary

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Hàm số	Function	Quy tắc gán mỗi x đúng một y <i>Rule assigning each x exactly one y</i>
Miền xác định	Domain	Tập các giá trị của biến độc lập <i>Set of admissible inputs</i>
Hàm cầu	Demand function	Lượng cầu theo giá <i>Quantity demanded as a function of price</i>
Hàm cung	Supply function	Lượng cung theo giá <i>Quantity supplied as a function of price</i>
Hàm cầu ngược	Inverse demand function	Giá theo lượng cầu <i>Price as a function of quantity</i>
Hàm doanh thu	Total revenue function	$TR = P \cdot Q$
Hàm chi phí	Total cost function	$TC = FC + VC$

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Chi phí bình quân	Average cost	TC/Q
Điểm hòa vốn	Break-even point	Sản lượng có $TR = TC$ <i>Output where $TR = TC$</i>
Hàm sản xuất	Production function	Sản lượng theo đầu vào <i>Output from inputs</i>
Hàm hợp	Composite function	$f(g(x))$
Giới hạn một phía	One-sided limit	Giới hạn chỉ xét $x < x_0$ hoặc $x > x_0$ <i>Limit from the left or right only</i>
Vô cùng bé	Infinitesimal	Đại lượng có giới hạn 0 <i>A quantity tending to 0</i>
Vô cùng lớn	Infinitely large quantity	Đại lượng có trị tuyệt đối tiến ra vô cùng <i>A quantity whose absolute value grows without bound</i>
Dạng vô định	Indeterminate form	$0/0, \infty/\infty, \infty - \infty \dots$
Tiệm cận ngang	Horizontal asymptote	Đường $y = L$ mà f tiến tới khi $x \rightarrow \infty$ <i>Line $y = L$ approached as $x \rightarrow \infty$</i>
Lãi kép liên tục	Continuous compounding	$FV = PV \cdot \exp(rt)$
Lãi suất hiệu dụng	Effective annual rate	Lãi suất ghép năm tương đương <i>Equivalent once-a-year rate</i>
Giá trị hiện tại	Present value	Giá trị hôm nay của khoản tiền tương lai <i>Today's value of a future sum</i>
Hàm liên tục	Continuous function	$\lim f(x) = f(x_0)$ tại mọi điểm <i>$\lim f(x) = f(x_0)$ at every point</i>
Điểm gián đoạn bỏ được	Removable discontinuity	Giới hạn tồn tại nhưng khác $f(x_0)$ <i>Limit exists but differs from $f(x_0)$</i>
Gián đoạn bước nhảy	Jump discontinuity	Hai giới hạn một phía khác nhau <i>Different one-sided limits</i>
Định lý giá trị trung gian	Intermediate value theorem	Hàm liên tục đổi dấu thì có nghiệm <i>A continuous function that changes sign has a root</i>

Thuật ngữ <i>Term (Vietnamese)</i>	Tiếng Anh <i>English</i>	Giải thích ngắn <i>Short definition</i>
Thuế lũy tiến từng phần	Graduated progressive tax	Mỗi thuế suất áp cho phần thu nhập trong bậc <i>Each rate applies to income within its bracket</i>
Biểu giá bậc thang	Tiered (block) tariff	Đơn giá tăng theo bậc tiêu dùng <i>Unit price rising by usage block</i>

4.10. Bài tập vận dụng có lời giải — *Applied exercises with solutions*

Bài 1. Hàm cầu, điểm hòa vốn và chi phí bình quân của một xưởng đồ gỗ — *Exercise 1. Demand, break-even points and average cost of a furniture workshop*

Xưởng đồ gỗ Phú Tân (TP.HCM) bán một mẫu ghế văn phòng. Phòng kinh doanh ước lượng hàm cầu tháng $Q = 400 - 4P$, trong đó Q là sản lượng (nghìn chiếc), P là giá bán (nghìn đồng/chiếc). Chi phí cố định tháng 1.500 triệu đồng, chi phí biến đổi 20 nghìn đồng/chiếc. Yêu cầu: (1) lập hàm cầu ngược và nêu miền có nghĩa kinh tế; (2) lập hàm doanh thu $TR(Q)$, chi phí $TC(Q)$, lợi nhuận $\pi(Q)$ theo triệu đồng; (3) tìm các mức sản lượng hòa vốn; (4) lập hàm chi phí bình quân $AC(Q)$, tính giới hạn khi $Q \rightarrow 0^+$ và $Q \rightarrow +\infty$; (5) tìm mức sản lượng cho lợi nhuận lớn nhất bằng đỉnh parabol và giá bán tương ứng.

Phú Tân furniture workshop (Ho Chi Minh City) sells an office chair model. The sales team estimates monthly demand $Q = 400 - 4P$, where Q is output (thousand chairs) and P is the price (thousand VND per chair). Monthly fixed cost is VND 1,500 million and variable cost is VND 20 thousand per chair. Required: (1) find the inverse demand function and its economically meaningful domain; (2) write revenue $TR(Q)$, cost $TC(Q)$ and profit $\pi(Q)$ in VND million; (3) find the break-even outputs; (4) write average cost $AC(Q)$ and its limits as $Q \rightarrow 0^+$ and $Q \rightarrow +\infty$; (5) find the profit-maximising output from the vertex of the parabola and the corresponding price.

- Hàm cầu ngược: từ $Q = 400 - 4P$ suy ra $4P = 400 - Q$, $P = 100 - Q/4$. Giá và lượng phải dương: $P > 0 \Leftrightarrow Q < 400$. Miền có nghĩa: $0 < Q < 400$ (nghìn chiếc), tương ứng $0 < P < 100$ (nghìn đồng).

Inverse demand: from $Q = 400 - 4P$ we get $4P = 400 - Q$, $P = 100 - Q/4$. Price and quantity must be positive: $P > 0 \Leftrightarrow Q < 400$. Domain: $0 < Q < 400$ (thousand chairs), i.e. $0 < P < 100$ (thousand VND).

- Đơn vị: Q nghìn chiếc nhân P nghìn đồng cho triệu đồng. $TR(Q) = P \cdot Q = 100Q - Q^2/4$; $TC(Q) = 1.500 + 20Q$; $\pi(Q) = TR - TC = -Q^2/4 + 80Q - 1.500$ (triệu đồng).
Units: Q in thousand chairs times P in thousand VND gives VND million. $TR(Q) = P \cdot Q = 100Q - Q^2/4$; $TC(Q) = 1,500 + 20Q$; $\pi(Q) = TR - TC = -Q^2/4 + 80Q - 1,500$ (VND million).

- Hòa vốn: $\pi(Q) = 0 \Leftrightarrow Q^2 - 320Q + 6.000 = 0$; $\Delta' = 160^2 - 6.000 = 19.600 = 140^2$. Hai nghiệm $Q_1 = 20$, $Q_2 = 300$ (nghìn chiếc), cả hai thuộc miền có nghĩa. Xưởng có lãi

khi $20 < Q < 300$.

Break-even: $\pi(Q) = 0 \Leftrightarrow Q^2 - 320Q + 6,000 = 0$; $\Delta' = 160^2 - 6,000 = 19,600 = 140^2$. Roots $Q_1 = 20$, $Q_2 = 300$ (thousand chairs), both in the domain. The workshop makes a profit when $20 < Q < 300$.

4. Chi phí bình quân: $AC(Q) = 1.500/Q + 20$ (nghìn đồng/chiếc). Khi $Q \rightarrow 0^+$, $1.500/Q \rightarrow +\infty$ nên $AC \rightarrow +\infty$: sản xuất ít thì chi phí cố định dồn lên mỗi chiếc. Khi $Q \rightarrow +\infty$, $AC \rightarrow 20$: chi phí bình quân tiến dần tới chi phí biến đổi một chiếc nhưng không bao giờ bằng 20.

Average cost: $AC(Q) = 1,500/Q + 20$ (thousand VND per chair). As $Q \rightarrow 0^+$, $1,500/Q \rightarrow +\infty$ so $AC \rightarrow +\infty$: at low output the fixed cost is spread over few chairs. As $Q \rightarrow +\infty$, $AC \rightarrow 20$: average cost approaches the unit variable cost but never reaches 20.

5. Lợi nhuận lớn nhất: $\pi(Q)$ là parabol hệ số Q^2 âm, đỉnh tại $Q = -80/(2 \cdot (-1/4)) = 160$ (nghìn chiếc), $\pi(160) = -6.400 + 12.800 - 1.500 = 4.900$ (triệu đồng). Giá bán $P = 100 - 160/4 = 60$ (nghìn đồng/chiếc). Chương 6 giải lại bằng điều kiện $MR = MC$ và cho cùng kết quả.

Maximum profit: $\pi(Q)$ is a parabola with a negative Q^2 coefficient; its vertex is at $Q = -80/(2 \cdot (-1/4)) = 160$ (thousand chairs), $\pi(160) = -6,400 + 12,800 - 1,500 = 4,900$ (VND million). Price $P = 100 - 160/4 = 60$ (thousand VND per chair). Chapter 6 confirms this with the condition $MR = MC$.

6. Kết luận: xưởng nên bán khoảng 160 nghìn chiếc/tháng với giá 60 nghìn đồng, lãi 4.900 triệu đồng; sản lượng dưới 20 nghìn hoặc trên 300 nghìn chiếc đều lỗ. Giới hạn $AC \rightarrow 20$ cho biết dù mở rộng quy mô, giá bán dưới 20 nghìn đồng/chiếc không bao giờ bù được chi phí.

Conclusion: the workshop should sell about 160 thousand chairs a month at VND 60 thousand, earning VND 4,900 million; output below 20 thousand or above 300 thousand chairs makes a loss. The limit $AC \rightarrow 20$ means that however large the scale, a price below VND 20 thousand per chair never covers cost.

Bài 2. Chọn ngân hàng gửi tiết kiệm theo cách ghép lãi — Exercise 2. Choosing a bank by compounding method

Chị Hoàng Thu Trang có 500 triệu đồng muốn gửi 3 năm. Ba ngân hàng chào: ngân hàng A lãi suất danh nghĩa 7,2%/năm, ghép lãi hằng tháng; ngân hàng B 7%/năm, ghép lãi liên tục; ngân hàng C 7,4%/năm, ghép lãi hằng năm. Yêu cầu: (1) tính lãi suất hiệu dụng năm của mỗi ngân hàng; (2) tính số tiền nhận được sau 3 năm; (3) với ngân hàng B, sau bao lâu số tiền gấp đôi; (4) chị Trang cần 800 triệu đồng sau 5 năm để mua xe; theo ngân hàng B, hôm nay phải gửi bao nhiêu.

Ms Hoàng Thu Trang has VND 500 million to deposit for 3 years. Three banks offer: bank A a nominal rate of 7.2% a year compounded monthly; bank B 7% a year compounded continuously; bank C 7.4% a year compounded annually. Required: (1) the effective annual rate of each bank; (2) the amount after 3 years; (3) for bank B, how long it takes the money to double; (4) Ms Trang needs VND 800 million in 5 years to buy a car; at bank B, how much must she deposit today?

1. Lãi suất hiệu dụng: A: $(1 + 0,072/12)^{12} - 1 = 1,006^{12} - 1 \approx 7,44\%$; B: $\exp(0,07) - 1 \approx 7,25\%$; C: 7,40% (ghép năm thì lãi suất hiệu dụng bằng lãi suất danh nghĩa).

Effective rates: A: $(1 + 0.072/12)^{12} - 1 = 1.006^{12} - 1 \approx 7.44\%$; B: $\exp(0.07) - 1 \approx 7.25\%$; C: 7.40% (with annual compounding the effective rate equals the nominal rate).

2. Số tiền sau 3 năm: A: $500 \cdot 1,006^{36} \approx 620,15$ triệu đồng; B: $500 \cdot \exp(0,21) \approx 616,84$ triệu đồng; C: $500 \cdot 1,074^3 \approx 619,42$ triệu đồng.

Amount after 3 years: A: $500 \cdot 1.006^{36} \approx \text{VND } 620.15 \text{ million}$; B: $500 \cdot \exp(0.21) \approx \text{VND } 616.84 \text{ million}$; C: $500 \cdot 1.074^3 \approx \text{VND } 619.42 \text{ million}$.

3. So sánh: ngân hàng A có lãi suất hiệu dụng cao nhất nên cho nhiều tiền nhất, hơn B 3,31 triệu đồng. Ghép lãi liên tục không bù được mức lãi suất danh nghĩa thấp hơn 0,2 điểm phần trăm.

Comparison: bank A has the highest effective rate and yields the most, VND 3.31 million more than B. Continuous compounding does not make up for a nominal rate 0.2 percentage points lower.

4. Thời gian gấp đôi theo B: $\exp(0,07t) = 2 \Leftrightarrow t = \ln 2/0,07 \approx 9,90$ năm.

Doubling time at B: $\exp(0.07t) = 2 \Leftrightarrow t = \ln 2/0.07 \approx 9.90 \text{ years}$.

5. Giá trị hiện tại: $PV = 800 \cdot \exp(-0,07 \cdot 5) = 800 \cdot \exp(-0,35) \approx 563,75$ triệu đồng. Chị Trang chỉ có 500 triệu đồng nên phải bổ sung khoảng 63,75 triệu đồng hoặc chờ lâu hơn.

Present value: $PV = 800 \cdot \exp(-0.07 \cdot 5) = 800 \cdot \exp(-0.35) \approx \text{VND } 563.75 \text{ million}$. Ms Trang has only VND 500 million, so she must add about VND 63.75 million or wait longer.

6. Kết luận: so sánh các khoản gửi phải quy về lãi suất hiệu dụng, không so lãi suất danh nghĩa với nhau khi số kỳ ghép lãi khác nhau. Chọn ngân hàng A.

Conclusion: deposits must be compared by effective rates; nominal rates are not comparable when compounding frequencies differ. Choose bank A.

4.11. Câu hỏi tự luận và dàn ý trả lời — Essay questions and answer outlines

Câu 1. Tính các giới hạn: a) giới hạn khi $x \rightarrow 1$ của $(x^3 - 1)/(x^2 - 1)$; b) giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ của $(2x^3 - x)/(5x^3 + 4x^2)$; c) giới hạn khi $x \rightarrow 0$ của $(\sqrt{1 + 4x} - 1)/x$; d) giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ của $(1 - 2/x)^x$; e) giới hạn khi $x \rightarrow 0$ của $\ln(1 + 5x)/\sin 2x$.

Question 1. Evaluate: a) the limit as $x \rightarrow 1$ of $(x^3 - 1)/(x^2 - 1)$; b) the limit as $x \rightarrow +\infty$ of $(2x^3 - x)/(5x^3 + 4x^2)$; c) the limit as $x \rightarrow 0$ of $(\sqrt{1 + 4x} - 1)/x$; d) the limit as $x \rightarrow +\infty$ of $(1 - 2/x)^x$; e) the limit as $x \rightarrow 0$ of $\ln(1 + 5x)/\sin 2x$.

- a) Dạng 0/0. Phân tích: $(x - 1)(x^2 + x + 1)/[(x - 1)(x + 1)] = (x^2 + x + 1)/(x + 1) \rightarrow 3/2$.
a) Form 0/0. Factorise: $(x - 1)(x^2 + x + 1)/[(x - 1)(x + 1)] = (x^2 + x + 1)/(x + 1) \rightarrow 3/2$.
- b) Dạng ∞/∞ , tử và mẫu cùng bậc 3: giới hạn bằng tỉ số hệ số bậc cao nhất 2/5.
b) Form ∞/∞ , numerator and denominator both of degree 3: the limit is the ratio of leading coefficients, 2/5.
- c) Dạng 0/0. Nhân liên hợp: $4x/[x(\sqrt{1 + 4x} + 1)] = 4/(\sqrt{1 + 4x} + 1) \rightarrow 4/2 = 2$.
c) Form 0/0. Multiply by the conjugate: $4x/[x(\sqrt{1 + 4x} + 1)] = 4/(\sqrt{1 + 4x} + 1) \rightarrow 4/2 = 2$.
- d) Dạng 1 mũ ∞ . Áp dụng $(1 + a/x)^{bx} \rightarrow \exp(ab)$ với $a = -2$, $b = 1$: giới hạn bằng $\exp(-2) \approx 0,1353$.

d) Form 1 to the power ∞ . Using $(1 + a/x)^{bx} \rightarrow \exp(ab)$ with $a = -2$, $b = 1$: the limit is $\exp(-2) \approx 0.1353$.

- e) Dạng $0/0$. Thay tương đương: $\ln(1 + 5x) \sim 5x$, $\sin 2x \sim 2x$, giới hạn bằng $5x/2x = 5/2$.

e) Form $0/0$. Use equivalents: $\ln(1 + 5x) \sim 5x$, $\sin 2x \sim 2x$, so the limit is $5x/2x = 5/2$.

Câu 2. Công ty cấp nước Tân Hòa tính tiền nước sinh hoạt theo bậc: 10 m³ đầu giá 8 nghìn đồng/m³; từ trên 10 đến 20 m³ giá 10 nghìn đồng/m³; trên 20 m³ giá 14 nghìn đồng/m³. a) Viết hàm tiền nước T(x) theo lượng nước x (m³); b) kiểm tra tính liên tục của T(x) tại x = 10 và x = 20; c) tính tiền nước khi dùng 25 m³ và giá bình quân; d) hộ gia đình trả 236 nghìn đồng đã dùng bao nhiêu m³; e) hàm đơn giá áp cho m³ cuối cùng có liên tục không.

Question 2. Tân Hòa water company charges households by tiers: the first 10 m³ at VND 8 thousand per m³; over 10 up to 20 m³ at VND 10 thousand per m³; over 20 m³ at VND 14 thousand per m³. a) Write the bill T(x) as a function of water use x (m³); b) check continuity of T(x) at x = 10 and x = 20; c) find the bill for 25 m³ and the average price; d) how much water did a household paying VND 236 thousand use; e) is the price of the last m³ a continuous function?

- a) $T(x) = 8x$ khi $0 \leq x \leq 10$; $T(x) = 80 + 10(x - 10)$ khi $10 < x \leq 20$; $T(x) = 180 + 14(x - 20)$ khi $x > 20$ (nghìn đồng).
a) $T(x) = 8x$ for $0 \leq x \leq 10$; $T(x) = 80 + 10(x - 10)$ for $10 < x \leq 20$; $T(x) = 180 + 14(x - 20)$ for $x > 20$ (VND thousand).
- b) Tại x = 10: $T(10) = 80$, giới hạn trái 80, giới hạn phải $80 + 0 = 80 \Rightarrow$ liên tục. Tại x = 20: $T(20) = 180$, giới hạn phải 180 $\Rightarrow$ liên tục. Hàm tiền nước liên tục trên $[0; +\infty)$.
b) At x = 10: $T(10) = 80$, left limit 80, right limit $80 + 0 = 80 \Rightarrow$ continuous. At x = 20: $T(20) = 180$, right limit 180 $\Rightarrow$ continuous. The bill is continuous on $[0, +\infty)$.
- c) $T(25) = 180 + 14 \cdot 5 = 250$ nghìn đồng; giá bình quân $250/25 = 10$ nghìn đồng/m³.
c) $T(25) = 180 + 14 \cdot 5 = \text{VND } 250 \text{ thousand}$; average price $250/25 = \text{VND } 10 \text{ thousand per m}^3$.
- d) $236 > T(20) = 180$ nên $x > 20$: $180 + 14(x - 20) = 236 \Leftrightarrow x - 20 = 4 \Leftrightarrow x = 24 \text{ m}^3$.
d) $236 > T(20) = 180$, so $x > 20$: $180 + 14(x - 20) = 236 \Leftrightarrow x - 20 = 4 \Leftrightarrow x = 24 \text{ m}^3$.
- e) Đơn giá m³ cuối p(x) nhận các giá trị 8, 10, 14: giới hạn trái và phải tại x = 10 (8 và 10), tại x = 20 (10 và 14) khác nhau $\Rightarrow$ gián đoạn loại một dạng bước nhảy tại hai điểm.
e) The price of the last m³, p(x), takes the values 8, 10, 14: the left and right limits at x = 10 (8 and 10) and at x = 20 (10 and 14) differ $\Rightarrow$ jump discontinuities of the first kind at both points.

Câu 3. Cho hàm $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ khi $x < 2$; $f(x) = ax + b$ khi $2 \leq x \leq 5$; $f(x) = 3x + 1$ khi $x > 5$. a) Tính giới hạn trái của f tại $x = 2$; b) tìm a, b để f liên tục trên toàn trục số; c) với $a = 4, b = 0$, phân loại điểm gián đoạn của f .

Question 3. Let $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ for $x < 2$; $f(x) = ax + b$ for $2 \leq x \leq 5$; $f(x) = 3x + 1$ for $x > 5$. a) Find the left limit of f at $x = 2$; b) find a and b so that f is continuous on the whole real line; c) with $a = 4, b = 0$, classify the discontinuities of f .

- a) Với $x < 2$: $(x^2 - 4)/(x - 2) = x + 2$, giới hạn trái tại 2 bằng 4.
a) For $x < 2$: $(x^2 - 4)/(x - 2) = x + 2$, so the left limit at 2 is 4.
- b) Liên tục tại 2: $f(2) = 2a + b$ phải bằng 4. Liên tục tại 5: $f(5) = 5a + b$ phải bằng giới hạn phải $3 \cdot 5 + 1 = 16$.
b) Continuity at 2: $f(2) = 2a + b$ must equal 4. Continuity at 5: $f(5) = 5a + b$ must equal the right limit $3 \cdot 5 + 1 = 16$.
- Giải hệ $2a + b = 4, 5a + b = 16$: trừ vế được $3a = 12, a = 4, b = -4$. Trên mỗi khúc f là hàm sơ cấp xác định nên liên tục; vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$.
Solve $2a + b = 4, 5a + b = 16$: subtracting gives $3a = 12, a = 4, b = -4$. On each piece f is an elementary function defined there, hence continuous; so f is continuous on $\mathbb{R}$.
- c) Với $a = 4, b = 0$: $f(2) = 8$, giới hạn phải 8, giới hạn trái 4 $\Rightarrow x = 2$ là điểm gián đoạn loại một, bước nhảy $8 - 4 = 4$.
c) With $a = 4, b = 0$: $f(2) = 8$, right limit 8, left limit 4 $\Rightarrow x = 2$ is a discontinuity of the first kind with jump $8 - 4 = 4$.
- Tại $x = 5$: $f(5) = 20$, giới hạn phải 16 $\Rightarrow$ gián đoạn loại một, bước nhảy $16 - 20 = -4$. Hàm liên tục tại mọi điểm khác.
At $x = 5$: $f(5) = 20$, right limit 16 $\Rightarrow$ a discontinuity of the first kind, jump $16 - 20 = -4$. The function is continuous everywhere else.

4.12. Câu hỏi trắc nghiệm — Multiple-choice questions

22. Giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$ của $(4x^2 - 3x)/(2x^2 + 7)$ bằng:

The limit as $x \rightarrow +\infty$ of $(4x^2 - 3x)/(2x^2 + 7)$ equals:

- A. 2
- B. $-3/7$
- C. 0
- D. $+\infty$

23. Hàm cầu $Q = 150 - 3P$ (Q : sản phẩm, P : nghìn đồng). Hàm cầu ngược là:

Demand is $Q = 150 - 3P$ (Q : units, P : VND thousand). The inverse demand function is:

- A. $P = 150 - 3Q$
- B. $P = 50 - Q/3$
- C. $P = 50 + Q/3$
- D. $P = 150 - Q/3$

24. Gửi 100 triệu đồng, lãi suất danh nghĩa 6%/năm, ghép lãi liên tục trong 5 năm. Số tiền nhận được gần nhất với:

VND 100 million is deposited at a nominal 6% a year compounded continuously for 5 years. The final amount is closest to:

- A. 130,00 triệu đồng / VND 130.00 million
- B. 133,82 triệu đồng / VND 133.82 million
- C. 134,89 triệu đồng / VND 134.89 million
- D. 134,99 triệu đồng / VND 134.99 million

25. Giới hạn khi $x \rightarrow 0$ của $(\sqrt{x+4} - 2)/x$ bằng:
The limit as $x \rightarrow 0$ of $(\sqrt{x+4} - 2)/x$ equals:

- A. 1/4
- B. 1/2
- C. 0
- D. Không tồn tại / It does not exist

26. Biểu thuế lũy tiến từng phần: đến 8 triệu đồng 5%; trên 8 đến 20 triệu 10%; trên 20 đến 40 triệu 20%; trên 40 triệu 30%. Thuế phải nộp khi thu nhập tính thuế 50 triệu đồng là:

A tiered progressive tax: up to VND 8 million at 5%; over 8 up to 20 million at 10%; over 20 up to 40 million at 20%; over 40 million at 30%. The tax on a taxable income of VND 50 million is:

- A. 15 triệu đồng / VND 15 million
- B. 10 triệu đồng / VND 10 million
- C. 8,6 triệu đồng / VND 8.6 million
- D. 5,6 triệu đồng / VND 5.6 million

27. Hàm $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ không xác định tại $x = 1$. Điểm $x = 1$ là:
The function $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ is undefined at $x = 1$. The point $x = 1$ is:

- A. Điểm gián đoạn loại hai / A discontinuity of the second kind
- B. Điểm gián đoạn bỏ được / A removable discontinuity
- C. Điểm liên tục của f / A point of continuity of f
- D. Điểm gián đoạn bước nhảy / A jump discontinuity

28. Chi phí bình quân $AC(Q) = (500 + 8Q)/Q$ (nghìn đồng/sản phẩm). Giới hạn khi $Q \rightarrow +\infty$ của $AC(Q)$ bằng:

Average cost $AC(Q) = (500 + 8Q)/Q$ (VND thousand per unit). The limit of $AC(Q)$ as $Q \rightarrow +\infty$ is:

- A. 0
- B. 500
- C. $+\infty$
- D. 8

Chương 5. Đạo hàm, vi phân và phân tích cận biên — Chapter 5. Derivatives, differentials and marginal analysis

Mục tiêu chương — Chapter objectives

- Tính đạo hàm bằng bảng và các quy tắc: tổng, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược, hàm ẩn.
Differentiate using the table and the rules: sum, product, quotient, chain, inverse and implicit functions.
- Dùng vi phân để xấp xỉ thay đổi của hàm; tính đạo hàm cấp cao; khử dạng vô định bằng quy tắc L'Hôpital.
Use the differential to approximate changes; compute higher-order derivatives; resolve indeterminate forms with L'Hôpital's rule.
- Tính và giải thích các giá trị cận biên MC, MR, $M\pi$, MPC, MPS, MPL.
Compute and interpret the marginal quantities MC, MR, $M\pi$, MPC, MPS and MPL.
- Tính hệ số co giãn của cầu theo giá, theo thu nhập, của cung; tìm điểm co giãn đơn vị; dùng quan hệ co giãn – doanh thu để ra quyết định giá.
Compute price and income elasticities of demand and the elasticity of supply; locate the unit-elastic point; use the elasticity–revenue link to set prices.
- Tính tốc độ tăng trưởng của một đại lượng kinh tế và của tích, thương các đại lượng.
Compute the growth rate of an economic variable and of products and quotients of variables.

5.1. Đạo hàm và các quy tắc tính — Derivatives and differentiation rules

Định nghĩa đạo hàm — Definition of the derivative

Cho hàm $y = f(x)$ xác định trong một khoảng chứa x_0 . Khi biến x thay đổi một lượng Δx , hàm thay đổi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Tỷ số $\Delta y / \Delta x$ là tốc độ thay đổi trung bình của y trên đoạn $[x_0; x_0 + \Delta x]$. Cho $\Delta x \rightarrow 0$ ta được tốc độ thay đổi tức thời tại x_0 .

Let $y = f(x)$ be defined on an interval containing x_0 . When x changes by Δx , the function changes by $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. The ratio $\Delta y / \Delta x$ is the average rate of change of y over $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Letting $\Delta x \rightarrow 0$ gives the instantaneous rate of change at x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] / \Delta x \quad (5.1)$$

PHẢI THUỘC / MEMORISE — Nếu giới hạn (5.1) tồn tại và hữu hạn thì f **khả vi** tại x_0 và $f'(x_0)$ là **đạo hàm** của f tại x_0 . Về hình học, $f'(x_0)$ là **hệ số góc của tiếp tuyến** với đồ thị tại điểm $(x_0; f(x_0))$; phương trình tiếp tuyến: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Hàm khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0 ; điều ngược lại không đúng.

*If limit (5.1) exists and is finite, f is **differentiable** at x_0 and $f'(x_0)$ is the **derivative** of f at x_0 .*

*Geometrically, $f'(x_0)$ is the **slope of the tangent** to the graph at $(x_0, f(x_0))$; the tangent line is $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. A function differentiable at x_0 is continuous there; the converse fails.*

VÍ DỤ / EXAMPLE — Tính đạo hàm của $f(x) = x^2$ tại $x_0 = 3$ bằng định nghĩa. $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 9 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$, $\Delta y / \Delta x = 6 + \Delta x \rightarrow 6$ khi $\Delta x \rightarrow 0$. Vậy $f'(3) = 6$; tiếp tuyến tại $(3; 9)$

là $y = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9$.

Differentiate $f(x) = x^2$ at $x_0 = 3$ from the definition. $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 9 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$, $\Delta y/\Delta x = 6 + \Delta x \rightarrow 6$ as $\Delta x \rightarrow 0$. So $f'(3) = 6$; the tangent at $(3, 9)$ is $y = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9$.

Đạo hàm một phía: $f'(x_0^-)$ lấy giới hạn khi $\Delta x \rightarrow 0^-$, $f'(x_0^+)$ khi $\Delta x \rightarrow 0^+$. f khả vi tại x_0 khi và chỉ khi hai đạo hàm một phía tồn tại và bằng nhau. Hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại 0 nhưng $f'(0^-) = -1$, $f'(0^+) = 1$ nên không khả vi tại 0. Trong kinh tế, biểu giá điện bậc thang có tiền điện liên tục theo số kWh nhưng giá cận biên nhảy bậc tại các mốc 50, 100, 200 kWh: tại mốc bậc, hàm tiền điện không khả vi.

One-sided derivatives: $f'(x_0^-)$ takes the limit as $\Delta x \rightarrow 0^-$, $f'(x_0^+)$ as $\Delta x \rightarrow 0^+$. f is differentiable at x_0 if and only if both exist and are equal. $f(x) = |x|$ is continuous at 0 but $f'(0^-) = -1$ and $f'(0^+) = 1$, so it is not differentiable at 0. In economics, a tiered electricity tariff makes the bill continuous in kWh while the marginal price jumps at the 50, 100 and 200 kWh thresholds: at each threshold the bill is not differentiable.

VÍ DỤ / EXAMPLE — Một khu nhà trọ tính tiền nước theo hai bậc: $B(x) = 1,8x$ nếu $0 \leq x \leq 50$ và $B(x) = 90 + 1,9(x - 50)$ nếu $x > 50$ (x là m^3 /tháng, B nghìn đồng). Tại $x = 50$ hai nhánh cùng cho 90 nên B liên tục. Đạo hàm trái $B'(50^-) = 1,8$, đạo hàm phải $B'(50^+) = 1,9$: hai giá trị khác nhau nên B không khả vi tại 50. Giá cận biên của m^3 nước nhảy từ 1,8 lên 1,9 nghìn đồng tại mốc bậc.

A boarding house bills water in two tiers: $B(x) = 1.8x$ if $0 \leq x \leq 50$ and $B(x) = 90 + 1.9(x - 50)$ if $x > 50$ (x in m^3 a month, B in VND thousand). At $x = 50$ both branches give 90, so B is continuous. The left derivative $B'(50^-) = 1.8$ and the right derivative $B'(50^+) = 1.9$ differ, so B is not differentiable at 50. The marginal price of a cubic metre jumps from 1.8 to 1.9 thousand at the tier threshold.

Bảng đạo hàm các hàm cơ bản — Table of derivatives of basic functions

Hàm số Function	Đạo hàm Derivative	Hàm hợp $u = u(x)$ Composite $u = u(x)$
c (hằng số) c (constant)	0	—
x^a ($a \in \mathbb{R}$)	$a \cdot x^{a-1}$	$a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$u'/(2\sqrt{u})$
$1/x$	$-1/x^2$	$-u'/u^2$
e^x	e^x	$e^u \cdot u'$
a^x ($0 < a \neq 1$)	$a^x \cdot \ln a$	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$\ln x$ ($x > 0$)	$1/x$	u'/u
$\log_a x$	$1/(x \cdot \ln a)$	$u'/(u \cdot \ln a)$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos u \cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin u \cdot u'$